УДК 517.948.34

А.Е. Мирзакулова, М.Қ. Дауылбаев

Механика-математика факультеті, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;e-mail: Muratkhan.Daulbaev@kaznu.kz

Сингулярлы ауытқыған интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін қос шекаралық қабатты шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы *

Жұмыста екі үлкен туындысының алдында кіші параметрі бар үшінші ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін "қосымша сипаттаушы теңдеу"деп аталатын теңдеудің түбірлерінің таңбасы әр түрлі болған жағдайында екінүктелі шекаралық есеп қарастырылған. Жұмыс сингулярлы ауытқыған шеттік есеп шешімінің секіріс нүктелеріндегі асимптотикалық сипатын, шешімнің асимптотикалық бағалауын алуға бағытталған. Жұмыста берілген теңдеуге сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі, бастапқы және шекаралық функциялары құрылып, олардың асимптотикалық бағалаулары алынған. Бұл функциялардың көмегімен қарастырылып отырған шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы алынған. Бұл формуланың көмегімен есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы туралы теорема дәлелденген. Теоремадан қарастырылып отырған есеп үшін берілген кесіндінің екі жақ шетінде де шекаралық қабаттың болатындығы көрінеді. Қарастырылып отырған есептің тағы бір ғылыми жаңалығы кесіндінің екі жақ шеттерінде де бастапқы секіріс құбылысының бар екендігі, мысалы, $t = 0$ нүктесінде берілген есеп шешімінің бірінші ретті, ал $t = 1$ нүктесінде нөлінші ретті бастапқы секірістері бар.

Түйін сөздер: {Сингулярлы ауытқу, кіші параметр, бастапқы секіріс, асимптотика.}

А.Е. Мирзакулова, М.К. Дауылбаев

Асимптотические оценки решения краевой задачи с двумя пограничными слоями для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений

В статье рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача с двумя пограничными слоями для линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производных при условии, что корни дополнительного характеристического уравнения имеют противоположные знаки. Работа посвящена получению асимптотических оценок и выяснению асимптотического поведения решения сингулярно возмущенной краевой задачи в точках начальных скачков.

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0699/ГФ, 2012г.-2014г.

В работе построена фундаментальная система решений, начальные и граничные функции сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения, получены их асимптотические оценки. С помощью начальных и граничных функции получена явная аналитическая формула решений. Доказана теорема об асимптотической оценке решения рассматриваемой краевой задачи. Установлено, что решение рассматриваемой краевой задачи на концах данного отрезка обладает явлениями начальных скачков, причем различных порядков. Например, в левой точке $t = 0$ имеет начальный скачок первого порядка, а на правом конце $t = 1$ – нулевого порядка.

Ключевые слова: {Сингулярное возмущение, малый параметр, начальный скачок, асимптотика.}

A.E. Mirzakulova, M.K. Dauylbayev

Asymptotic estimates of solutions boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations

The article deals with the singularly perturbed boundary value problem for third order linear integro-differential equation with a small parameter in the highest derivatives, provided that the roots of additional distinctive equation have opposite signs. The work is focused on the evaluation and asymptotic behavior of solutions of singularly - perturbed boundary value problem in the initial points jumps.

In this paper for a singularly - perturbed homogeneous differential equation are constructed a fundamental system of solutions, initial and boundary functions and their asymptotic estimates are derived. With initial and boundary functions are obtained explicit analytical formula solutions. The theorem about asymptotic estimate of a solution of boundary value problem is proved. The theorem implies that the solution of boundary value problem of both sides of given segment has the initial jumps with different orders. For instanse, in the left point $t = 0$ the solution of third order linear integro-differential equation has a first order initial jump and in the right side $t = 1$ has null order initial jump.

Key words: {Singular perturbation, small parameter, the initial jump, asymptotics.}

Сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t) y'' + A_1(t) y' + A_2(t) y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x) y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \quad (1)$$

теңдеуіне қойылған келесі түрдегі шеттік есепті қарастырайық:

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta, \quad h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \quad (2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, ал α, β, γ – белгілі тұрақты шамалар.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A_i(t)$, $i = \overline{0,2}$, $F(t)$ функциялары $0 \leq t \leq 1$ аралығында, ал $H_0(t,x)$, $H_1(t,x)$ функциялары $D = \{0 \leq t \leq 1, \ 0 \leq x \leq 1\}$ облысында үзіліссіз дифференциалданады.

II. $A_1(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq 1$.

III. $\mu^2 + A_0(t)\mu + A_1(t) = 0$ теңдеуінің түбірлері $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0$, $\mu_2(t) > \gamma_2 > 0$ болсын.

(1) теңдеуге сәйкес біртекті сингулярлы ауытқыған дифференциалдық

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t)y'' + A_1(t)y' + A_2(t)y = 0 \tag{3}$$

теңдеуін қарастырамыз. Бұл теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі

$$y_1^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx\right)(\mu_1^q(t)y_{10}(t) + O(\varepsilon)), \quad q = \overline{0,2}$$

$$y_2^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx\right)(\mu_2^q(t)y_{20}(t) + O(\varepsilon)), \quad q = \overline{0,2}$$

$$y_3^{(q)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad q = \overline{0,2}$$

түрінде анықталады [1], мұндағы $y_{30}(t) = exp\left(-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx\right)$, ал $y_{10}(t)$, $y_{20}(t)$ – функциялары келесі есептің шешімі болады:

$$p_i(t)y_{i0}'(t) + q_i(t)y_{i0}(t) = 0, \quad y_{i0}(0) = 1, \quad i = 1,2,$$

мұндағы $p_i(t) = (A_0(t) + 2\mu_i(t))\mu_i(t) \neq 0$; $q_i(t) = A_2(t) + A_0(t)\mu_i'(t) + 3\mu_i(t)\mu_i'(t)$.

Іргелі шешімдер жүйесінен құралған вронскианның асимптотикалық формуласы келесі түрде өрнектеледі:

$$\begin{gathered} W(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3} exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx\right) \times \\ \times [y_{10}(t)y_{20}(t)y_{30}(t)\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + O(\varepsilon)]. \end{gathered} \tag{4}$$

Келесі функцияны енгізейік:

$$K(t,s,\varepsilon) = K_0(t,s,\varepsilon) + K_1(t,s,\varepsilon); \;\; K_0(t,s,\epsilon) = \frac{P_0(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}; \;\; K_1(t,s,\epsilon) = \frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{5}$$

мұндағы $W(s,\varepsilon)$ – (3) теңдеудің іргелі шешімдер жүйесінің вронскианы, ал $P_0(t,s,\varepsilon)$, $P_1(t,s,\varepsilon)$ – $W(s,\varepsilon)$ вронскианының үшінші жолы сәйкесінше $y_1(t,\varepsilon), 0, y_3(t,\varepsilon)$ және $0, y_2(t,\varepsilon), 0$ жолдарымен алмастырылған үшінші ретті анықтауыштар.

$K(t,s,\varepsilon)$, $K_0(t,s,\varepsilon)$, $K_1(t,s,\varepsilon)$ функциялары келесі қасиеттерге ие:

1. t айнымалысы бойынша (3) теңдеуді қанағаттандырады:

$$L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon) = 0, \;\; L_\varepsilon K_0(t,s,\varepsilon) = 0, \;\; L_\varepsilon K_1(t,s,\varepsilon) = 0, \;\; t \in [0,1], \;\; t \neq s.$$

2. $t = s$ мәні үшін келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$K(s,s,\varepsilon) = 0, \;\; K'(s,s,\varepsilon) = 0, \;\; K''(s,s,\varepsilon) = 1.$$

$K(t,s,\varepsilon)$ функциясын Коши функциясы деп атаймыз.

(4), (5) формулалардың көмегімен $K_0(t,s,\varepsilon)$, $K_1(t,s,\varepsilon)$ функцияларының келесі $\varepsilon{\to}0$ асимптотикалық формулаларын аламыз:

$$K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon){=}\varepsilon^2\Big(\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}{-}\frac{\mu_1^{(q)}(t)y_{10}(t)}{\varepsilon^q y_{10}(s)\mu_1(s)(\mu_2(s){-}\mu_1(s))}\times$$
$$\times exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\mu_1(x)dx\Big){+}O(\varepsilon)\Big), s{\le}t \tag{6}$$
$$K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon){=}\varepsilon^2\Big(\frac{\mu_2^{(q)}(t)y_{20}(t)}{\varepsilon^q y_{20}(s)\mu_2(s)(\mu_2(s){-}\mu_1(s))}exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^s\mu_2(x)dx\Big){+}O(\varepsilon)\Big), t{\le}s, q{=}\overline{0,2}.$$

$\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$ функциялары келесі есептің шешімі болсын [2]:

$$L_\varepsilon\Phi_i(t,\varepsilon)=0,\quad h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki},\ \ i,k=1,2,3 \tag{7}$$

мұндағы δ_{ki} – Кронекер символы. $\Phi_i(t,\varepsilon), i=1,2,3$ функциялары шекаралық функциялар деп аталады және олар келесі түрде анықталады:

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{I_i(t,\varepsilon)}{I(\varepsilon)}, \tag{8}$$

мұндағы $I(\varepsilon)$ — (3) теңдеудің іргелі шешімдер жүйесінен құралған үшінші ретті мына түрдегі анықтауыш:

$$I(\varepsilon)=\begin{vmatrix} y_1(0,\varepsilon) & y_2(0,\varepsilon) & y_3(0,\varepsilon)\\ y_1'(0,\varepsilon) & y_2'(0,\varepsilon) & y_3'(0,\varepsilon)\\ y_1(1,\varepsilon) & y_2(1,\varepsilon) & y_3(1,\varepsilon)\end{vmatrix},$$

ал $I_i(t,\varepsilon){-}I(\varepsilon)$ анықтауышының i – ші жатық жолы (3) теңдеудің $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$, $y_3(t,\varepsilon)$ іргелі шешімдер жүйесімен алмастырылған үшінші ретті анықтауыш.

$I(\varepsilon)$ анықтауышы үшін келесі асимптотикалық сипат орын алады:

$$I(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}(\mu_1(0)y_{20}(1)+O(\varepsilon))\neq 0. \tag{9}$$

(8)-(9) формулаларды ескере отырып, $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$ шекаралық функцияларының

$\varepsilon \to 0$ жағдайындағы асимптотикалық сипатын аламыз:

$$\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(q)}(t) - \frac{\mu_1(t)y_{10}(t)y_{30}'(0)}{\varepsilon^{q-1}\cdot\mu_1(0)} exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_1(x)dx\Big) + \frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y_{30}(1)}{\varepsilon^q\cdot y_{20}(1)}\times$$
$$\times exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\Big) + O\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{q-2}} exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_1(x)dx\Big) + \frac{1}{\varepsilon^{q-1}} exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\Big)\Big),$$
$$\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{\mu_1(0)} + \frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\varepsilon^{q-1}\cdot\mu_1(0)} exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_1(x)dx\Big) + \frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y_{30}(1)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)y_{20}(1)}\times \tag{10}$$
$$\times exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\Big) + O\Big(\varepsilon^2 + \varepsilon^{2-q} exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_1(x)dx\Big) + \varepsilon^{2-q} exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\Big)\Big),$$
$$\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\varepsilon^q y_{20}(1)} exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\Big) + O\Big(\frac{1}{\varepsilon^{q-1}} exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\Big)\Big),$$

(1), (2) есептің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$y(t,\varepsilon) = C_1\Phi_1(t,\varepsilon) + C_2\Phi_2(t,\varepsilon) + C_3\Phi_3(t,\varepsilon) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_1^t K_1(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds, \tag{11}$$

мұндағы $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = 1,2,3$ – шекаралық функциялар, олар (7) есептің шешімі болады және (8) формуламен өрнектеледі, $K(t,s,\varepsilon) = K_0(t,s,\varepsilon) + K_1(t,s,\varepsilon)$ – Коши функциясы, C_i, $i = 1,2,3$ – белгісіз тұрақты шамалар, ал $z(t,\varepsilon)$ функциясы келесі Фредгольмнің екінші текті интегралдық теңдеуінен анықталады [3]:

$$z(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon) + \int\limits_0^1 H(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds, \tag{12}$$

мұндағы

$$f(t,\varepsilon) = F(t) + C_1\int\limits_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t,x)\Phi_1^{(i)}(x,\varepsilon)dx +$$
$$+C_2\int\limits_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t,x)\Phi_2^{(i)}(x,\varepsilon)dx + C_3\int\limits_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t,x)\Phi_3^{(i)}(x,\varepsilon)dx, \tag{13}$$
$$H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_s^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t,x)K_0^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx - \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^s \sum_{i=0}^1 H_i(t,x)K_1^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx$$

IV. 1 саны $H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.

Онда (12) интегралдық теңдеудің шешімі жалғыз болады және ол келесі түрде өрнектеледі:

$$z(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon)+\int\limits_0^1 R(t,s,\varepsilon)f(s,\varepsilon)ds, \tag{14}$$

мұндағы $R(t,s,\varepsilon)-H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің резольвентасы, $f(t,\varepsilon)$ функциясы (13) формуласымен анықталады. (14) формуланы (11) – ге қойып, (1), (2) есептің шешімін келесі түрде өрнектейміз:

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{3}C_iQ_i(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \tag{15}$$

мұндағы

$$Q_i(t,\varepsilon)=\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_i(s,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_t^1 K_1(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_i(s,\varepsilon)ds,$$

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_t^1 K_1(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds, \tag{16}$$

$$\overline{\varphi}_i(s,\varepsilon)=\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{1}\overline{H}_j(s,x,\varepsilon)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)dx,$$

$$\overline{H}_j(s,x,\varepsilon)\equiv H_j(s,x)+\int\limits_0^1 R(s,p,\varepsilon)H_i(p,x)dp,\quad \overline{F}(s,\varepsilon)\equiv F(s)+\int\limits_0^1 R(s,p,\varepsilon)F(p)dp$$

C_i, $i=1,2,3$ белгісіз тұрақтылары үшін (15) формулаға (2) шеттік шарттарды қолданып, келесі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} C_1Q_1(0,\varepsilon)+C_2Q_2(0,\varepsilon)+C_3Q_3(0,\varepsilon)=\alpha-P(0,\varepsilon),\\ C_1Q_1'(0,\varepsilon)+C_2Q_2'(0,\varepsilon)+C_3Q_3'(0,\varepsilon)=\beta-P'(0,\varepsilon),\\ C_1Q_1(1,\varepsilon)+C_2Q_2(1,\varepsilon)+C_3Q_3(1,\varepsilon)=\gamma-P(1,\varepsilon), \end{cases} \tag{17}$$

(17) жүйенің $\Delta(\varepsilon)$ бас анықтауышының асимптотикалық сипаты $\Delta(\varepsilon)=\Delta_0+O(\varepsilon)$ түрінде болады, мұндағы $\Delta_0=1+\int\limits_0^1\dfrac{y_{30}(1)\overline{H}_1^0(s,1)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}ds$. Келесі шарт орындалсын:

V. $\Delta_0\neq 0$.

Онда (17) жүйеден C_i, $i=1,2,3$ тұрақтыларын бірмәнді анықтаймыз. Сонымен, келесі теорема дұрыс болады.

Теорема 1 *Егер I-V шарттар орындалса, онда (1), (2) шеттік есебінің шешімі* $[0,1]$ *кесіндісінде бар, жалғыз және (15) формуламен өрнектеледі, мұндағы* $Q_i(t,\varepsilon), i=1,2,3,$ $P(t,\varepsilon)$ *функциялары (16) формулалармен анықталады, ал* C_i, $i=1,2,3$ *– (17) жүйенің шешімі.*

Теорема 2 *Егер I-V шарттар орындалса, онда (1), (2) шеттік есебінің шешімі үшін келесі асимптотикалық бағалау орындалады:*

$$
\begin{aligned}
&|y(t,\varepsilon)| \le C(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|)+\\
&\quad + C\varepsilon e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}}(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|)+\\
&\quad + C e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|),\\
&|y'(t,\varepsilon)| \le C(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|)+\\
&\quad + C e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}}(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|)+\\
&\quad + \frac{C}{\varepsilon} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|),\\
&|y''(t,\varepsilon)| \le C(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|)+\\
&\quad + \frac{C}{\varepsilon} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}}(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|)+\\
&\quad + \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1} |H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1} |F(t)|).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

мұндағы $C > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1,2$ — ε – нан тәуелсіз тұрақтылар.

Теореманың дәлелдеуі (16) формуладан (6), (10) формулаларды ескеріп алынған $Q_i(t,\varepsilon)$, $i = 1,2,3$, $P(t,\varepsilon)$ функцияларының келесі

$$|Q_1^{(q)}(t,\varepsilon)| \le C + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon^q} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}, \ \ q = 0,1,2,$$

$$|Q_2^{(q)}(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}, \ \ q = 0,1,2,$$

$$|Q_3^{(q)}(t,\varepsilon)| \le C + \frac{C}{\varepsilon^q} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}, \ \ q = 0,1,2.$$

$$|P^{(q)}(t,\varepsilon)| \le \max_{0\le t\le 1} |F(t)| \left(C + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}} \right), \ \ q = 0,1,2.$$

бағалауларынан шығады.

Теоремадан $y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $y'(1,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $y''(1,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, $\varepsilon \to 0$ екендігі шығады. Бұдан $t = 0$ нүктесінде берілген есеп шешімінің бірінші ретті, ал $t = 1$ нүктесінде нөлінші ретті бастапқы секірістерінің бар екендігі алынады.

Список литературы

[1] *Касымов К.А., Жакипбекова Д.А., Нургабыл Д.Н.* Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия мат., мех., инф. – 2001. – №3. – С. 73-78.

[2] *Касымов К.А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Изд-во Санат, 1997. – 195 с.

[3] *Дауылбаев М.К.* Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. Учебное пособие. Алматы, 2009 г. Изд-во "Қазақ университеті – 190 с.

List of references

[1] *Kassymov K.A., Zhakipbekova D.A., Nurgabyl D.N.* Predstavlenie resheniya kraevoi zadachi dlya lineinogo differentsialnogo uravneniya s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh // Vestnik KazNU imeni al-Farabi, seriya mat., mech., inf. – 2001. –№3. – C. 73-78.

[2] *Kassymov K.A.* Singulyarno vozmucshennye kraevye zadachi s nachal'nymi skachkami. – Almaty: Izd-vo Sanat, 1997. – 195 s.

[3] *Dauylbayev M.K.* Lineinye integro-differetsialnye uravneniya s malym parametrom. Uchebnoe posobie. Almaty, 2009 g. Izd-vo "Kazakh universiteti" , – 190 s.

Поступила в редакцию 11 января 2013 года