УДК 517.948.34

С. Искандаров, Г.Т. Халилова

Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики, Кыргызско-Российская академия образования, г. Бишкек, Кыргызстан; e-mail: mrmacintosh@list.ru

ОЦЕНКИ СНИЗУ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Статья посвящена решению задачи об установлении достаточных условий, обеспечивающих оценки снизу и стремления к бесконечности решений линейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра. Для решения поставленной задачи развивается метод, основанный на идеях нестандартного сведения к системе, метода преобразования уравнений В. Вольтерра, метода срезывающих функций автора, метода интегральных неравенств Ю.А. Ведь, метода Лагранжа для интегрального представления решений линейного неоднородного ДУ первого порядка и метода оценки снизу решений Ю.А. Ведь. Отметим, что поставленная задача решается для решений рассматриваемого уравнения с начальными данными Коши из определенного начального многообразия. Заметим, что изучение оценок снизу решений интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков типа Вольтерра является одним из трудных вопросов асимптотической теории решений таких уравнений на полуоси. Нами же показана принципиальная возможность исследования этого вопроса.

Ключевые слова: {Интегро-дифференциальное уравнение, оценка снизу решений, стремление к бесконечности, неустойчивость, неосциллируемость.}

S. Iskandarov, G.T. Khalilova

THE lower estimations of solutions of linear VOLTERRA integral-differential equation of fourth order

The article is devoted to solving the problem of establishing the sufficient conditions for the lower estimations and tends to infinity of solutions of linear fourth order Volterra integral-differential equation. To solve the problem we develop a method based on the ideas of the method non-standard reduce to the system, the method Volterra for conversion of equations, the author's method of cutting functions, the Y.A. Ved's method of integral inequalities, the Lagrange method for the integral representation of solutions of linear non homogeneous first order differential equations and the Y.A. Ved's method for lower estimations of solutions. Note that the problem is solved for the solutions of the equation with the initial Cauchy data of a certain initial manifold. Note that the study of lower estimations for solutions of high order Volterra integro-differential equations is one of the difficult problems of the asymptotic theory of solutions of these equations on the half-axis. We have also demonstrated the fundamental possibility of studying this question.

Key words: {Integro-differential equation, the lower estimations of solutions, tends to infinity, the instability, nonoscillation.}

С. Искандаров, Г.Т. Халилова

ВОЛЬТЕРР типті төртінші ретті сызықты интегралды дифференциалдық теңдеу шешімін төменнен бағалау

Мақала Вольтерр типті төртінші ретті сызықты интегралды дифференциалдық теңдеу шешімін төменнен бағалауға мүмкіндік беретін және шексіздікке ұмтылуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарды табу есебін шешуге арналған. Қойылған есепті шешу үшін жүйеге стандартты емес келтіру идеяларына, Вольтерр теңдеуін түрлендіру әдісіне, автордың қию функциялары әдісіне, Ю.А. Ведьтің интегралдық теңсіздіктер әдісіне, бірінші ретті сызықты біртексіз дифференциалдық теңдеулер шешімінің интегралдық берілуінің Лагранж әдісіне және Ю.А. Ведьтің шешімді төменнен бағалау әдісіне негізделген әдіс қолданылады. Ескерте кететін жәйт, қойылған есепте қарастырылып отырған теңдеу белгілі бір бастапқы көпбейнеден алынған Коши бастапқы шарттарымен шешіледі. Вольтерр типті жоғарғы ретті интегралды дифференциалдық теңдеулер шешімінің төменнен бағалауын зерттеу мұндай теңдеулерді жарты осьте шешудің асимптотикалық теориясының қиын сұрақтарының бірі екенін ескертеміз. Біз бұл сұрақты зерттеудің мүмкіндігінің бар екенін көрсеттік.

Түйін сөздер: {Интегралды дифференциалдық теңдеу, шешімді төменнен бағалау, шексіздікке ұмтылу, орнықсыздық, осцилляцияланусыздық.}

Все фигурирующие в работе функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

Рассматривается следующая

Задача 1 *Установить достаточные условия, обеспечивающие оценки снизу и стремления к бесконечности при $t \to \infty$ решений линейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:*

$$\begin{gathered} x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + \\ + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau)]d\tau = f(t), \quad t \ge t_0. \end{gathered} \tag{1}$$

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^4(J, R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$. Каждое такое решение существует и единственно.

Насколько нам известно, сформулированная нами задача ранее никем не изучена. Эта задача имеет непосредственную связь с вопросом о неустойчивости (по Ляпунову) решений ИДУ вида (1) и некоторых систем ИДУ типа Вольтерра. Заметим, что достаточные условия неустойчивости решений систем линейных и нелинейных ИДУ типа Вольтерра установлены методом сравнения с решениями соответствующих невозмущенных систем линейных ДУ в работах М.И. Иманалиева и Ю.А. Ведь (см. например [1]); систем линейных ИДУ типа Вольтерра методом матричных весовых и срезывающих функций в [2].

Для решения поставленной задачи развивается метод работы [3], а именно метод, основанный на идеях нестандартного сведения к системе [4, 3], метода преобразования уравнений В. Вольтерра [5, с. 194-217], метода срезывающих функций [6, с. 41], метода интегральных неравенств [7], метода Лагранжа для интегрального представления решений линейного неоднородного ДУ первого порядка (см., например, [8, с. 391-394]) и метода оценки снизу решений (см., например, [9, 10]). Отметим, что поставленная задача решается для решений ИДУ (1) с начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ из определенного начального многообразия.

Согласно [4, 3] в ИДУ (1) осуществляем следующую замену:

$$x'(t) = \delta x(t) + W_1(t)y(t), \tag{2}$$

$$y'(t) + \lambda y(t) = W_2(t)z(t), \;\; y'(t) = -\lambda y(t) + W_2(t)z(t), \tag{3}$$

где $0 < \delta$, λ – некоторые вспомогательные параметры; $0 < W_k(t)$ $(k = 1, 2)$ – некоторые весовые функции; $y(t)$, $z(t)$ – новые неизвестные функции.

Из (2), (3) дифференцированием получаем:

$$\begin{gathered} x''(t) = \delta x'(t) + W_1'(t)y(t) + W_1(t)y'(t) = \delta[\delta x(t) + W_1(t)y(t)]+ \\ +W_1'(t)y(t) + W_1(t)[-\lambda y(t) + W_2(t)z(t)] = \delta^2 x(t) + W(t)y(t) + W_1(t)W_2(t)z(t), \end{gathered} \tag{4}$$

где $W(t) \equiv W_1'(t) - \lambda W_1(t) + \delta W_1(t)$;

$$\begin{gathered} x'''(t) = \delta^2 x'(t) + W'(t)y(t) + W(t)y'(t) + (W_1(t)W_2(t))'z(t)+ \\ +W_1(t)W_2(t)z'(t) = \delta^2[\delta x(t) + W_1(t)y(t)] + W'(t)y(t)+ \\ +W(t)[-\lambda y(t) + W_2(t)z(t)] + (W_1(t)W_2(t))'z(t) + W_1(t)W_2(t)z'(t) = \\ = \delta^3 x(t) + A_1(t)y(t) + A_2(t)z(t) + W_1(t)W_2(t)z'(t), \end{gathered} \tag{5}$$

где $A_1(t) \equiv W'(t) + \delta^2 W_1(t) - \lambda W(t)$, $A_2(t) \equiv (W_1(t)W_2(t))' + W(t)W_2(t)$;

$$\begin{gathered} x^{(4)}(t) = \delta^3 x'(t) + A_1'(t)y(t) + A_1(t)y'(t) + A_2'(t)z(t) + A_2(t)z'(t)+ \\ +(W_1(t)W_2(t))'z'(t) + W_1(t)W_2(t)z''(t) = \delta^3[\delta x(t) + W_1(t)y(t)]+ \\ +A_1'(t)y(t) + A_1(t)[-\lambda y(t) + W_2(t)z(t)] + A_2'(t)z(t) + A_2(t)z'(t) + (W_1(t)W_2(t))'z'(t)+ \\ +W_1(t)W_2(t)z''(t)) = \delta^4 x(t) + A_3(t)y(t) + A_4(t)z(t) + A_5(t)z'(t) + W_1(t)W_2(t)z''(t), \end{gathered} \tag{6}$$

где $A_3(t) \equiv A_1'(t) - \lambda A_1(t) + \delta^3 W_1(t)$, $A_4(t) \equiv A_2'(t) + A_1(t)W_2(t)$, $A_5(t) \equiv (W_1(t)W_2(t))' + A_2(t)$.

Подставляя (2)-(6) в ИДУ (1), имеем:

$$\begin{gathered} \delta^4 x(t) + A_3(t)y(t) + A_4(t)z(t) + A_5(t)z'(t) + W_1(t)W_2(t)z''(t)+ \\ +a_3(t)[\delta^3 x(t) + A_1(t)y(t) + A_2(t)z(t) + W_1(t)W_2(t)z'(t)]+ \\ +a_2(t)[\delta^2 x(t) + W(t)y(t) + W_1(t)W_2(t)z(t)] + a_1(t)[\delta x(t) + W_1(t)y(t)]+ \\ +a_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \{Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)[\delta x(\tau) + W_1(\tau)y(\tau)]+ \\ +Q_2(t,\tau)[\delta^2 x(\tau) + W(\tau)y(\tau) + W_1(\tau)W_2(\tau)z(\tau)] + Q_3(t,\tau)[\delta^3 x(\tau)+ \\ +A_1(\tau)y(\tau) + A_2(\tau)z(\tau) + W_1(\tau)W_2(\tau)z'(\tau)]\}d\tau = f(t), \quad t \geq t_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Введем следующие обозначения:

$b_3(t) \equiv a_3(t) + A_5(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1}$(коэффициент $z'(t)$),
$b_2(t) \equiv a_2(t) + [a_3(t)A_2(t) + A_4(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1}$(коэффициент $z(t)$),
$b_1(t) \equiv a_1(t)(W_2(t))^{-1} + [a_2(t)W(t) + a_3(t)A_1(t) + A_3(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1}$(коэффициент $y(t)$),
$b_0(t) \equiv [a_0(t) + \delta a_1(t) + \delta^2 a_2(t) + \delta^3 a_3(t) + \delta^4](W_1(t)W_2(t))^{-1}$(коэффициент $x(t)$),
$P_0(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) + \delta Q_1(t,\tau) + \delta^2 Q_2(t,\tau) + \delta^3 Q_3(t,\tau)]$(ядро с $x(\tau)$),
$P_1(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)W_1(\tau) + Q_2(t,\tau)W(\tau) + Q_3(t,\tau)A_1(\tau)]$(ядро с $y(\tau)$),
$P_2(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau) + Q_3(t,\tau)A_2(\tau)]$(ядро с $z(\tau)$),
$K(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}Q_3(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)$(ядро с $z'(\tau)$),
$F(t) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}f(t)$(новый свободный член).

Деля обе части (7) на $W_1(t)W_2(t)$ и учитывая введенные обозначения, получаем ИДУ второго порядка типа Вольтерра для новой неизвестной функции $z(t)$. Объединяя это ИДУ для $z(t)$ с заменами (2), (3), т.е. с ДУ первого порядка (2), (3), для ИДУ четвертого порядка (1) будем иметь следующую эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x'(t) = \delta x(t) + W_1(t)y(t), \\ y'(t) + \lambda y(t) = W_2(t)z(t), \\ z''(t) + b_3(t)z'(t) + b_2(t)z(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) + P_2(t,\tau)z(\tau) + K(t,\tau)z'(\tau)]d\tau = F(t), \quad t \geq t_0. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть [6]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ – некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \; E_i(t) \equiv F_i(t)\,(\psi_i(t))^{-1} \quad (i = 1...n),$$

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1...n), \tag{R}$$

$c_i(t)$ $(i = 1...n)$ – некоторые функции.

К системе (8) применяем метод преобразования уравнений В. Вольтерра [5, с. 194-217] и метод срезывающих функций [6, с. 41].

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t), z(t))$ аналогично [5, с. 194-217] первое уравнение системы (8) умножаем на $x(t)$, второе – на $y(t)$, а третье – на $z'(t)$, полученные соотношения сложим, затем интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом аналогично [6] вводим условия (K), (F), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$, условие (R), функции $E_i(t)$, $c_i(t)$, используем леммы 1.4, 1.5 [11]. В результате получаем следующее тождество:

$$
\begin{aligned}
&(x(t))^2+(y(t))^2+2\lambda\int\limits_{t_0}^{t}(y(s))^2ds+(z'(t))^2+2\int\limits_{t_0}^{t}b_3(s)(z'(s))^2ds+b_2(t)(z(t))^2+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2+B_i(t)(Z_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Z_i(t,t_0)+c_i(t)-\\
&-\int\limits_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Z_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+\int\limits_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)\,(Z_i(t,\tau))^2\,d\tau\}\equiv\\
&\equiv c_*+2\delta\int\limits_{t_0}^{t}(x(s))^2ds+2\int\limits_{t_0}^{t}[W_1(s)x(s)+W_2(s)z(s)]y(s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}b_2'(s)(z(s))^2ds+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t}[A_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2+\int\limits_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Z_i(s,\tau))^2d\tau]ds-\\
&-2\int\limits_{t_0}^{t}z'(s)\{F_0(s)+b_1(s)y(s)+b_0(s)x(s)+\int\limits_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+\\
&+P_2(t,\tau)z(\tau)+K_0(s,\tau)z'(\tau)]d\tau\}ds,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
Z_i(t,\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)z'(\eta)d\eta\quad i=1...n),\quad c_*=(x(t_0))^2+(y(t_0))^2+(z'(t_0))^2+
$$

$$
+b_2(t_0)(z(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).
$$

Из тождества (9), переходя к интегральному неравенству, аналогично теореме 1 [13] устанавливается

Теорема 1 *Пусть 1)* $\delta>0$, $\lambda>0$, $W_k(t)>0$ $(k=1,2)$, *выполняются условия* (K), (F), (R); *2)* $b_3(t)\geq 0$; *3)* $b_2(t)>0$, *существует функция* $b_2^*(t)\geq 0$ *такая, что* $b_2'(t)\leq b_2^*(t)b_2(t)$; *4)*$A_i(t)\geq 0$, $B_i(t)\geq 0$, $B_i'(t)\leq 0$, $R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0$, *существуют функции* $A_i^*(t)\geq 0$, $c_i(t)$, $R_i^*(t)\geq 0$ *такие, что* $A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t)$, $(E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$, $R_{it\tau}''(t,\tau)\leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$ $(i=1...n;\ k=0,1)$. *Тогда для любого решения* $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ *системы (8) справедливы следующие оценки:*

$$
\begin{aligned}
&(x(t))^2+(y(t))^2+\lambda\int\limits_{t_0}^{t}(y(s))^2ds+(z'(t))^2+\int\limits_{t_0}^{t}b_3(s)(z'(s))^2ds+\\
&+b_2(t)(z(t))^2+\sum_{i=1}^{n}[A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2+\int\limits_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)\,(Z_i(t,\tau))^2\,d\tau]\leq\{\sqrt{c_*}+\\
&+\int\limits_{t_0}^{t}|F_0(s)|\exp(-\delta s+\delta t_0-\int\limits_{t_0}^{s}G(\tau)d\tau)ds\}^2\exp\{2\delta t-2\delta t_0+2\int\limits_{t_0}^{t}G(s)ds\},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$|y(t)| \le [\sqrt{c_*} + \int\limits_{t_0}^{t} |F_0(s)| \exp(-\delta s + \delta t_0 - \int\limits_{t_0}^{s} G(\tau)d\tau)ds] \exp(\delta t - \delta t_0 + \int\limits_{t_0}^{t} G(s)ds), \quad (11)$$

где

$$G(t) \equiv W_1(t) + W_2(t) + \frac{1}{2}b_2^*(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i^*(t) + R_i^*(t)] +$$

$$+|b_1(t)| + |b_0(t)| + \int\limits_{t_0}^{t}[|P_0(t,\tau)| + |P_1(t,\tau)| + |P_2(t,\tau)|(b_2(\tau))^{-\frac{1}{2}} + |K_0(t,\tau)|]d\tau.$$

Замечание 1 *Из (10) вытекает такая же оценка, как (10) для каждого из:*

$$(x(t))^2, \quad \lambda \int\limits_{t_0}^{t}(y(s))^2 ds, \ (z'(t))^2, \ \int\limits_{t_0}^{t} b_3(s)(z'(s))^2 ds, \quad b_2(t)(z(t))^2,$$

$$A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 \le \sum_{i=1}^{n} A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 \ \ (i = 1...n), \ \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)\,(Z_i(t,\tau))^2\, d\tau.$$

Далее будем заниматься оценкой снизу решений $x(t)$ ИДУ (1).

Из ДУ (2) методом Лагранжа [8, с. 391-394] имеем следующее интегральное представление для $x(t)$:

$$x(t) = e^{\delta(t-t_0)}[x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)} W_1(s)y(s)ds]. \quad (12)$$

Отсюда аналогично [9, 10] получаем оценку снизу для $|x(t)|$:

$$|x(t)| \ge e^{\delta(t-t_0)}[|x(t_0)| - \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)} W_1(s)|y(s)|ds]. \quad (13)$$

С учетом оценки (11) из (13) имеем оценку:

$$\begin{aligned} |x(t)| \ge e^{\delta(t-t_0)}[|x(t_0)| - \int\limits_{t_0}^{t} W_1(s)\exp(\int_{t_0}^{s} G(\tau)d\tau)\{\sqrt{c_*} + \\ + \int\limits_{t_0}^{s} |F_0(\tau)| \exp(-\delta\tau + \delta t_0 - \int\limits_{t_0}^{\tau} G(\eta)d\eta)d\tau\}ds]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) непосредственно следует

Теорема 2 *Пусть 1) выполняются все условия теоремы 1;*

$$
\begin{aligned}
&2)\ M(x(t_0), x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)) \equiv |x(t_0)| - \int\limits_{t_0}^{\infty} W_1(s)\exp(\int_{t_0}^{s} G(\tau)d\tau)\{\sqrt{c_*}+ \\
&+\int\limits_{t_0}^{s} |F_0(\tau)|\exp(-\delta\tau+\delta t_0 - \int\limits_{t_0}^{\tau} G(\eta)d\eta)d\tau\}ds > 0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) с начальными данными из многообразия (15) справедлива следующая оценка снизу:

$$
|x(t)| \geq e^{\delta(t-t_0)} M(x(t_0), x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)). \tag{16}
$$

Из теоремы 2, т.е. из оценки (16) вытекает

Следствие 1 *Если выполняются все условия теоремы 2, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) с начальными данными из многообразия (15) имеет место утверждение:*

$$
\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty.
$$

Замечание 2 *Из теорем 1, 2 и следствия можно получить решение выше поставленной задачи и для соответствующего ДУ (в ИДУ (1) $Q_k(t,\tau) \equiv 0\ \ (k = 0,1,2,3)$):*

$$
x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t),\ \ t \geq t_0. \tag{1_0}
$$

Насколько нам известно и такая задача для (1_0) тоже никем ранее не решена.

Замечание 3 *С учетом соотношений:*

$$
c_* = (x(t_0))^2 + (y(t_0))^2 + (z'(t_0))^2 + b_2(t_0)(z(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0),
$$

$$
x'(t_0) = \delta x(t_0) + W_1(t_0)y(t_0),\ \ y'(t_0) + \lambda y(t_0) = W_2(t_0)z(t_0),
$$
$$
x''(t_0) = \delta^2 x(t_0) + W(t_0)y(t_0) + W_1(t_0)W_2(t_0)z(t_0),
$$
$$
x'''(t_0) = \delta^3 x(t_0) + A_1(t_0)y(t_0) + A_2(t_0)z(t_0) + W_1(t_0)W_2(t_0)z'(t_0)
$$

определяется многообразие начальных данных (15), т.е.

$$
M(x(t_0), x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)) > 0.
$$

Таким образом, доказано, что любое решение $x(t)$ ИДУ (1) с начальными данными из многообразия (15) стремится к бесконечности при $t \to \infty$, значит, неустойчиво по Ляпунову. Следует добавить, что такие решения $x(t)$ ИДУ (1) не имеют нулей на полуинтервале J, т.е. не осциллируют. Заметим также, что ИДУ (1) с начальными данными из многообразия (15) не имеют особенных точек [12, с. 27].

В заключение отметим, что изучение оценок снизу решений ИДУ высоких порядков типа Вольтерра является одним из трудных вопросов асимптотической теории решений таких уравнений на полуоси. Нами же показана принципиальная возможность исследования этого вопроса.

Список литературы

[1] Иманалиев М.И., Ведь Ю.А. Интегральные возмущения в теории устойчивости систем дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим. – 1973. – Вып. 9. – С. 3-67.

[2] Искандаров С. Об оценке снизу решений систем линейных вольтерровых интегро-дифференциальных и интегральных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим. – 1999. – Вып. 28. – С. 85-91.

[3] Искандаров С., Халилова Г.Т. Оценки снизу решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ. – 2011. – Спец. вып. – С. 61-65.

[4] Искандаров С. Метод нестандартного сведения к системе и экспоненциальная устойчивость линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, – №6. – С. 898-899. (О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете).

[5] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр. // О. Н. Бондаренко / Под ред. Ю. М. Свирежева. – М.: Наука, 1976. – 288 с.

[6] Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим. – 2002. – 216 с.

[7] Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим. – 1973. – Вып. 9. – С. 68-103.

[8] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.

[9] Ведь Ю.А. Достаточные признаки отсутствия особенных точек у интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим. – 1965. – Вып. 3. – С. 123-135.

[10] Китаева Л.Н. О наличии невертикальных асимптот у решений дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим. – 1965. – Вып. 3. - С. 213-222.

[11] Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек. – 2003. – 34 с.

[12] Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 328 с.

[13] Искандаров С., Халилова Г.Т. Об оценке снизу решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим. – 2010. – Вып. 42. – С. 29-34.

List of references

[1] Imanaliev M.I., Ved' Yu.A. Integral'nye vozmuscheniya v teorii ustoichivosti system differentsial'nyh uravnenii // Issled. po integro-differents. uravneniyam v Kirgizii. – Frunze: Ilim. – 1973. – Vyp. 9. – S. 3-67.

[2] Iskandarov S. Ob otsenke snizu reshenii system lineinyh vol'terovskih integro-differentsial'nyh i integral'nyh uravnenii // Issled. po integro-differents. uravneniyam. – Bishkek: Ilim. – 1999. – Vyp. 28. – S. 85-91.

[3] Iskandarov S., Halilova G.T. Otsenki snizu reshenii lineinogo vol'terrova integro-differentsial'nogo uravneniya tret'ego poryadka // Vestnik KNU im. ZH. Balasagyna. – Bishkek: KNU. – 2011. – Spets. vyp. – S. 61-65.

[4] Iskandarov S. Metod nestandartnogo svedeniya k sisteme i eksponentsial'naya ustoichivost' lineinogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya tret'ego poryadka // Differents. uravneniya. – 2010. – T. 46, – №6. – S. 898-899. (O seminare po kachestvennoi teorii differentsial'nyh uravnenii v Moskovskom universitete).

[5] Vol'terra V. Matematicheskaya teoriya bor'by za suschestvovanie: Per. s fr. // O. N. Bondarenko / Pod red. YU. M. Svirezheva. – M.: Nauka, 1976. – 288 s.

[6] Iskandarov S. Metod vesovyh i srezyvayuschih funktsii i asimptoticheskie svoistva reshenii integro-differentsial'nyh i integral'nyh uravnenii tipa Vol'terra. – Bishkek: Ilim. – 2002. – 216 s.

[7] Ved' YU.A., Pahyrov Z. Dostatochnye priznaki ogranichennosti reshenii lineinyh integro-differentsial'nyh uravnenii // Issled. po integro-differents. uravneniyam v Kirgizii. – Frunze: Ilim. – 1973.– Vyp. 9. – S. 68-103.

[8] Matveev N.M. Metody integrirovaniya obyknovennyh differentsial'nyh uravnenii. – M.: Vysshaya shkola, 1967. – 564 s.

[9] Ved' YU.A. Dostatochnye priznaki otsutstviya osobennyh tochek u integro-differentsial'nyh uravnenii // Issled. po integro-differents. uravneniyam v Kirgizii. – Frunze: Ilim. – 1965. – Vyp. 3. – S. 123-135.

[10] Kitaeva L.N. O nalichii nevertikal'nyh asimptot u reshenii differentsial'nyh uravnenii vtorogo poryadka s zapazdyvayuschim argumentom // Issled. po integro-differents. uravneniyam v Kirgizii. – Frunze: Ilim. – 1965. – Vyp. 3. – S. 213-222.

[11] Iskandarov S. Metod vesovyh i srezyvayuschih funktsii i asimptoticheskie svoistva reshenii uravnenii tipa Vol'terra: Avtoref. dis dokt. fiz.-mat. nauk: 01.01.02. – Bishkek. – 2003. – 34 s.

[12] Bykov YA.V. O nekotoryh zadachah teorii integro-differentsial'nyh uravnenii. – Frunze: Kirgiz. gos. un-t, 1957. – 328 s.

[13] Iskandarov S., Halilova G.T. Ob otsenke snizu reshenii lineinogo vol'terrova integro-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka // Issled. po integro-differents. uravneniyam. – Bishkek: Ilim. – 2010. – Vyp. 42. – C. 29-34.

Поступила в редакцию 10 января 2013 года