УДК 517.956

С.Е. Темирболат[1], Г.М. Хушнизаров[2]

Механико - математический факультет,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби[1,2], Алматы, Казахстан.
E-mail: s.temirbolat@mail.ru[1], galymzhan_ mm@mail.ru[2]

Об эллиптичности P_2 - приближения для стационарного уравнения односкоростного переноса *

Рассматривается P_2 - приближение систем бесконечных дифференциальных уравнений, которые получаются при использовании метода сферических гармоник в стационарных кинетических уравнениях односкоростного переноса. В работе У.М. Султангазина и других "Математические проблемы кинетической теории переноса" утверждается, что стационарные уравнения односкоростного переноса суть эллиптические, но не дано доказательства утверждения, окончательного вида эллиптической системы. В нестационарном случае система является симметрической гиперболической по Фридриксу и, как известно, когда идет процесс становления по времени, т.е. когда нестационарное явления переходит к стационарному варианту, соответствующий оператор будет эллиптическим. Названная система после простого исключения матрицы с производными по времени не эллиптична (форма неопределена), кроме того, оставшиеся матрицы (с производными по пространственным переменным) вырожденные. Поэтому ниже производим анализ систем (P_2 - приближений) с целью устоновления их эллиптичности в русле системы первого порядка с невырожденными матрицами.

Ключевые слова: стационарное уравнение односкоростного переноса, P_2 - приближение, эллиптические системы, вырожденные матрицы, сферическая функция, системы Мойсила – Теодереску, форма системы.

S.E. Temirbolat, G.M. Khushnizarov

About ellipticity P_2 - approximation for the stationary equation of a one - speed transfer

It is considered the P_2 - approaching of infinite systems of differential equations, which is obtained by using the spherical harmonics method in stationary kinetic equations of one - speed transfer. In "Mathematical problems of the kinetic theory of transference"the work of U.M. Sultangazin and others it is asserted that stationary equations of one - speed transfer are elliptic, but no proof of the final form of the elliptic system is given. In the non stationary case the system is symmetric hyperbolic by Fredricks, and one can see that becoming process by time, i.e. a process when transient phenomenon becomes stationary, the corresponding operator is elliptic. The above mentioned system is not elliptic after the exclusion of the matrix with time derivatives (form is unknown), the remaining matrices (with derivatives

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0720/ГФ, 2012г.-2014г.

by space variables) are degenerated. Therefore, we will do the following analysis of these systems (P_2 - approximation) to establish their ellipticity in line with first - order system of non-degenerated matrices.

Key words: {stationary equations of a one - speed transfer, P_2 - approximation, elliptic systems, singular matrices, spherical function, system Mouisil - Teoderesku, form of the system}

С.Е. Темирболат, Г.М. Хушнизаров

Стационар біржылдамдықты тасымал теңдеуіндегі P_2 – жуықтауының эллиптикалығы туралы

Біртекті стационар біржылдамдықты кинетикалық тасымал теңдеуіне сфералық гармоника әдісін қолданғанда алынған шектеусіз дифференциалдық теңдеулер жүйесінің P_2 - жуықтауы зерттеледі. У.М. Султангазин және басқалары "Математические проблемы кинетической теории переноса" атты жұмыста стационар біржылдамдықты тасымал теңдеуінің эллиптикалық екені айтылады, бірақ бұл тұжырым негізделмейді және эллиптикалық жүйенің нақты түрі көрсетілмейді. Стационар емес жағдайда жүйе Фридрикс бойынша симметриялы гиперболалық болып, уақытқа байланысты стационар емес жағдайдан стационар жағдайға өту үрдісі орын алғанда сәйкес оператор эллиптикалық болады. Аталған жүйе уақыт бойынша туындылы матрицаларға қарапайым өзгертулерден кейін эллиптикалық болмайды (тұлғасы анықталмаған) сонымен қатар, қалған матрицалар ерекшеленген (тұлғасы нөлдік). Сол себепті төменде жүйе (P_2 – жуықтау) типін эллиптикалық ету мақсатында бірінші ретті ерекше емес матрицалы жүйені негізге ала отырып талдау жасаймыз.

Түйін сөздер: {стационар біржылдамдықты тасымал теңдеуі, P_2 - жуықтау, эллиптикалық жүйе, ерекшеленген матрица, сфералық матрица, Мойсил - Теодереску жүйесі, жүйе формасы}

Цель исследования. Показать, что P_2 – приближение метода сферических гармоник описывается эллиптической системой первого порядка с вещественными невырожденными матрицами.

Рассмотрим стационарное односкоростное кинетическое уравнение переноса [1]

$$\omega\nabla u + \sigma u = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{\Omega} g(\omega,\omega')u(x,\omega')d\omega' \qquad (1)$$

в выпуклой области G с границией Г. Пусть G состоит из конечного числа подобластей G_i границией ∂G_i и в каждой из них функции $\sigma(x), \sigma_s(x)$ являются достаточно гладкими. Здесь $u(x,\omega)$ есть плотность излучений, распространяющееся со скоростью $\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ в точке $x = (x_1,x_2,x_3)$; $\sigma = \sigma(x)$, $\sigma_s = \sigma_s(x)$ – макроскопические сечения, характеризующие свойства среды; $\dfrac{1}{4\pi}g(\omega,\omega')$ – индикатриса рассеяния; Ω – единичная сфера, причем $\omega \in \Omega$.

Пусть дана система первого порядка

$$u_x + \sum_{k=1}^{n} B_k u_{y_k} = 0 \qquad (2)$$

с вещественными матрицами $B_k = (b^k_{s_j})$, $s, j = \overline{1, N}, k = \overline{1, n}$. Она эллиптична, если:

1) количество уравнений четное $N = 2m$;

2) для всякой вещественной пары: скаляра "c" и вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ форма знакоопределена

$$P(c, \xi) = det\|\alpha + cI\|, \tag{3}$$

где матрица

$$\alpha = \|\sum_{k=1}^{n} \xi_k B_k\| = \alpha_{i_j}, \quad i, j = \overline{1, N};$$

3) уравнение

$$det\|\alpha + cI\| = 0 \tag{4}$$

имеет комплексно - сопряженные корни

$$c_j = \alpha_j \pm i\beta_j, \quad \beta_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{5}$$

Тем самым, эллиптичность характеризуется двумя признаками: символическим (3) и корневым (5).

Системы уравнений P_2 – приближения сферическими гармониками для уравнения (1) состоящего из 9 уравнений имеет вид (см. вывод в [1])

$$A_1 U_x + A_2 U_y + A_3 U_z + \sigma BU = 0, \tag{6}$$

где вектор U в книжных обозначениях имеет вид

$$U = (\varphi^0_0, \varphi^0_1, \varphi^0_2, \varphi^1_1, \varphi^1_2, \psi^1_1, \psi^1_2, \varphi^2_2, \psi^2_2).$$

Мы для упрощения записи и анализа переобозначим их $\varphi^0_j = u^j$, $j = \overline{0, 2}$ и $\varphi^1_i = v^i$, $\psi^1_i = w^i$, $i = 1, 2$ и $\varphi^2_2 = s^2$, $\psi^2_2 = p^2$.

Теперь покажем, что тип P_2 – приближение будет эллиптическим несмотрия на нечетность уравнений в системе. Для этого предлагаем специальные методы [2].

Напишем систему P_2 – приближений в новых обозначениях

$$v^1_x + w^1_y + u^1_z + \sigma u^0 = 0,$$

$$v^2_x + w^2_y + (u^0 - u^2)_z + 3u^2_z + 3\sigma u^1 = 0,$$

$$-v^1_x - w^1_y + 2u^1_z + 5\sigma u^2 = 0,$$

$$(u^0 - u^2)_x + \frac{1}{2}(s^2_x + p^2_y) + v^2_x + 3\sigma v^1 = 0,$$

$$u^1_x + v^1_z + \frac{5}{3}\sigma v^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}p^2_x + (u^0 - u^2)_y - \frac{1}{2}s^2_y + w^2_z + 3\sigma w^1 = 0,$$

$$u^1_y + w^1_z + \frac{5}{3}\sigma w^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}(v_x^1 - w_y^1) + \frac{5}{12}\sigma s^2 = 0,$$
$$\frac{1}{2}(w_x^1 + v_y^1) + \frac{5}{12}\sigma p^2 = 0.$$

Для анализа предлагаем два подхода:

1. Разрежение – исключаются из исходной системы уравнения и компоненты без ∂_x;

2. Повышение порядка – сведение к уравнениям высокого порядка.

Проделаем подготовительные расчеты. Выделим следующие три уравнения

$$v_x^1 + u_z^1 + w_y^1 + \sigma u^0 = 0, \ \ -v_x^1 - w_y^1 + 2u_z^1 + 5\sigma u^2 = 0,$$

$$v_x^1 - w_y^1 + \frac{5}{6}\sigma s^2 = 0.$$

Из них легко придти к таким уравнениям

$$v_x^1 + w_y^1 + u_z^1 + \sigma u^0 = 0, \ \ 3u_z^1 + \sigma u^0 + 5\sigma u^2 = 0,$$

$$2w_y^1 + u_z^1 + \sigma u^0 = \frac{5}{6}\sigma s^2.$$

Далее проделав элементарные преобразования, систему разобьем на два блока: один с производными ∂_x (6 уравнения):

$$\begin{cases} v_x^1 + u_z^1 + w_y^1 + \sigma u^0 = 0, \\ v_x^2 - 2(u^0 - u^2)_z + 3u_z^0 + w_y^2 + 3\sigma u^1 = 0, \\ (u^0 - u^2)_x + \dfrac{1}{2}(s_x^2 + p_y^2) + v_z^2 + 3\sigma v^1 = 0, \\ u_x^1 + v_z^1 + \dfrac{5}{3}\sigma v^2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}p_x^2 + (u^0 - u^2)_y + w_x^2 - \dfrac{1}{2}s_y^2 + 3\sigma w^1 = 0, \\ w_x^1 + v_y^1 + \dfrac{5}{6}\sigma p^2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

а другой без них (3 уравнения)

$$\begin{cases} u_y^1 + w_z^1 + \dfrac{5}{3}\sigma w^2 = 0, \\ 3u_z^1 + \sigma u^0 + 5\sigma u^2 = 0, \\ 2w_y^1 + u_z^1 + \sigma u^0 = \dfrac{5}{6}\sigma s^2 \end{cases} \tag{8}$$

Теперь приступаем к анализу.

1. Разрежение системы. Исключив блок (8) и компоненты (u^0, u^1, w^2) из (7) , имеем систему из 6 уравнений

$$A_1 U_x + A_2 U_y + A_3 U_z + \sigma B U = 0, \tag{9}$$

где $B = diag(1; 3; 5; \frac{5}{3}; 6; \frac{5}{6})$.

Вычислим форму полученной системы

$$P(c,\xi,\eta) = det|cA_1 + \xi A_2 + \eta A_3| =$$

$$= c^2\xi\eta(c^2+\xi^2) - c^4(c^2+\xi^2) + c^2\xi\eta(c^2+\xi^2) = c^2(c^2+\xi^2)(2\xi\eta - c^2) = 0.$$

Форма имеет вещественные "c - корни",следовательно, система не эллиптична.

2. Сведение к уравнениям второго порядка. Из (8) найдем компоненты

$$w^2 = -\frac{3}{5\sigma}(u^1_y + w^1_z),\ \ u^0 - u^2 = \frac{3}{5\sigma}(u^1_z + 2\sigma u^0),\ \ s^2 = \frac{6}{5\sigma}(2w^1_y + u^1_z + \sigma u^0),$$

подставляем их в (7), а именно, во второе, в третье и в пятое уравнения, тогда система для $U_1 = (u^0, u^1, v^1, v^2, w^1, p^2)$ принимает вид

$$\begin{cases} v^1_x + u^1_z + w^1_y + \sigma u^0 = 0, \\ u^1_x + v^1_z + \dfrac{5}{3}\sigma v^2 = 0, \\ w^1_x + v^1_y + \dfrac{5}{6}\sigma p^2 = 0, \\ \dfrac{9}{5}u^0_x + \dfrac{1}{2}p^2_y + v^2_z + \dfrac{6}{5\sigma}(w^1_{xy} + u^1_{xz}) + 3\sigma v^1 = 0, \\ v^2_x + \dfrac{3}{5}u^0_z - \dfrac{3}{5\sigma}(u^1_{yy} + 2u^1_{zz} + w^1_{yz}) + 3\sigma u^1 = 0, \\ \dfrac{1}{2}p^2_x + \dfrac{3}{5}u^0_y - \dfrac{3}{5\sigma}(u^1_{yz} + 2w^1_{yy} + w^1_{zz}) + 3\sigma w^1 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Определим из уравнений первого порядка следующие компоненты

$$u^0 = -\frac{1}{\sigma}(v^1_x + w^1_y + u^1_z),\ \ v^2 = -\frac{3}{5\sigma}(u^1_x + v^1_z),\ \ p^2 = -\frac{5}{6\sigma}(w^1_x + v^1_y) \tag{11}$$

подставим их в оставшиеся уравнения, тогда относительно вектора $(u,v,w) = (u^1, v^1, w^1)$ получим систему второго порядка

$$\begin{cases} \triangle\, u + 2u_{zz} + 2v_{xz} + 2w_{yz} = 5\sigma^2 u, \\ 2u_{xz} + \triangle\, v + 2v_{xx} + 2w_{yz} = 5\sigma^2 v, \\ 2u_{yz} + v_{xy} + \triangle\, w + 2w_{yy} = 5\sigma^2 w. \end{cases} \tag{12}$$

Введя обозначение $R = c^2 + \xi^2 + \eta^2$, вычислим форму системы

$$P(c,\xi,\eta) = \begin{vmatrix} R+2\eta^2 & 2c\eta & 2\xi\eta \\ 2c\eta & R+2c^2 & 2c\xi \\ 2\xi\eta & 2c\xi & R+2\xi^2 \end{vmatrix} = R^3 + 2R^2(c^2+\xi^2+\eta^2) = 3R^3 > 0.$$

Форма положительно определена, значит система (12) эллиптическая. Остается обратно свести ее к уравнениям первого порядка.

Преобразуем систему (12):

$$\triangle\, u + 2\partial_z(u_z + v_x + w_y) = 5\sigma^2 u, \triangle\, v + 2\partial_x(u_z + v_x + w_y) = 5\sigma^2 v,$$

$$\triangle\, w + 2\partial_y(u_z + v_x + w_y) = 5\sigma^2 w,$$

далее в силу уравнения $u_z^1 + v_x^1 + w_y^1 = -\sigma u^0$ получаем

$$\triangle\, u - 2\sigma u_z^0 = 5\sigma^2 u, \;\; \triangle\, v - 2\sigma u_x^0 = 5\sigma^2 v, \;\; \triangle\, w - 2\sigma u_y^0 = 5\sigma^2 w. \tag{13}$$

Теперь присутствующие уравнения Лапласа заменим на системы Мойсила – Теодереску соответственно с компонентами $(u^0, u^1, u^2, \omega^0), (v^1, v^2, w^1, \omega^1)$ и $(w^2, s^2, p^2, \omega^2)$.

В однородном варианте первое уравнение приводится к системе

$$u_x^0 + u_y^1 + u_z^2 - 2\sigma u_x^0 = 0, \;\; u_x^1 - u_y^0 + \omega_z^0 = 0, \;\; u_x^2 - \omega_y^0 - u_z^0 = 0, \;\; \omega_x^0 + u_y^2 - u_z^1 = 0.$$

Сделав подстановку $u^2 - 2\sigma u^0 = u$, имеем

$$u_x^0 + u_y^1 + u_z = 0, \;\; u_x^1 - u_y^0 + \omega_z^0 = 0, \;\; u_x - \omega_y^0 - u_z^0 = 0, \;\; \omega_x^0 + u_y^2 - u_z^1 = 0.$$

Поступаем аналогично и с другими уравнениями

$$v_x + v_y^2 + w_z^1 = 0, \;\; v_x^2 - v_y + \omega_z^1 = 0, \;\; w_x^1 - \omega_y^1 + w_y^1 - v_z^2 = 0,$$

где $v^1 - 2\sigma u^0 = v$,

$$w_x^2 + w_y + p_z^2 = 0, \;\; w_x - w_y^2 + \omega_z^2 = 0, \;\; p_x^2 - \omega_y^2 - w_z^2 = 0, \;\; \omega_x^2 + p_y^2 - w_z = 0,$$

здесь $s^2 - 2\sigma u^0 = w$.

Напишем полученную систему в виде

$$U_x + AU_y + BU_z = 0 \tag{14}$$

здесь вектор $U = (u^0, u^1, u, \omega^0; v, v^2, w^1; \omega^1, w^2, w, p^2, \omega^2)$, кососимметричные блочные матрицы A, B такие

$$A = diag(C, C, C), \;\; B = diag(D, D, D),$$

где в свою очередь

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & 0 & -1 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \;\; D = \begin{bmatrix} & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{bmatrix}.$$

Вычислим форму

$$P(c, \xi, \eta) = |cI + \xi A + \eta B| = |diag(\widetilde{D}, \widetilde{D}, \widetilde{D})| = |\widetilde{D}|^3 = R^6,$$

так как

$$|\widetilde{D}| = \begin{vmatrix} c & \xi & \eta & 0 \\ -\xi & c & 0 & \eta \\ -\eta & 0 & c & -\xi \\ 0 & -\eta & \xi & c \end{vmatrix} = R^2, R = c^2 + \xi^2 + \eta^2.$$

Следовательно, $c = \pm ir, r^2 = \xi^2 + \eta^2$ (шестикратные мнимые корни).

Замечание. Как видно, количество уравнений и компонент увеличилось до двенадцати, но три компонента $(\omega^0, \omega^1, \omega^2)$ – фиктивные, введенные ради сохранения эллипточности каждого блока. Тогда фактически остаются 9 реальных компонент исходной системы.

Заключение. Система P_2 - приближений сводится к системе (14) которая является эллиптической с невырожденными (блочными) матрицами A, B.

Список литературы

[1] Султангазин У.М., Смелов В.В., Акишев А.Ш., Сакабеков А., Марек И., Мика С., Житны К. Математические проблемы кинетической теории переноса. – Алма - Ата: Наука, 1986. – 255 с.

[2] Темирболат С. Е. Новая методика исследования некорректных краевых задач. – Алматы: Қазақ университетi, 2009. – 62 с.

List of references

[1] Sultangazin U.M., Smelov B.B., Akishev A.SH., Sakabekov A., Marek I., Mika S., Zhitny K. Matematicheskie problemy kineticheskoi teorii perenosa. – Alma - Ata: Nauka, 1986. – 255 s.

[2] Temirbolat S.E. Novaiya metodika issledovaniya nekorrektnykh kraevykh zadach. – Almaty: Kazakh universiteti, 2009. – 62 s.

Поступила в редакцию 10 января 2013 года