УДК 519.6+517.9

Г.М. Даирбаева, Л.Н. Темирбекова

Механико-математический факультет, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: Laura-Nurlan@mail.ru

Численный аналог метода Гельфанда-Левитана на конечном интервале

Рассматривается разностная задача на собственные значения для оператора Штурма - Лиувилля. Определяются численно спектральные данные оператора и вспомогательная функция. Для нахождения численных значении ядра оператора Штурма - Лиувилля решается интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
Ключевые слова: Собственные значения, операторы,спектральные данные, ядро оператора Штурма-Лиувилля, весовые числа,уравнение Гельфанда-Левитана.

L.N. Temirbekova, G.M. Dairbayeva
Numerical analogue of the Gelfand-Levitan on a finite interval

Gelfand and Levitan in their celebrated article in 1951, and later Gasymov and Levitan in 1964 have shown that a monotone increasing function is a spectral function of a singular Sturm-Liouville problem on a half-line in the limit point case at infinity if and only if it satisfies an existence and a smoothness condition. In this paper we consider discrete Sturm Liouville eigenvalue problem. Determined numerical the spectral data of the operator and the auxiliary function. To find the numerical values of the kernel of Sturm Liouville problem is solved Fredholm integral equation of the second kind.
Key words: The eigenvalues, operators, spectral data, the kernel of Sturm Liouville operator, weight numbers,Gelfand - Levitan equation.

Г.М. Даирбаева, Л.Н. Темирбекова
Ақырғы ара қашықтықтағы Гелфанд-Левитан әдісінің сандық аналогі

Мақалада Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндеріне айырымдық есеп қарастырылған. Оператордың спектралдық деректері және қосалқы функция сандық анықталған. Штурм-Лиувилл операторының ядросының сандық мәндері екінші реттік Фрегольм интегралдық теңдеуін шешумен табылады.
Түйін сөздер: Меншікті мәндер, операторлар, спектралды мәндер, Штурма-Лиувилля операторының ядросы, олшеуіш сандар, Гельфанд - Левитан теңдеуі.

Введение. Вопрос об однозначном восстановлении оператора Штурма - Лиувилля по его спектральным характеристикам на дифференциальном уровне рассматривались многими авторами [1-5]. Разрешимость обратной задачи Штурма - Лиувилля и конструктивный способ построения оператора были предложены И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном [1]. Таким образом, алгоритм восстановления оператора Штурма - Лиувилля по спектральным характеристикам получил название метода Гельфанда-Левитана.

Согласно методу ядро оператора преобразования, связанное с коэффициентом оператора Штурма - Лиувилля, удовлетворяет интегральному уравнению. Вспомогательная функция для определения ядра находится через спектральные данные оператора Штурма - Лиувилля. Известные формулы [4,5] для спектральных данных оператора Штурма - Лиувилля являются лишь асимптотическими, т.е. выполняются при больших значениях. Таким образом, приведенные в [4,5] формулы не очень удобны для численного определения собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ и весовых чисел $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ оператора Штурма - Лиувилля на конечном интервале. В данной работе рассматривается разностная задача на собственные значения для оператора Штурма - Лиувилля. Определяются численно спектральные данные оператора и вспомогательная функция. Для нахождения численных значении ядра оператора Штурма - Лиувилля решается интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

1. Постановка задачи.

Постановка оператора Штурма - Лиувилля на конечном интервале

$$l_q u(x) = -u''(x) + q(x)u(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$u'(0) - lu(0) = 0, \;\; u'(\pi) + Lu(\pi) = 0, \tag{2}$$

и предположим, что нам неизвестны потенциал $q \in L_2(0, \pi)$ и коэффициенты l, L, входящие в краевые условия.

Постановка обратной задачи восстановления оператора Штурма-Лиувилля. Пусть $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ - спектральные данные l_q. Будем решать обратную задачу восстановления l_q по заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$.

Потенциал $q(x)$ и коэффициенты l, L находятся с помощью оператора преобразования для собственных функций оператора l_q:

$$\varphi(x, \lambda) = cos\sqrt{\lambda}x + \int\limits_0^x G(x,t)cos\sqrt{\lambda}tdt, \tag{3}$$

где $G(x, t)$ - вещественная непрерывная функция удовлетворяющая соотношению

$$G(x, x) = h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)dt. \tag{4}$$

Для определения ядра $G(x, t)$ введем функцию

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{cos\sqrt{\lambda_n}xcos\sqrt{\lambda_n}t}{\alpha_n} - \frac{cosnxcosnt}{\alpha_n^0}\right), \tag{5}$$

где

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n > 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

Для разрешимости вышеуказанной обратной задачи используется метод Гельфанда-Левитана [5]. Из которого следует, что ядро $G(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$G(x,t) + F(x,t) + \int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)ds = 0, \ \ 0 < t < x, \tag{6}$$

которое называется уравнением Гельфанда-Левитана.

Таким образом, рассматриваемая обратная задача сводится к решению уравнения (6), которое является уравнением Фредгольма второго рода с параметром x.

Покажем на примерах, что из уравнения (6) при известном $G(x,t)$ можно найти $F(x,t)$ и обратно.

Пример 1. Пусть значение $G(x,t)$ имеет следующий вид

$$G(x,t) = \frac{t}{x^2+1}, \tag{7}$$

подставляя $G(x,t)$ в интегральное уравнение (6) получим следующее уравнение Вольтерра второго рода для определения $F(x,t)$

$$F(x,t) + \frac{1}{x^2+1}\int\limits_0^x sF(s,t)ds = -\frac{t}{x^2+1}. \tag{8}$$

Дифференцируем интегральное уравнение (8) по переменной x

$$\frac{dF}{dx} + \left(-\frac{2x}{(x^2+1)}\int\limits_0^x sF(s,t)ds + \frac{1}{x^2+1}xF(x,t)\right) = \frac{2tx}{(x^2+1)^2}. \tag{9}$$

Из уравнения (8) находим что

$$\int\limits_0^x sF(s,t)ds = -(x^2+1)F(x,t) - t. \tag{10}$$

Подставляем (10) в (9) имеем

$$\frac{dF}{dx} + \frac{3x}{x^2+1}F(x,t) = 0.$$

Общим решением этого ОДУ является

$$F(x,t) = (x^2+1)^{-3/2}C. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) находим, что

$$C = -t.$$

Окончательно для $F(x,t)$ имеем следующее выражение

$$F(x,t) = -\frac{t}{(x^2+1)^{3/2}}. \tag{12}$$

Пример 2. И обратно из уравнения (6) можно найти $G(x,t)$ при заданном $F(x,t)$ (12). В этом случае получим уравнение Фредгольма второго рода

$$G(x,t) = \frac{t}{(x^2+1)^{3/2}} + \int\limits_0^x \frac{t}{(s^2+1)^{3/2}} G(x,s)ds. \tag{13}$$

К уравнению (13) можно применить метод последовательных приближений. Положим начальное приближение

$$G_0(x,t) = \frac{t}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

Далее определяем последовательные приближения следующим образом

$$G_n(x,t) = G_0(x,t) + G_{n-1}(x,t)\int\limits_0^x \frac{s}{(s^2+1)^{3/2}} ds. \tag{14}$$

Тогда, переходя к пределу при $n \longrightarrow \infty$ в (14), имеем

$$G(x,t)\left[1 - \int\limits_0^x \frac{sds}{(s^2+1)^{3/2}}\right] = G_0(x,t). \tag{15}$$

Интегрируя, получим

$$G(x,t) = (x^2+1)^{1/2} G_0(x,t) = \frac{t}{x^2+1}. \tag{16}$$

из примера 1.

В монографии Б.М. Левитана [1] рассмотрены обратные задачи для оператора Штурма - Лиувилля на полупрямой, а в монографии С.И.Кабанихина [6] - на ограниченном отрезке. Для восстановления оператора Штурма - Лиувилля используется основное интегральное уравнение Гельфанда-Левитана. Трудность применения этого метода является сложность определения функции

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{cos\sqrt{\lambda_n}xcos\sqrt{\lambda_n}t}{\alpha_n} - \frac{cosnxcosnt}{\alpha_n^0}\right)$$

т.к. данная функция является асимптотическим приближением. Нахождение собственных значении оператора Штурма - Лиувилля является отдельной проблемой. Введенная выше формула для $F(x,t)$ применима только в некоторых частных случаях, например при заданных λ_n, α_n. Таким образом, формула для $F(x,t)$ не вполне удобна для определения ее значении и тем самым практический не удается ее решить. Поэтому актуальным является рассмотрение разностных операторов Штурма - Лиувилля. Этот подход позволит найти собственные значения этого оператора и тем самым вычислить функцию $F(x,t)$. Тогда уравнения Гельфанда - Левитана можно решить эффективными численными методами.

2. Вычисление собственных значений и собственных функции разностного оператора Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора l_q

$$-u''(x) - (\lambda - q(x))u(x) = 0, \;\; x \in (0,\pi), \tag{17}$$

$$-u'(0) - lu(0) = 0, \;\; u'(\pi) + Lu(\pi) = 0. \tag{18}$$

Применим метод конечных разностей к задаче (17),(18). В случае равномерной одномерной сетки с шагом $h = \dfrac{\pi}{N}$ и узлами $x_n = nh$, $n = \overline{0,N}$ рассматриваемой задаче (17), (18) отвечают разностные уравнения

$$-y_{n-1} + (2 + h^2 q_n)y_n - y_{n+1} = h^2\lambda^{(h)}y_n, \;\; n = \overline{1, N-1}, \tag{19}$$

Запишем разностные аналоги граничных условий (18)

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - ly_0 = 0, \;\; \aleph_1 y_0 - y_1 = 0 \;\text{ где }\; \aleph_1 = (1 + hl), \tag{20}$$

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} + Ly_N = 0, \;\; \aleph_2 y_N - y_{N-1} = 0 \;\text{ где }\; \aleph_2 = (1 + hL), \tag{21}$$

где

$$q_n = \frac{1}{h}\int\limits_{x_n - \frac{h}{2}}^{x_n + \frac{h}{2}} q(x)dx, \;\; n = \overline{1, N-1}. \tag{22}$$

При $n = 1$ из (19) получим

$$(2 + h^2 q_1 - \frac{1}{\aleph_1})y_1 - y_2 = \widetilde{\lambda} y_1.$$

Сделаем обозначение

$$b_1 = 2 + h^2 q_1 - \frac{1}{\aleph_1}. \tag{23}$$

Аналогично при $n = N-1$ получим

$$-y_{N-2} + (2 + h^2 q_{N-1} - \frac{1}{\aleph_2})y_{N-1} = \widetilde{\lambda} y_{N-1}.$$

Таким образом

$$b_{N-1} = 2 + h^2 q_{N-1} - \frac{1}{\aleph_2}. \tag{24}$$

Получим трехдиагональную матрицу A следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & -c_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & b_3 & -c_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b_{N-3} & -c_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -a_{N-2} & b_{N-2} & -c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_{N-1} & b_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы определены следующим образом

$$b_i = 2 + h^2 q_i, \;\; i = 2, 3, ..., N-2, \;\; a_i = 1, \;\; i = \overline{2, N-1}, \;\; c_i = 1, \;\; i = \overline{1, N-2}.$$

Перед нахождением численных значений собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы A целесообразно оценить промежуток их возможного изменения.

Собственные значения трехдиагональной матрицы A удовлетворяют неравенству по содержанию теоремы С.А. Гершгорина

$$\begin{aligned} &|\lambda - b_n| \le |a_n| + |c_n|, \;\; n = \overline{1, N-1}, \\ &-|a_n| + b_n - |c_n| \le \lambda \le |a_n| + b_n + |c_n|, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_{max} \le \max_{n=\overline{1,N-1}} (|a_n| + b_n + |c_n|), \\ &\lambda_{min} \ge \min_{n=\overline{1,N-1}} (-|a_n| + b_n - |c_n|), \end{aligned} \tag{26}$$

Если $b_n > 0$, $n = \overline{1, N-1}$ то из (25), (26) имеем $\lambda \ge b_n - |a_n| - |c_n| \ge 0$, т.е. все собственные значения неотрицательны.

Если к тому же A является матрицей с частным диагональным преобладанием, то $detA \neq 0$, т.е. она не имеет нулевого собственного значения и все ее собственные значения положительны, причем с учетом соотношений $|b_n| = b_n \ge |a_n| + |c_n|$, $n = \overline{1, N}$, из неравенства (25),(26) следует более грубая, но и более простая оценка

$$\lambda_{max} \le 2 \max_{n=\overline{1,N}} b_n. \tag{27}$$

Наибольшего собственного значения матрицы A по ее наибольшему диагональному элементу.

Приближенные значения $\lambda^{(h)}$ при $N >> 1$ находим итерационным методом связанным с многократным вычислением значения характеристического многочлена $det(A - \lambda E)$ матрицы A при пробных значениях λ. Используем существующий устойчивый и экономичный способ, требующий для вычисления $det(A - \lambda E)$ всего $5N$ арифметических операций (сложений и умножений). Он основан на рекуррентной формуле

$$M_n = b_n M_{n-1} - a_n c_{n-1} M_{n-2}, \;\; n = \overline{1, N}, \tag{28}$$

где M_n - угловой минор порядка n трехдиагональной матрицы $A - \lambda E$. Такие миноры называются главными диагональными.

Для начала вычислений при $n = 1$ следует положить, $M_0 = 1$ и $M_{-1} = 0$. Тогда получим для $n = 1$:

$$M_1 = b_1 M_0 - a_1 c_0 M_{-1} = b_1,$$

для $n = 2$:

$$M_2 = b_2 M_1 - a_2 c_1 M_0 = b_2 b_1 - a_2 c_1,$$

для $n = 3$:

$$M_3 = b_3 M_2 - a_3 c_2 M_1 = b_3 b_2 b_1 - b_3 a_2 c_1 - a_3 c_2 b_1, \text{ и т.д.}$$

Теперь определим отрезки, в которых лежат корни характеристического уравнения $det(A - E) = 0$. Для этого используем следующий алгоритм. Задаем $j = 0,\ m_1 = 1,\ m_2 = 2$. Далее положим $j = j + 1$. Если $j > n - 1$, то процесс отделения корней заканчивается. Иначе вычисляем

$$f(l_{m_1}) = det(A - l_{m_1} E), \tag{29}$$

$$f(l_{m_2}) = det(A - l_{m_2} E), \tag{30}$$

по вышеприведенной формуле (28).

Если

$$f(m_1) f(m_2) \le 0 \tag{31}$$

то найдем отрезок $[l^j_{m_1}, l^j_{m_2}]$ содержащий собственное значение λ_j. В противном случае положим $m_2 = m_2 + 1$ и процесс поиска отрезка продолжим, до тех пор пока не выполнится условие (31). После нахождения j-го собственного значения, положив $m_1 = m_2,\ m_2 = m_1 + 1$, повторим этот процесс для $(j+1)$ - го и т.д. количество отрезков равно размерности матрицы A.

Для уточнения собственных значений, лежащих на отрезках $[l^j_{m_1}, l^j_{m_2}],\ j = \overline{1, N-1}$, используем итерационные методы, например метод Ньютона, метод дихотомии. Далее мы вычисляем собственные вектора с помощью полученных собственных значений.

Для вычисления собственных векторов используем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$-u'' - (\lambda - q(x)) u(x) = 0,$$

$$\begin{cases} u'(x) = -\upsilon(x), \\ \upsilon'(x) - (\lambda - q(x)) u(x) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Разностные уравнения для системы двух ОДУ первого порядка (32) имеют вид

$$\frac{y^i_j - y^i_{j-1}}{h} = -\upsilon^i_{j-\frac{1}{2}},\ j = \overline{1, N},\ i = \overline{1, N}, \tag{33}$$

$$\frac{\upsilon^i_{j+\frac{1}{2}} - \upsilon^i_{j-\frac{1}{2}}}{h} - (\lambda^{(i)} - q_j)y^i_j = 0, \;\; j = \overline{1,N}, \;\; i = \overline{1,N}. \tag{34}$$

Приняв $y_0 = 1$, из (20) получим $y_1 = \aleph_1$, тогда из (33) имеем, что

$$\upsilon_{\frac{1}{2}} = -\frac{\aleph_1 - 1}{h}.$$

Задавая вычисленные значения $\lambda^{(i)}$, последовательно при каждом $j = \overline{1, N-1}$ находим сначала из (34) $\upsilon^i_{j+\frac{1}{2}}$, а затем из (33) y^i_{j+1} по следующим формулам

$$\upsilon^i_{j+\frac{1}{2}} = \upsilon^i_{j-\frac{1}{2}} + h(\lambda^{(i)} - q_j)y^i_j = 0, \;\; j = 1,2,..,N-1, \;\; i = 1,2,...,N-1,$$

$$y^i_{j+1} = y^i_j - h\upsilon^i_{j+\frac{1}{2}}, \;\; j = 1,2,..,N-1, \;\; i = 1,2,...,N-1.$$

После нахождения собственных векторов используем формулу (5), найдем $F(x,t)$. Далее по формуле Гельфанда-Левитана (6) найдем $G(x,t)$ и восстанавливаем функцию $q(x)$. Весовые числа

$$\alpha_n = \int\limits_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)dx$$

определим следующей приближенной формулой

$$\alpha_n \approx \sum_{i=1}^N (y^n_i)^2 h,$$

где y^n_i - компоненты собственного вектора соответствующий собственному значению λ_n. Далее по формуле (5) определим табличную функцию $F(x_i, t_j)$, $i = 0,1,2,..,N$, $j = 0,1,2,..,i$. Теперь решаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$G(x_i, t_j) + \sum_{k=0}^N G(x_i, s_k)F(s_k, t_j)h = -F(x_i, t_j), \;\; i = 0,1,2,..,N, \;\; j = 0,1,2,..,i. \tag{35}$$

Запишем уравнения (35) в матричном виде $AG = F$. Матрица этой СЛАУ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 + F(s_0, t_0)h & F(s_1, t_0)h & F(s_2, t_0)h & ... & F(s_N, t_0)h \\ F(s_0, t_1)h & 1 + F(s_1, t_1)h & F(s_2, t_1)h & ... & F(s_N, t_1)h \\ F(s_0, t_2)h & F(s_1, t_2)h & 1 + F(s_2, t_2)h & ... & F(s_N, t_2)h \\ ... & .... & ... & ... & ... \\ F(s_0, t_N)h & F(s_1, t_N)h & F(s_2, t_N)h & ... & 1 + F(s_N, t_N)h \end{pmatrix},$$

искомая функция и правая часть есть соответственно

$$\overrightarrow{G} = (G(x, t_0), G(x, t_1), G(x, t_2), .., G(x, t_N))^T,$$

$$\overrightarrow{F} = (F(x, t_0), F(x, t_1), F(x, t_2), .., F(x, t_N))^T.$$

Решение уравнения (35) различными численными методами показано в работе [7].

3.Численные решения тестовых примеров

Численно, решена тестовая задача на нахождении собственных значений для оператора l_q

$$-u''(x) + \lambda u(x) = 0, \;\; x \in (0, \pi), \tag{36}$$

$$u(0) = 0, \;\; u(\pi) = 0. \tag{37}$$

Разностный аналог задачи (36), (37) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \lambda^{(h)} y_i = 0, \;\; i = 1, 2, .., N-1, \\ &y_0 = 0, \;\; y_N = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Система уравнений (38) представляет с собой задачу на собственные значения

$$Ay = \lambda^{(h)} y.$$

Существует $N-1$ вещественных собственных значений $\lambda_k^{(h)}$, $k = 1, 2, .., N-1$ матрицы A. Известно, что собственные значения матрицы A имеют вид

$$\lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2} sin^2 \frac{\pi k}{2N}, \;\; k = 1, 2, .., N-1. \tag{39}$$

Собственные функции y_i задачи (38) , отвечающие собственным значениям (39)

$$y_i^{(k)} = sin \frac{\pi k i}{N}, \;\; k, i = 1, 2, 3, ..., N-1.$$

Интересно сопоставить решения дифференциальной и разностной задач на собственные значения. Спектр дифференциальной задачи не ограничен, т.е. $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$, в то время как спектр разностной задачи ограничен сверху при каждом фиксированном шаге h числом $\frac{4}{h^2}$.

Рассмотрим тестовую задачу на собственные значения для оператора l_q (17), (18) в которой функция $q(x)$ имеет следующий вид

$$q(x) = 1 + \frac{(k+2)(k+1)}{(x-c)^2},$$

где k- любое положительное действительное число, c- абсолютно любое число. Известно, что одним из собственных значений и собственной функцией будет

$$\lambda_1 = 1, \;\; u_1 = (x-c)^{k+2}.$$

Из граничных условий (18) получим

$$l = -\frac{k+2}{c}, \;\; L = -\frac{k+2}{\pi - c}.$$

Таблица 1. Сравнение решения собственных значений при $N = 19$

Приближенные собственные значения $\lambda^{(h)}$	Собственные значения, определенные по формуле (39)	$\lvert\lambda^{(h)} - \lambda_k^{(h)}\rvert$
0.997925	0.997946	0.000021
3.967210	3.967210	0.000000
8.834647	8.834679	0.000031
15.480522	15.480499	0.000023
23.741062	23.741032	0.000031
33.412880	33.412872	0.000008
44.257851	44.257866	0.000015
56.009026	56.008976	0.000050
68.376816	68.376854	0.000038
81.056915	81.056953	0.000038
93.737106	93.737053	0.000053
106.104919	106.104927	0.000008
117.856033	117.856041	0.000008
128.701065	128.701035	0.000031
138.372925	138.372879	0.000046
146.633423	146.633408	0.000015
153.279251	153.279236	0.000015
158.146698	158.146698	0.000000
161.115967	161.115967	0.000000

Вследствие численной реализации данного тестового примера были получены собственные значения и соответствующие им сеточные собственные вектора, например при $\lambda_3^{(h)} = 184.24$ получаются следующие сеточные собственные вектора y_i: 1.0000, 3.1249, 5.1256, 6.7846, 7.8100 и т.д.

Численное решение тестовых задач проводилось в вычислительной среде со следующими параметрами: компьютер - однопроцессорный Intel(R) Pentium(R) 4CPU 3.20 GHz с общей памятью 1.0 GB, операционная система - Microsoft Windows XP Professional версия 2008 Service Pack 3, язык программирования Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0. Для данного компьютера собственные значения высчитываются максимально до $n = 35$, при больших значениях это затруднительно, так как не хватает машинных ресурсов. Для получения более точных результатов при больших значениях n необходимо использовать суперкомпьютер.

Заключение. Численно определены спектральные данные оператора, т.е. собственные вектора и весовые числа и вспомогательная функция. Далее численно получено ядро интегрального уравнения Гельфанда-Левитана, используя вспомогательную функцию. Аналитически показано два примера решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана. В первом примере определяется функция с заданным ядром , при этом решаем уравнение Вольтера второго рода. Во втором примере с заданной функцией получаем уравнение Фредгольма второго рода, для нахождения ядра используется метод последовательных приближений.

Список литературы

[1] *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР 1951.т.15.№4.С.309-360.

[2] *Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Приближенные методы математической физики. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.-700с.

[3] *Крейн М.Г.* Решение обратной задачи Штурма - Лиувилля // Докл. АН СССР. 1951.т.76,№1,С.21-24.

[4] *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. -М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.-240 с.

[5] *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Издательство Саратовского педагогического института, 2011.- 499с.

[6] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.-457 с.

[7] *Темирбекова Л.Н., Даирбаевой Л.М.* Численное решение уравнения Гельфанда-Левитана на основе метода сингулярного разложения и оптимизации Известия НАН РК , № 1 2012.-С.3-9.

Поступила в редакцию 18 февраля 2013 года