УДК 521.1

М.Дж. Минглибаев [1, 2], О.Б. Байсбаева [1]

[1] *Механико-математический факультет, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: baiol@mail.ru*
[2] *Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан; e-mail: minglibayev@mail.ru*

Вековые возмущения в задаче о поступательно-вращательном движении двух нестационарных тел: шар – осесимметричное тело*

В работе рассматриваются взаимогравитирующие нестационарные два тела: первое тело - «центральное», шар со сферическим распределением плотности, второе тело - «спутник», обладающей осесимметричным динамическим строением и формой. Ньютоновская сила взаимодействия характеризуется приближенным выражением силовой функции, учитывающая вторую гармонику. Массы тел изменяются изотропно, в различных темпах. Выведены уравнения возмущенного поступательно-вращательного движения спутника в новых оскулирующих элементах. Получены полные вековые возмущения поступательно-вращательного движения нестационарного осесимметричного тела при произвольных законах изменения масс и размеров. В результате появляется возможность изучить поступательно-вращательное движения осесимметричного тела в двух случаях нестационарности: первый случай - изменение размера осесимметричного тела переменной массы гомотетичное и форма остается неизменной, второй случай - нестационарность осесимметричного тела характеризуется переменностью размера, переменностью масс и переменностью сжатия.
Ключевые слова: переменная масса, вековые возмущения, осесимметричное тело, переменное сжатие, поступательно-вращательное движение.

M.Zh. Minglibayev, O.B. Baisbayeva

Secular perturbations of the translational-rotational motion in the problem of the two non-stationary bodies: sphere - axisymmetric body

In this article we consider mutually gravitating non-stationary two bodies: first body is "central it is a sphere with a spherical density distribution, the second body is "satellite which has an axisymmetric dynamic structure and form. Newtonian force interaction is characterized by an approximate expression of the force function, which takes into account the second harmonic. Masses of bodies change isotropic in the different rates. Equations of the perturbed translational-rotational motion of satellite are deduced in the new osculating elements. Full secular perturbations of translational-rotational motion of non-stationary axisymmetric body for arbitrary laws of variation of masses and sizes are obtained. As a result, it is possible

*Работа частично финансирована грантом 0688/ГФ научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК, 2012г.-2014г.

to study the translational-rotational motion of the axisymmetric body in two cases of non-stationary: the first case - the variation of the size of the axisymmetric body with variable mass is homothetic and shape remains unchanged, the second case is non-stationary axisymmetric body characterized by variable size, variable masses and variable oblate.

Key words: variable mass, secular perturbation, axisymmetric body, variable oblate, translational-rotational motion.

М.Ж. Минглибаев, О.Б. Байсбаева

Ілгерілмелі-айналмалы қозғалыс жасайтын бейстационар екі дененің ғасырлық ұйытқулары: шар - өстік симметриялы дене

Берілген мақалада өзара гравитацияланатын бейстационар екі дене қарастырылады: бірінші дене – «центрлік», яғни тығыздығы сфера бойынша үлестірілген шар, екінші дене – «серік», яғни динамикалық құрылымы және пішіні өстік симметриялы. Ньютонның өзара әсерлесу күші екінші гармониканы ескергендегі күштік функцияның жуық өрнегімен сипатталған. Денелердің массалары изотропты әртүрлі қарқында өзгереді. Жаңа оскуляциялаушы элементтерде серіктің ұйытқушы ілгерілмелі-айналмалы қозғалысының теңдеулері алынған. Массалары мен өлшемдерінің өзгеру заңдылығы еркін таңдап алынған бейстационар өстік симметриялы дененің ілгерілмелі-айналмалы қозғалысының толық ғасырлық ұйытқулары табылған. Нәтижесінде, өстік симметриялы дененің ілгерілмелі-айналмалы қозғалысының екі бейстационар жағдайын қарастыру мүмкіндігі туады: бірінші жағдай – айнымалы массалы өстік симметриялы дененің өлшемінің өзгеруі гомотетикалық және пішіні тұрақты, екінші жағдай – дененің бейстационарлық қасиеті айнымалы өлшеммен, айнымалы массамен және айнымалы сығылумен сипатталады.

Түйін сөздер: айнымалы масса, ғасырлық ұйытқу, өстік симметриялы дене, айнымалы сығылу, ілгерлемелі-айналмалы қозғалыс.

1. Постановка задачи

Пусть первое тело T_1 – «центральное» с массой $m_1 = m_1(t)$ есть шар со сферическим распределением плотности, зависящей от времени, переменным радиусом $l_1 = l_1(t)$. Предположим, что второе тело T_2 – «спутник», с массой $m_2 = m_2(t)$ обладает осесимметричным динамическим строением и формой с характерным линейным размером $l_2 = l_2(t)$, его моменты инерции второго порядка переменные

$$A(t) = B(t) \neq C(t). \tag{1}$$

Допустим, что массы тел изменяются, изотропно, в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}. \tag{2}$$

Тогда относительное поступательное движение центра масс «спутника» вокруг центра шара – «центрального» тела описывается уравнениями [1]

$$m\ddot{x}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad m\ddot{y}_2 = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad m\ddot{z}_2 = \frac{\partial U}{\partial z_2}, \tag{3}$$

где $x_2,\ y_2,\ z_2$ – координаты центра масс тела T_2 в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ с началом O_1 в центре шара и осями, параллельными осям абсолютной системы координат, $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, $m = m_1m_2/(m_1+m_2)$ – приведенная масса, U – силовая функция ньютоновского взаимодействия.

Вращательное движение спутника вокруг собственного центра масс характеризуем проекциями угловой скорости на оси собственной системы координат p, q, r и соответствующими углами Эйлера ϕ_2, ψ_2, θ_2

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Ap) - (A-C)qr = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U}{\partial\psi_2} - \cos\theta_2\frac{\partial U}{\partial\varphi_2}\right] + \cos\varphi_2\frac{\partial U}{\partial\theta_2},\\
&\frac{d}{dt}(Aq) - (C-A)rp = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U}{\partial\psi_2} - \cos\theta_2\frac{\partial U}{\partial\varphi_2}\right] - \sin\varphi_2\frac{\partial U}{\partial\theta_2},\\
&\frac{d}{dt}(Cr) = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$p = \dot\psi_2\sin\varphi_2\sin\theta_2 + \dot\theta_2\cos\varphi_2, \quad q = \dot\psi_2\cos\varphi_2\sin\theta_2 - \dot\theta_2\sin\varphi_2, \quad r = \dot\psi_2\cos\theta_2 + \dot\varphi_2. \tag{5}$$

Методами теории возмущения нужно вычислить вековые возмущения поступательно-вращательного движения нестационарного осесимметричного тела.

2. Уравнения движения в оскулирующих элементах

Рассматриваемую задачу опишем в оскулирующих переменных

$$a, \quad e, \quad \omega, \quad \Omega, \quad i, \quad M \tag{6}$$

апериодического движения по квазиконическому сечению [2] и в оскулирующих аналогах переменных Белецкого-Черноусько [3]

$$L^*,\ \rho^*,\ \sigma^*,\ \theta,\ \varphi,\ \psi. \tag{7}$$

Соответствующие уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot a = \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial M},\\
&\dot e = \frac{1-e^2}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial\omega},\\
&\frac{di}{dt} = \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial\omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial\Omega},\\
&\dot\Omega = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\dot\omega = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\dot M = \left(\frac{m_1+m_2}{(m_{10}+m_{20})\gamma^3}\right)^{1/2}\cdot n - \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $m_{10} = m_1(t_0)$, $m_{20} = m_2(t_0)$, t_0 – начальный момент времени,

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{m_1(t_0)+m_2(t_0)}{m_1(t)+m_2(t)}, \tag{9}$$

R - возмущающая функция. Уравнения возмущенного вращательного движения напишем следующим образом

$$\dot{L}^* = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \qquad \dot{\rho}^* = \frac{1}{L^* \sin \rho^*}\left(-\frac{\partial W}{\partial \sigma^*} + \cos \rho^* \frac{\partial W}{\partial \psi}\right),$$
$$\dot{\sigma}^* = \frac{1}{L^* \sin \rho^*}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*}\right), \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{L^* \sin \theta}\left[-\frac{\partial W}{\partial \varphi} + \cos \theta \frac{\partial W}{\partial \psi}\right],$$
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{L^* \sin \theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) L^* \cos \theta, \quad \dot{\psi} = \frac{L^*}{A} - \frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*} \operatorname{ctg} \rho^* + \frac{\partial W}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta\right), \tag{10}$$

где

$$W = \frac{3f\, m_1}{2r_2^3}\left[(A - C)\gamma_3^2\right]. \tag{11}$$

3. Выражение возмущающей функции через оскулирующие элементы

Используя формулы невозмущенного апериодического движения по квазиконическому сечению возмущающую функцию R напишем в виде

$$R = R_1 + (R_2 + W)\,\frac{1}{m}, \tag{12}$$

$$R_1 = -\frac{a^2\gamma^2}{2}(m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m_1 + m_2}\right) \cdot \left\{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right\}, \tag{13}$$

$$R_2 = \frac{f\, m_1}{2\gamma^3 a^3}\,(C - A) \cdot \left\{\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\right\}, \tag{14}$$

$$W = \frac{3f\, m_1}{2\gamma^3 a^3}(A - C) \cdot \left\{\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \cdot \gamma_3^2\right\}. \tag{15}$$

Выпишем известные выражения [1]

$$\begin{aligned} \gamma_3^2 = {} & \frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\rho^*(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{4}\sin^2\rho^*(3\cos^2\theta - 1)\cos 2(v - \sigma^*) + \\ & + \sin\rho^*\cos\rho^*\sin\theta\cos\theta\sin\psi + \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin^2\rho^*\cos 2\psi + \\ & + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\sin\rho^*(1 + \cos\rho^*)\sin[\psi - 2(v - \sigma^*)] - \\ & - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\sin\rho^*(1 - \cos\rho^*)\sin[\psi + 2(v - \sigma^*)] - \\ & - \frac{1}{8}\sin^2\theta(1 + \cos\rho^*)^2\cos[2(\psi - v + \sigma^*)] - \frac{1}{8}\sin^2\theta(1 - \cos\rho^*)^2\cos[2(\psi + v - \sigma^*)], \end{aligned} \tag{16}$$

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \left(-2e + \frac{e^3}{4}\right)\cos M - \frac{e^2}{2}\cos 2M - \frac{e^3}{4}\cos 3M + ..., \tag{17}$$

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + ... + \left(3e + \frac{27}{8}e^3 + \frac{141}{32}e^5 + ...\right)\cos M + \\ + \left(\frac{9}{2}e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \frac{141}{32}e^6 + ...\right)\cos 2M + \left(\frac{53}{8}e^3 + \frac{393}{128}e^5 + ...\right)\cos 3M + ... \tag{18}$$

4. Уравнения вековых возмущений

Предположим, что между поступательным и вращательным движениями отсутствует резонанс. Тогда полная вековая часть возмущающей функции (12) по методу Гаусса определяется формулой

$$\approx\!\!\!R = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\, d\psi\, dM = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{R}\, dM, \tag{19}$$

где обозначено

$$\widetilde{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\, d\psi. \tag{20}$$

Отсюда сразу видно, что в случае (1) возмущающая функция не зависит от угла φ. Поэтому первое и четвертое уравнения системы (10) имеют вид

$$\dot{L}^* = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{L^*\sin\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial W}{\partial \psi}\right]. \tag{21}$$

Откуда следует интеграл

$$L^*\cos\theta = L_0^*\cos\theta_0 = const. \tag{22}$$

Вычисления вековой части возмущающей функции сводится к вычислению соответствующих интегралов от величин, заключенных в фигурные скобки в формулах (13) – (15).

Соответственно получим

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}_1 + \left(\widetilde{R}_2 + \widetilde{W}\right)\frac{1}{m}, \tag{23}$$

$$\widetilde{R}_1 = R_1, \qquad \widetilde{R}_2 = R_2, \tag{24}$$

$$\widetilde{W} = \frac{m_1(t)[A - C]}{[m_1(t_0) + m_2(t_0)]\cdot\gamma^3}\cdot\frac{3n^2}{8(1-e^2)^3}\,(1 + e\cos v)^3\left\{2\sin^2\theta + \right. \\ \left. + (3\cos^2\theta - 1)\sin^2\rho^*\,[1 + 2\cos 2(v - \sigma^*)]\right\}, \tag{25}$$

где обозначено

$$n^2 = f\,\frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{a^3}. \tag{26}$$

Из формулы (25) и из первого уравнения системы (10) следует

$$L^* = L_0^* = const. \tag{27}$$

С учетом последнего соотношения из интеграла (22) получим

$$\theta = \theta_0 = const, \tag{28}$$

что также следует из четвертого уравнения системы (10) и из формулы (25).

Таким образом, систему (10) можно написать в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{L}^* = 0,\\
&\dot{\rho}^* = -\frac{1}{L^*\sin\rho^*}\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\sigma^*},\\
&\dot{\sigma}^* = \frac{1}{L^*\sin\rho^*}\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\rho^*},\\
&\dot{\theta} = 0,\\
&\dot{\varphi} = \frac{1}{L^*\sin\theta}\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)L^*\cos\theta,\\
&\dot{\psi} = \frac{L^*}{A} - \frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\rho^*}\operatorname{ctg}\rho^* + \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta\right),
\end{aligned} \tag{29}$$

решение которой сведется к решению системы из двух уравнений

$$\dot{\rho}^* = -\frac{1}{L^*\sin\rho^*}\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\sigma^*}, \quad \dot{\sigma}^* = \frac{1}{L^*\sin\rho^*}\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\rho^*}, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{W} = {} & \frac{3n^2}{8(1-e^2)^3}\frac{m_1(t)(A-C)}{[m_1(t_0)+m_2(t_0)]\cdot\gamma^3}(1+e\cos v)^3\big\{2\sin^2\theta_0 + \\
& + (3\cos^2\theta_0 - 1)\sin^2\rho^*\,[1+2\cos 2(v-\sigma^*)]\big\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Далее из формул (22) и (18) учитывая $\dfrac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \dfrac{dM}{(1-e^2)^{3/2}}$ получим

$$\stackrel{\approx}{R} = \stackrel{\approx}{R}_1 + \left(\stackrel{\approx}{R}_2 + \stackrel{\approx}{W}\right)\frac{1}{m}, \tag{32}$$

$$\stackrel{\approx}{R}_1 = -\frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)a^2\gamma^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right), \tag{33}$$

$$\stackrel{\approx}{R}_2 = \frac{f\,m_1}{2\gamma^3 a^3}\frac{(C-A)}{(1-e^2)^{3/2}}, \tag{34}$$

$$\stackrel{\approx}{W} = \frac{3f\,m_1(A-C)}{8\gamma^3 a^3(1-e^2)^{3/2}}\big[2\sin^2\theta_0 + (3\cos^2\theta_0 - 1)\sin^2\rho^*\big]. \tag{35}$$

Подставляя выражение (32) в систему уравнений (8) имеем

$$
\begin{aligned}
&\dot{a} = 0,\\
&\dot{e} = 0,\\
&\frac{d\,i}{dt} = 0,\\
&\dot{\Omega} = 0,\\
&\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2 e}\cdot\frac{\partial\,\approx\!\!\!\!R}{\partial e},\\
&\dot{M} = \left(\frac{m_1+m_2}{(m_{10}+m_{20})\gamma^3}\right)^{1/2}\cdot n - \frac{2}{n\,a}\frac{\partial\,\approx\!\!\!\!R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{n\,a^2 e}\cdot\frac{\partial\,\approx\!\!\!\!R}{\partial e}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Соответственно формулы (32) и (11) дают

$$
\begin{aligned}
&\dot{L}^* = 0,\\
&\dot{\rho}^* = 0,\\
&\dot{\sigma}^* = \frac{1}{L^*\sin\rho^*}\frac{\partial\,\approx\!\!\!\!W}{\partial\rho^*},\\
&\dot{\theta} = 0,\\
&\dot{\varphi} = \frac{1}{L^*\sin\theta_0}\frac{\partial\,\approx\!\!\!\!W}{\partial\theta_0} + \left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L^*\cos\theta_0,\\
&\dot{\psi} = \frac{L^*}{A} - \frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial\,\approx\!\!\!\!W}{\partial\rho^*}\operatorname{ctg}\rho^* + \frac{\partial\,\approx\!\!\!\!W}{\partial\theta_0}\operatorname{ctg}\theta_0\right).
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Системы уравнений (36) и (37) полностью определяют вековые возмущения в рассматриваемой задаче. Таким образом, имеем

$$
\begin{aligned}
&a_{\text{век}} = a_0 = const, \qquad e_{\text{век}} = e_0 = const.\\
&i_{\text{век}} = i_0 = const, \qquad \Omega_{\text{век}} = \Omega_0 = const,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
L^*_{\text{век}} = L^*_0 = const, \qquad \rho^*_{\text{век}} = \rho^*_0 = const, \qquad \theta_{\text{век}} = \theta_0 = const, \tag{39}
$$

$$
\approx\!\!\!\!R_{\text{век}} = \approx\!\!\!\!R_{\text{век}}\,(t, a_0, e_0, \theta_0, \rho^*_0) = \approx\!\!\!\!R\,(t), \tag{40}
$$

$$
\approx\!\!\!\!W_{\text{век}} = \approx\!\!\!\!W_{\text{век}}\,(t, a_0, e_0, \theta_0, \rho^*_0) = \approx\!\!\!\!W\,(t). \tag{41}
$$

Из системы уравнений (36) и (37) с учетом соотношений (38)–(41) также следуют

$$
\begin{aligned}
&\dot{\omega}_{\text{век}} = -\frac{3\sqrt{1-e_0^2}}{2n_0}\gamma\ddot{\gamma} + \frac{3f}{8n_0(1-e_0^2)a_0^5}\times\\
&\times\left\{4+3\left[2\sin^2\theta_0 + (3\cos^2\theta_0 - 1)\sin^2\rho^*_0\right]\right\}\frac{(C-A)m_1}{\gamma^3 m},
\end{aligned}
\tag{42}
$$

$$\dot{M}_{\text{век}} = \frac{n_0}{\gamma^2} + \frac{7-3e_0^2}{2n_0}\gamma\ddot{\gamma} + \frac{f}{2n_0 a_0^5(1-e_0^2)^{3/2}}\times$$
$$\times\left\{1 - \frac{11}{4}\left[2\sin^2\theta_0 + (3\cos^2\theta_0 - 1)\sin^2\rho_0^*\right]\right\}\frac{(C-A)m_1}{\gamma^3 m}, \tag{43}$$

$$\dot{\sigma}^*_{\text{век}} = \frac{3f(3\cos^2\theta_0 - 1)\cos\rho_0^*}{4a_0^3(1-e_0^2)^{3/2}L_0^*}\cdot\frac{(C-A)m_1}{\gamma^3}, \tag{44}$$

$$\dot{\varphi}_{\text{век}} = \left[\frac{3f(2-3\sin^2\rho_0^*)\cos\theta_0}{4a_0^3(1-e_0^2)^{3/2}L_0^*}\cdot\frac{m_1}{\gamma^3} + \frac{L_0^*\cos\theta_0}{C\cdot A}\right](A-C), \tag{45}$$

$$\dot{\psi}_{\text{век}} = \frac{L_0^*}{A} + \frac{3f}{4a_0^3(1-e_0^2)^{3/2}L_0^*}\times$$
$$\times\left[\cos^2\theta_0 + \cos^2\rho_0^* - 6\cos^2\theta_0\cos^2\rho_0^*\right]\frac{(A-C)m_1}{\gamma^3}, \tag{46}$$

где

$$n_0 = \frac{\sqrt{f\left[m_1(t_0) + m_2(t_0)\right]}}{a_0^{3/2}}. \tag{47}$$

Полученные решения (38)–(39), (42)–(46) уравнений вековых возмущений показывают, что поступательное движение центра масс осесимметричного тела (42)–(43) и его вращательное движение вокруг центра масс (45)–(46) взаимосвязаны.

5. Уравнения возмущенного вращательного движения относительно эволюционирующей орбиты

Формула (42) показывает, что в рассматриваемой задаче, в общем случае

$$\dot{\omega}_{\text{век}} \neq 0. \tag{48}$$

Следовательно "перигейная"система координат не сохраняется, поэтому в этом случае (48) нужно использовать уравнения возмущенного вращательного движения относительно эволюционирующей орбиты [4]. Они выводятся так же как и в соответствующей стационарной задаче. Пусть орбита эволюционирует так, что

$$i = i_0 = const, \tag{49}$$

$$\dot{\Omega} \neq 0, \;\; \dot{\omega} \neq 0. \tag{50}$$

Обозначим

$$k_\Omega = \dot{\Omega} = \dot{\Omega}(t), \tag{51}$$

$$k_\omega = \dot{\omega} = \dot{\omega}(t), \tag{52}$$

$$\Sigma = \sigma^* + \omega, \tag{53}$$

где (53) есть угол между направлением узлов и проекцией вектора кинетического момента $\vec{L}$ на плоскости орбиты.

Тогда

$$\upsilon - \sigma^* = \upsilon + \omega - \Sigma, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma^*} = \frac{\partial W}{\partial \Sigma}, \quad \frac{d\sigma^*}{dt} = \frac{d\Sigma}{dt} - k_\omega. \tag{54}$$

Далее рассуждая аналогично тому как это было выполнено в соответствующей стационарной задаче [4], получим

$$\dot{L}^* = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \tag{55}$$

$$\dot{\rho}^* = -\frac{1}{L^* \sin \rho^*}\frac{\partial W}{\partial \Sigma} + \frac{\operatorname{ctg} \rho^*}{L^*}\frac{\partial W}{\partial \psi} - k_\Omega \sin i \cos \Sigma, \tag{56}$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{L^* \sin \rho^*}\frac{\partial W}{\partial \rho^*} + k_\Omega (\sin i \operatorname{ctg} \rho^* \sin \Sigma - \cos i), \tag{57}$$

$$\dot{\theta} = L^* \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) + \frac{1}{L^* \sin\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right), \tag{58}$$

$$\dot{\varphi} = L^* \cos\theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi}{A} - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) + \frac{1}{L^* \sin\theta}\frac{\partial W}{\partial \theta}, \tag{59}$$

$$\dot{\psi} = L^* \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) - \frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*}\operatorname{ctg}\rho^* + \frac{\partial W}{\partial \theta}\operatorname{ctg}\theta\right) - k_\Omega \frac{\sin i}{\sin \rho^*}\sin\Sigma. \tag{60}$$

В случае эволюционирующей орбиты согласно (49), (50) полученные уравнения (55)–(60) носят общий характер.

6. Вековые возмущения

В рассматриваемой задаче согласно (1), (38) и (42)

$$A(t) = B(t), \quad k_\Omega = \dot{\Omega} = 0, \quad k_\omega = \dot{\omega} \neq 0. \tag{61}$$

При этом система уравнений (55)–(60) упрощается

$$\dot{L}^* = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \tag{62}$$

$$\dot{\rho}^* = -\frac{1}{L^* \sin \rho^*}\frac{\partial W}{\partial \Sigma} + \frac{\operatorname{ctg} \rho^*}{L^*}\frac{\partial W}{\partial \psi}, \tag{63}$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{L^* \sin \rho^*}\frac{\partial W}{\partial \rho^*}, \tag{64}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L^* \sin\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right), \tag{65}$$

$$\dot{\varphi} = L^* \cos\theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{1}{L^* \sin\theta}\frac{\partial W}{\partial \theta}, \tag{66}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L^*}{A} - \frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*}\operatorname{ctg}\rho^* + \frac{\partial W}{\partial \theta}\operatorname{ctg}\theta\right). \tag{67}$$

Сравнивая последние уравнения (61)–(67) с системой (10), учитывая (54) находим, что правая часть у них одинаковая, только введена новая переменная Σ. Соответственно в конечном итоге, учитывая осесимметричность тела, вместо формулы (44) имеем

$$\dot{\Sigma}_{\text{век}} = \frac{3f(3\cos^2\theta_0 - 1)\cos\rho_0^*}{4a_0^3(1-e_0^2)^{3/2}L_0^*}\cdot\frac{(C-A)m_1}{\gamma^3}. \tag{68}$$

Таким образом в рассматриваемой задаче вековые возмущения определяются формулами (38)–(39), (42)–(43), (45)–(47) и (6.9).

7. Анализ вековых возмущений

Этот случай интересен тем, что можно рассмотреть два типа нестационарности осесимметричного тела. В первом случае изменение размера, осесимметричного тела переменной массы и постоянной формы, гомотетичное

$$\frac{A(t)}{A(t_0)} = \frac{C(t)}{C(t_0)} = \frac{m_2(t)}{m_2(t_0)}\cdot\left[\frac{l_2(t)}{l_2(t_0)}\right]^2. \tag{69}$$

Во втором случае нестационарность осесимметричного тела характеризуется переменностью размера, переменностью масс и переменностью сжатия. Причем, в этом случае, вообще говоря,

$$A(t) \neq C(t), \tag{70}$$

где $A(t)$ и $C(t)$ – произвольные функции времени. Во втором случае, когда эллипсоид инерции переходит через сферу, в частности, как видно из формулы (45), угловая скорость собственного вращения $\dot{\varphi}_{\text{век}}$ равна нулю и в последующий момент меняет знак. При этом нестационарное осесимметричное тело начинает вращаться в обратную сторону.

Список литературы

[1] *Минглибаев М.Дж.* Динамика нестационарных гравитирующих систем. - Алматы: Изд. «Қазақ университеті», 2009. - 209 с.

[2] *Минглибаев М.Дж.* К канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы // Труды АФИ АН Каз ССР. - 1992. - Т. 50. - С. 71-78.

[3] *Минглибаев М.Дж.* К вращательному движению нестационарного тела // Известия МОН РК, серия физико-математическая. - 2006. - №4. - С. 10-13.

[4] *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1975. - 308 с.

List of references

[1] *Minglibayev M.Zh.* Dinamika nestatsionarnykh gravitiruyushchikh sistem. – Almaty: Izd. «Kazakh universitety», 2009. - 209 s.

[2] *Minglibayev M.Zh.* K kanonicheskoy teorii vozmushcheniy v nebesnoy mekhanike tel peremennoy massy // Trudy AFI AN Kaz SSR. – 1992. – T. 50. – S. 71-78.

[3] *Minglibayev M.Zh.* K vrashchatel'nomu dvizheniyu nestatsionarnogo tela // Izvestiya MON RK, seriya fiziko-matematicheskaya. – 2006. – №4. – S. 10-13.

[4] *Beletskiy V.V.* Dvizheniye sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole. – Moskva: MGU im. M.V. Lomonosova, 1975. – 308 s.

Поступила в редакцию 10 января 2013 года