УДК 539.3

Л.А. Алексеева[1], А.Н. Дадаева[2]
[1]*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы*
[2]*Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы*
e-mail: alexeeva@math.kz

О единственности решений краевых задач термоупругости с учетом термоударных волн

Рассматриваются четыре нестационарные краевые задачи связанной термоупругости, для которых доказана единственность решений с учетом ударных термоупругих волн. Решение соответствующих краевых задач требует привлечения аппарата теории обобщенных функции. При этом аппарат теории обобщенных функции позволяет сравнительно легко работать с ударными волнами, что сложно делать при методах классического анализа. Получены закон сохранения энергии, условия на скачки плотности энергии, напряжений, скоростей и температурных градиентов на волновых фронтах.

Ключевые слова: Термоупругость, напряженно-деформируемое состояние среды, деформация, обобщенные функции, ударные волны, термоупругие волны.

L.A. Alexeyeva, A.N. Dadaeva

About uniqueness of solutions of boundary value problems of thermoelasticity taking into account thermoshock waves

Four nonstationary boundary value problems of coupled thermoelastodynamics are considered for which uniqueness of decisions is proved taking into account shock thermoelastic waves. The law of energy conservation, conditions on jumps of energy density, tensions, speeds and temperature gradients on wave fronts are received. For construction of conditions on shock waves fronts the methods of generalized functions theory are offered which allows to work easily with shock waves, that it is difficult to do at methods of the classical analysis.

Л.А. Алексеева, А.Н. Дадаева

Жылу соқпасындағы толқынды ескерген жылу серпімділігі шеттік есептің шешімінің біреуғана екендігі туралы

Термосерпімділіке байланысты төрт стационар емес шеттік есеп қарастырылды. Олар үшін соқпа термосерпілді толқын әсерін есепке алған шешімнің біреуғана екендігі дәлелденген. Шеттік есептерді шешу үшін жалпыланған теориясың тәсілдері қажет болды, өткені динамиқалық теңдеудің фундамиқалық шешімдері жарпылады функциялық классына жатады. Энергия сақтаудыру зандылығы алынған, энергия тығыздығының жылдадамдыққа және толқынды жердегі жылу градиентіне шарттар алынған.

Исследование волновых процессов в сплошных средах относится к актуальным проблемам математической физики и связано с построением решений краевых задач для гиперболических систем уравнений и уравнений смешанного типа. Математическая теория краевых задач для таких уравнений пока не имеет достаточно полного развития в виду сложности динамических процессов, сопровождающихся ударными волнами, что приводит к недифференцируемости решений на фронтах ударных волн и затрудняет использование класических методов теории краевых задач для изучения таких процессов. Основное развитие в этом направлении связано с с переходом от систем гиперболического и смешанного типа к эллиптическим системам с использованием интегральных преобразований Фурье или Лапласа по времени и решением краевых задач на основе теории потенциала, хорошо развитой для эллиптических уравнений [1-3]. Методы решения ряда динамических краевых задач термоупругости при таком подходе разработаны в [4-11] и др. Для построения оригиналов решений обычно используются численные процедуры обратных преобразований Фурье или Лапласа, которые, как известно, часто бывают неустойчивы, требуют различных регуляризаций, которые очень зависят от вида трансформант решений. Поэтому необходима разработка эффективных методов решения нестационарных краевых задач динамики различных сред в исходном пространстве времени с учетом ударных волн.

В работах [12-15] на основе теории обобщенных функций разработан метод сингулярных граничных интегральных уравнений для решения начально-краевых задач динамики упругих сред и сред, описываемых строго гиперболическими системами уравнений второго порядка в пространствах произвольной размерности, с учетом ударных волн. Имеются компьютерные реализации этого метода с решением ряда дифракционных задач для изотропных упругих сред [12,16]. Динамика термоупругих сред гораздо менее изучена и в основном связана с построением частных решений уравнений термоупругости [17].

В настоящей работе рассматриваются постановки четырех начально-краевых задач связанной термоупругости, для которых доказана единственность решений с учетом ударных термоупругих волн. Получены условия на скачки плотности энергии, напряжений, скоростей и температурных градиентов на их фронтах, закон сохранения энергии.

1. Определяющие соотношения термоупругой среды. Ударные волны.

Линейная изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом термодинамических параметров: массовой плотностью ρ, упругими постоянными Ламе λ, μ и термоупругими константами γ, η и κ. В декартовой системе координат такая среда описывается системой уравнений [17,18]:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j} - \rho\ddot{u}_i + \rho F_i = 0,\\ \theta_{,jj} - \kappa^{-1}\dot{\theta} - \eta\dot{u}_{j,j} + F_{N+1} = 0, \quad j = 1, ..., N\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u_i – компоненты вектора смещений $u(x,t) = u_i e_i$, $x = x_i e_i \in R^N$, t – время, $u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j = \partial_j u_i$; $\theta \equiv u_{N+1}$– относительная температура ($\theta = T(x,t) - T(x,0)$), T–абсолютная температура,F_i– компоненты объемной силы, $F_{N+1} = (\lambda_0\kappa)^{-1}W$, W– количество выделенного тепла на единицу объема за единицу времени, λ_0– коэффициент теплопроводности, σ_{ij}– тензор напряжений – связан с перемещениями законом Дюамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}u_{k,l} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \gamma\delta_{ij}\theta \tag{2}$$

где δ_{ij}– символ Кронекера. При плоской деформации $N = 2$, в общем случае $N = 3$. Всюду по повторяющимся индексам проводится суммирование в указанных пределах их изменения (тензорная свертка).

Подставляя (2) в (1), получим систему уравнений относительно $u, \theta = u_{N+1}$ смешанного гиперболо-параболического типа:

$$\begin{gathered} L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j + F_i = 0 \\ L_{ij} = (\lambda+\mu)\ \partial_i\partial_j + (\mu\Delta - \rho\,\partial_t\partial_t)\delta_{ij} - \gamma\delta_{j(N+1)}\partial_i, \quad i = \overline{1,N} \\ L_{(N+1)j} = (\Delta - \kappa^{-1}\,\partial_t)\delta_{j(N+1)} - \eta\ (1-\delta_{j(N+1)})\partial_t\partial_j, \quad j = \overline{1,N+1} \end{gathered} \tag{3}$$

Распространяющиеся в термоупругой среде волны могут быть ударными. Уравнение фронта волны F имеет вид:

$$det\left\{L^2_{ij}\left(\nu,\nu_t\right)\right\} = det\left\{L^e_{ij}\left(\nu,\nu_t\right)\right\}\sum_{i=1}^{N}\nu_i^2 = 0, \tag{4}$$

где L^2_{ij}– главная часть оператора $L_{ij}(\partial_x, \partial_t)$, содержащая только старшие производные второго порядка, а L^e_{ij} является дифференциальным оператором уравнений движения соответствующего упругого тела, (λ,μ,ρ) $(\nu, \nu_t) = (\nu_1, ..., \nu_N, \nu_t)$ – вектор нормали к F в $R^{N+1} = \{(x,t)\}$. Из (4) следует, что

$$\text{либо} \quad \sum_{i=1}^{N}\nu_i^2 = 0, \quad \text{либо} \quad det\left\{L^e_{ij}\left(\nu,\nu_t\right)\right\} = 0.$$

Первое уравнение описывает характеристическую поверхность классического параболического уравнения, которая имеет вид $t = const$ и не определяет волновой фронт в $\Re^N$. Второе – описывает волновые фронты F_t, движущиеся в R^N со скоростью

$$c = -\nu_t/\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\nu_i^2}, \quad c = c_j \quad (j = 1,2)\,, \tag{5}$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$– скорость объемных упругих волн, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$- скорость сдвиговых волн. Т.е. волновые фронты (*термоударные волны*) в термоупругой среде движутся со скоростью упругих волн. Для вывода условий на фронтах удобно использовать аппарат теории обобщенных функций.

Вводится пространство финитных бесконечно дифференцируемых вектор-функций $\varphi\,(x,t)= \ \{\varphi_1\,(x,t)\,, ..., \varphi_{N+1}\,(x,t)\}\in \ D_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$. Ему соответствует сопряженное пространство $D^{©}_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$- пространство обобщенных вектор-функций $\hat{f}\,(x,t) = \left\{\hat{f}_i\,(x,t)\,, i = \overline{1,N+1}\right\}$– линейных функционалов на $D_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$. С учетом правил дифференцирования обобщенных функций [19], получим уравнения движения в $D'_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$:

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}_{ij,j} - \rho\hat{u}_{i,tt} + \rho\,\hat{G}_i = \left[\sigma_{ij}\nu_j - \rho u_{i,t}\nu_t\right]_F\delta_F\,(x,t) + \\ &+\partial_j\left(\left[\left(\lambda u_k\nu_k - \gamma\,\theta\right)\delta_{ij} + \mu\left(u_i\nu_j + u_j\nu_i\right)\right]_F\delta_F\,(x,t)\right) - \rho\partial_t\left(\left[u_i\right]_F\nu_t\delta_F\,(x,t)\right) \\ &\hat{\theta}_{,jj} - \kappa^{-1}\hat{\theta}_{,t} - \eta\hat{u}_{j,jt} + \kappa^{-1}\hat{Q} = \left[(\theta_{,j} - \eta\dot{u}_j)\nu_j - \kappa^{-1}\theta\nu_t\right]_F\delta_F\,(x,t) + \\ &+\partial_j\left(\left[\theta\nu_j - \eta u_j\nu_t\right]_F\delta_F\,(x,t)\right), \end{aligned}$$

где квадратная скобка означает скачок функции на характеристической поверхности F в R^{N+1}, соответствующей волновому фронту F_t в R^N. Следовательно, для того, чтобы сохранялись условия сплошности среды и u было решением (1) в $D'_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$, должны выполняться следующие условия на скачки:

$$[u_j]_F = 0, \quad [\theta]_F = 0,$$

$$[\sigma_{ij}\nu_j - \rho\nu_t\dot{u}_i]_F = 0, \quad \left[(\theta,_j - \eta\dot{u}_j)\nu_j - \kappa^{-1}\theta\nu_t\right]_F = 0, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

С учетом (3) и равенства:

$$n_j = \nu_j/\sqrt{\nu_k\nu_k}, - \tag{6}$$

из них следуют законы сохранения на подвижных волновых фронтах F_t в R^N:

$$[u]_{F_t} = 0, \quad [\theta]_{F_t} = 0, \tag{7}$$

$$[\sigma_{ij}n_j + \rho c\dot{u}_i]_{F_t} = 0, \tag{8}$$

$$[\theta,_j n,_j]_{F_t} = \eta\,[\dot{u}_j n_j]_{F_t} \tag{9}$$

здесь $n-$ *волновой вектор* – единичный вектор, перпендикулярный F_t, направленный в сторону распространения волны. Первое равенство (7) является условием сохранения сплошности среды, второе равенство (7) показывает, что на фронтах термоударных волн температура среды непрерывна.

Условие (8) дает связь между скачком напряжений и скачком скоростей на фронте ударной волны, и совпадает с известным законом сохранения импульса на фронтах ударных волн в упругих средах [20] . Из уравнения (9) следует, что на фронтах термоударных волн градиент температуры терпит скачок, пропорциональный скачку нормальной составляющей к фронту скорости перемещений среды.

Из (7) следует, в силу непрерывности u, условие равенства касательных производных к фронту, которое имеет вид:

$$[\nu_j\dot{u}_i - \nu_t u_{i,j}] = 0 \quad i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, N} \tag{10}$$

поскольку вектора $\tau^i = (\delta_1^i\nu_t, ..., \delta_N^i\nu_t, -\nu_i)$ лежат в касательной плоскости к F:

$$\sum_{j=1}^{N+1}\tau_j^i\nu_j = \sum_{j=1}^{N}\delta_j^i\nu_t\nu_j - \nu_i\nu_t = \nu_i\nu_t - \nu_i\nu_t = 0$$

Будем называть решение уравнений (1), удовлетворяющее на волновых фронтах условиям (7)-(9), *классическим.*

2. Постановка нестационарных краевых задач

Пусть термоупругая среда занимает область S^-, ограниченную замкнутой поверхностью Ляпунова S с внешней нормалью n. Известно начальное состояние среды: *начальные условия*

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad x \in (S^- + S), \tag{11}$$

где $\dot{u}_i(x,0) = \dot{u}_i^0(x)$, $x \in S^-$ $u^0 \in C(S+S^-)$, $\dot{u}^0 \in C(S+S^-)$. Здесь $C(\dots)$ – класс непрерывных на указанном множестве функций, $C'(\dots)$ – кусочно-непрерывные ограниченные функции.

Рассмотрим следующие начально-краевые задачи.

Задача 1. На границе ($x \in S$) известны действующие нагрузка и тепловой поток:

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x) = g_i^S(x,t), \frac{\partial\,\theta(x,t)}{\partial\,n} = \theta^S(x,t), \tag{12}$$

$$g_i^S \in C'(S \times [0,\infty)),\ \theta^S \in C(S \times [0,\infty))$$

Задача 2. Для $x \in S$ заданы перемещения и температура

$$u_i\,(x,t) = u_i^S\,(x,t)\,, u_i^S(x,0) = u_i^0(x); \theta\,(x,t) = \theta^S\,(x,t)\,, \theta^S(x,0) = \theta^0(x) \tag{13}$$

$$u_i^S \in C(S \times [0,\infty)),\ \theta^S \in C(S \times [0,\infty))$$

Задача 3. Для $x \in S$ заданы перемещения и тепловой поток

$$u_i\,(x,t) = u_i^S\,(x,t)\,, \quad u_i^S(x,0) = u_i^0(x); \quad \frac{\partial\,\theta(x,t)}{\partial\,n} = q^S(x,t). \tag{14}$$

$$u_i^S \in C(S \times [0,\infty)),\ q^S \in C'(S \times [0,\infty))$$

Задача 4. Для $x \in S$ заданы нагрузки и температура

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x) = g_i^S(x,t);\ \ \theta\,(x,t) = \theta^S\,(x,t)\,,\ \ \theta^S(x,0) = \theta^0(x) \tag{15}$$

$$g_i^S \in C'(S \times [0,\infty)),\ \theta^S \in C(S \times [0,\infty))$$

Здесь и всюду далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до N (тензорная свертка).

На фронтах решений удовлетворяются условия на скачки (7)-(9). Предполагается, что число таких фронтов конечно для любого t, и они разбивают область определения решения на конечное число областей, где решения дважды дифференцируемы.

Требуется доказать единственность поставленных начально-краевых задач с учетом термоударных волн.

3. Энергетические соотношения. Единственность решений краевых задач

Для удобства выкладок удобно представить тензор напряжений σ_{ij} в виде –

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} u_{k,l} - \gamma \delta_{ij}\theta \tag{16}$$

где C_{ij}^{kl}– тензор упругих констант, вообще говоря, анизотропной термоупругой среды. Он удовлетворяет условиям симметрии по перестановке любой пары индексов и положительной определенности соответствующей квадратичной формы [18]:

$$C_{ij}^{kl}\varepsilon_k^i\varepsilon_l^j > 0 \quad \text{для} \ \forall\varepsilon_k^i \neq 0. \tag{17}$$

Для изотропной термоупругой среды он имеет вид:

$$C_{ij}^{kl} = \lambda\delta_{ij}\delta^{kl} + \mu\left(\delta_i^k\delta_j^l + \delta_i^l\delta_j^k\right).$$

Введем плотность энергии термоупругой среды

$$\begin{aligned} W(u,\theta,t) = 0,5\left\{\sigma_{ij}u_{i,j} + \rho\,\|\dot{u}\|^2 + \gamma\,\theta\,u_{j,j} + \gamma\,(\eta\kappa)^{-1}\theta^2\right\} = \\ = 0,5\left\{C_{ij}^{kl}u_{i,j}u_{k,l} + \rho\,\|\dot{u}\|^2 + \gamma\,(\eta\kappa)^{-1}\theta^2\right\}, \quad i,j=\overline{1,N}. \end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 1. *Закон сохранения энергии для термоупругой среды имеет вид*:

$$\int_{S^-}(W(u,\theta,t) - W(u,\theta,0))\,dV(x) + \int_0^t dt\int_{S^-}\|grad\,\theta\|^2\,dV(x) =$$

$$= \int_0^t dt\int_S\left((\dot{u}^S, g^S) + \frac{\gamma}{\eta}\theta^S q^S\right)dS(y) + \int_0^t dt\int_{S^-}\left((F,\dot{u}) + \frac{\kappa\gamma}{\eta}\theta F_{N+1}\right)dV(x)$$

$$dV(x) = dx_1...dx_N.$$

Доказательство. В областях дифференцируемости решений умножим первое уравнение системы (3) скалярно на $\dot{u}_i$, а второе - на $\gamma\eta^{-1}\theta$ и просуммируем по i от 1 до N. Группируя члены, получим

$$\begin{aligned} \left(\dot{u}_i\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j}\right)_{,j} - \dot{u}_{i,j}\sigma_{ij} - \gamma\eta^{-1}\theta_{,j}\theta_{,j} - 0,5\rho\partial_t\|\dot{u}\|^2 - \\ -0,5\gamma\,(\eta\kappa)^{-1}\,\partial_t\theta^2 - \gamma\theta\dot{u}_{j,j} + \dot{u}_iF_i + \gamma\kappa\eta^{-1}\theta F_{N+1} = 0 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\dot{u}_{i,j}\sigma_{ij} = 0,5\left(C_{ij}^{kl}u_{i,j}u_{k,l}\right)_{,t} - \gamma\theta\dot{u}_{i,j},$$

равенство преобразуется к виду:

$$\left(\dot{u}_i\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j}\right)_{,j} - W_{,t} - \gamma\eta^{-1}\,\|grad\theta\|^2 + \dot{u}_jF_j + \gamma\kappa\eta^{-1}\theta F_{N+1} = 0.$$

Проинтегрируем по $S^- \times (0,t)$, используя формулу Остроградского-Гаусса [19] для каждой из подобластей, разделенных фронтами термоударных волн:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt\int_S\left(\dot{u}_{i,j}\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j}\right)n_j dS(y) - \int_{S^-}(W(u,\theta,t) - W(u,\theta,0))\,dV(x) - \\ -\gamma\eta^{-1}\int_0^t dt\int_{S^-}\|grad\,\theta\|^2\,dV(x) + \sum_F\int_F\left[\left(\dot{u}_i\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j}\right)\nu_j - \right. \\ \left. - W(u,\theta,t)\,\nu_t\right]_F dF(x) + \int_0^t dt\int_{S^-}(\dot{u}_jF_j + \gamma\kappa\eta^{-1}\theta F_{N+1})dV(x) = 0. \end{aligned}$$

Здесь dF – дифференциал площади характеристической поверхности F в $R^N \times t$, соответствующей волновому фронту F_t в R^N, Поскольку внешняя нормаль ограничивающей подобласти поверхности волнового фронта отличается только знаком, при интегрировании по граничным поверхностям в смежных областях в подынтегральных выражениях стоят скачки соответствующих функций на фронтах.

Вычислим эти скачки. Для этого используем условия на фронтах (7)-(10):

$$\left[\left(\dot{u}_i\sigma_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j}\right)\,\nu_j-W\left(u,\theta,t\right)\,\nu_t\right]=$$

$$=0,5\left[\dot{u}_i\left(\sigma_{ij}\nu_j-\rho\dot{u}_i\nu_t\right)\right]-0,5\left[\sigma_{ij}\left(\nu_t u_{i,j}-\dot{u}_i\nu_j\right)\right]+\gamma\eta^{-1}\left[\theta\theta_{,j}\,\nu_j-0,5\nu_t\left(\eta\theta u_{j,j}+\kappa^{-1}\theta^2\right)\right]=$$

$$=0,5\dot{u}_i^-\left[\sigma_{ij}\nu_j-\rho\dot{u}_i\nu_t\right]\dot{u}_i^-+0,5\sigma_{ij}^-\nu_j\left[\dot{u}_i\right]-0,5\nu_t u_{i,j}^- C_{ij}^{kl}\left[u_{k,l}\right]+$$

$$+0,5\nu_t u_{i,j}^-\gamma\left[\theta\right]\delta_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\left[\theta_{,j}\,\nu_j\right]-0,5\gamma\theta\nu_t\left[u_{j,j}\right]=$$

$$=0,5\sigma_{ij}^-\left[\nu_j\dot{u}_i-\nu_t u_{i,j}\right]-0,5\gamma\nu_t\theta\left[u_{j,j}\right]+\gamma\eta^{-1}\theta\left[\theta_{,j}\nu_j\right]-0,5\gamma\theta\nu_t\left[u_{j,j}\right]=$$

$$=\gamma\eta^{-1}\theta\left[(\theta_{,j}-\eta\dot{u}_j)\nu_j+\eta(\dot{u}_j\nu_j-\nu_t u_{j,j})\right]=0 \qquad (19)$$

Здесь верхние индексы «+» и «−» обозначают предельные значения соответствующих функций с одной и другой стороны волнового фронта.

Интегрируем по поверхностям всех волновых фронтов в области интегрирования. Окончательно получим:

$$\int_0^t dt\int_S\left(\dot{u}_{i,j}\sigma_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j}\right)n_j dS\left(y\right)+\int_0^t dt\int_{S^-}\left(F_j\dot{u}_j+\gamma\eta^{-1}\kappa\theta F_{N+1}\right)dV\left(x\right)=$$

$$=\int_{S^-}\left(W\left(u,\theta,t\right)-W\left(u,\theta,0\right)\right)dV\left(x\right)+\int_0^t dt\int_{S^-}\left\|grad\,\theta\right\|^2 dV\left(x\right)$$

Используя введенные обозначения для граничных функций, отсюда получим закон сохранения энергии.

Из этой теоремы следует

Теорема 2. *Скачок плотности энергии на фронтах термоударных волн равен*

$$\left[W\left(u,\theta,t\right)\right]_F=-c^{-1}\left[\left(\dot{u},\sigma_{ij}n_ie_j\right)+\gamma\eta^{-1}\theta(grad\theta,n)\right]_F$$

Доказательство. Равенство следует из (19) с учетом (5) и (6).

Из теоремы 1 также следует единственность решения поставленных краевых задач.

Теорема 2. *Если решение начально-краевой задачи* 1 (*или* 2,3,4) *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения $\left(u^k,\theta^k\right)(k{=}1{,}2)$. Тогда их разность $(u,\theta)=(u^1,\theta^1)-(u^2,\theta^2)$ удовлетворяет нулевым краевым и начальным условиям для каждой из поставленных начально-краевых задач. Соответствующие ей $F_i=0$, $Q{=}0$. И это верно для любой из поставленных четырех задач. Тогда для (u,θ) из теоремы 1 имеем:

$$\int_{S^-}W\left(u,\theta,t\right)dV\left(x\right)+\int_0^t dt\int_{S^-}\left\|grad\,\theta\right\|^2 dV\left(x\right)=0.$$

В силу положительности подынтегральных выражений (17), (18), отсюда следует, что $u\equiv 0,\ \theta\equiv 0$, то есть $(u^1,\theta^1)=(u^2,\theta^2)$. Теорема доказана.

Заключение. Ударные волновые процессы широко распространены в природе. Приложение любой нагрузки к покоящемуся телу или среде приводит к появлению деформаций, распространяющихся в среде в виде слабых или сильных ударных волн, скорость распространения которых зависит от вида деформации, которая зависит от типа приложенной нагрузки, а в анизотропных средах еще и от направления движения фронта волны. Поэтому очень важно исследование такого типа процессов в деформируемых твердых средах. Решение соответствующих краевых задач требует привлечения аппарата теории обобщенных функций, т.к. фундаментальные решения динамических уравнений принадлежат классу обобщенных функций. При этом аппарат теории обобщенных функций позволяет сравнительно легко работать с ударными волнами, что очень сложно делать при методах классического анализа. Подробно читатель может познакомиться с методом обобщенных функций (МОФ) в [15,21], который можно также успешно использовать для решения эллиптических и смешанных задач. В частности, на основе этого метода, в статье [10] разработан метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) для решения краевых задач термоупругости в пространстве преобразований Лапласа по времени (параметрическая эллиптическая задача). На основе этого метода можно также разработать МГИУ для решения поставленных здесь задач термоупругости в исходном пространстве-времени и с его помощью решить вопрос о существовании решений этих задач.

Список литературы

[1] *Гюнтер Н.М.* Теория потенциалов и её применение к основным задачам математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953.

[2] *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Наука, 1963. – 472 с.

[3] *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 379 с.

[4] *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976. – 664с.

[5] *Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Жанбырбаев* Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т.63, № 5. – С. 853-859

[6] *Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т.65, № 2. – С.334-345.

[7] *Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К.* Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т.37, №4. – СС.488-494.

[8] *Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К.* Обобщенные решения начально-краевых задач для гиперболических систем второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т.51, №.7. – С. 1280-1293.

[9] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – М.: Наука, 1970. – 256 с.

[10] *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

List of references

[1] *Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K.* Generalized Solutions of Boundary Value Problems of Dynamics of Anisotropic Elastic Media // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. – 2005. – Vol. 16, № 4-5. – PP. 259-267

[2] *Crouch S.L., Sharp S.* Boundary integral methods for thermoelasticity problems // Trans. ASME: J. Appl. Mech., – 1986, – Vol.53, № 2, – pp.298-302

[3] *Sah J., Tasaka N.* Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using placeLaplace transformation // Boundary Elem. Meth. Appl. Mech. Proc 1st Joint CityplaceJap., country-regionUS Symp. Boundary Elem. Meth., CityplaceTokyo, 3-6 Oct, – 1988, – pp. 335-544

[4] *Fleurier J., Predeleanu M.* On the use of coupled fundamental solutions in boundary element method for thermoelastic problems // Eng. Anal., – 1987, – Vol 4, № 2, – pp.70-74

[5] *Alexeyeva L.A., Dadaeva A.N.* Boundary Element Method for transient problems of uncoupled thermoelastodynamics. Boundary Element XIX. Computational Mechanics Publication. – 1997. – pp. 118-125.

[6] *Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zakiryanova G.K., Zhanbyrbaev A.B.* Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional problems of elastodynamics // Computational mechanics. – 1996. – Vol.18 . – PP. 147-157.

[7] *Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Купесова В.В.* Boundary integral equations generalized solutions of transient problems of thermo-elastodynamics // Proceedings, 3rd International Mechanical Vibrations (ISMV-2002, CityplaceIslamabad, country-regionPakistan). – 2002. – pp 23.

Поступила в редакцию 11 января 2013 года