УДК 517.938

С.А. Айсагалиев, Ж.К. Айсагалиев

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Исследование по математическому программированию

Предлагается единый метод решения задач математического программирования в евклидовом пространстве. Метод основан на последовательном сужении области допустимых решений и ориентирован на применение современных компьютеров. Рассмотрены, в отдельности, результаты исследования общей задачи линейного программирования, выпуклого и нелинейного программирования.
Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи математического программирования путем замены исходных задач математического программирования на равносильные задачи с функциями цели, ограниченные снизу, в отдельности, для указанных задач.
Построены минимизирующие последовательности, предельные точки которых являются решениями общей задачи линейного программирования, выпуклого и нелинейного программирования, получены оценки скорости сходимости. Приведены решения примеров.
Научная ценность полученных результатов состоит в том, что: метод применим как к вырожденным, так и невырожденным задачам математического программирования, нет необходимости определения крайних точек и осуществить переход от одной крайней точки в другую, зачастую связанной с зацикливанием; решения задач выпуклого и нелинейного программирования не связаны с поиском седловой точки функции Лагранжа, не требуются условия существования седловых точек.
Создание новых эффективных методов решения задач математического программирования является актуальным для решения задач экономики, естественных наук, техники и информационных технологий.
Ключевые слова: {Математическое программирование, линейное программирование, выпуклое программирование, нелинейное программирование, оптимизационная задача, минимизирующая последовательность, предельные точки.}

S.A. Aisagaliev, Zh.K. Aisagaliev
Research on mathematical programming

Unified solving method for mathematical programming problems in Euclid space is developed. The method is based on sequential narrowing of admissible solutions set and oriented on using of modern computers. Results of investigation for a general problem of linear programming, convex programming problem and nonlinear programming problem are considered separately.

Necessary and sufficient conditions of solution existence for mathematical programming problem are obtained for mentioned problems separately by reducing of given problem to equivalent problem with bounded below target function.

Minimizing sequences such that accumulation point of them are solutions for general problem of linear programming, convex programming problem and nonlinear programming problem are constructed. Estimates of the convergence rates are obtained. Solving of examples by developed method using is adduced.

The scientific value of obtained results is the method is applicable to both confluent and nonsingular mathematical programming problems: it is not necessary to find an extreme point and to go on to the next point, which leads to circularity in most cases; convex programming problem and nonlinear programming problem solving are not related to finding saddle value of Lagrange function, saddle value existence conditions are not necessary.

Developing of new effective solution methods for mathematical programming problems is topical for solving of economics, natural sciences, engineering and information technologies problems.

Key words: {Mathematical programming, linear programming, convex programming, nonlinear programming, optimization problem, minimizing sequence, limit points.}

С.Ә. Айсағалиев, Ж.К. Айсағалиев

Математикалық программалау бойынша зерттеу

Евклид кеңістігінде математикалық программалау есептерін шешудің біртұтас әдісі ұсынылады. Әдіс мүмкін болатын шешімдердің жиынын біртіндеп жуықтауға негізделген және заманауи компьютерлерді қолдануға бағытталған. Сызықты программалаудың жалпы есебін, дөңес және сызықты емес программалау есептерін зерттеу нәтижелері жеке келтірілген.

Көрсетілген есептер үшін берілген есепті мақсаттық функциясы төменнен шектелген пара-пар есеппен ауыстыру жолымен математикалық программалау есебінің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Шектік нүктелері сызықты программалаудың жалпы есебінің, дөңес және сызықты емес программалау есептерінің шешімдері болып табылатын минимумдаушы тізбектер құрылып, жинақталу жылдамдығының бағасы алынған. Мысалдардың шығарылуы келтірілген.

Алынған нәтижелердің ғылыми құндылығы әдістің математикалық программалаудың ерекше де ерекше емес те есептерін шешуге қолданылатындығында; көп жағдайда циклдануға әкелетін бұрыштық нүктелерді тауып, олардың бірінен екіншісіне көшу қажеттігінің жоқтығында; дөңес және сызықты емес программалау есептерінің шешілуі Лагранждың қайқы нүктесін іздеумен байланысты емес және қайқы нүктенің бар болуының шарттарының қажетсіздігінде.

Математикалық программалау есептерін шешудің жаңа эффективті әдістерін құру экономиканың, жаратылыстану ғылымдарының, техниканың және ақпараттық технологиялардың есептерін шешу үшін өзекті мәселе болып табылады.

Түйін сөздер: {Математикалық программалау, сызықты программалау, дөңес программалау, сызықты емес программалау, тиімділік есебі, минимумдаушы тізбек, шектік нүктелер.}

Введение. Выпуклый анализ раздела математики, где изучаются свойства выпуклых множеств и функций. Основания выпуклого анализа были заложены в работах

Минковского, Фенхеля, Хана, Банаха, Крейна, Мильмана. В шестидесятые годы XX века начался новый этап в развитии выпуклого анализа, который привел к созданию теории выпуклых функций и в результате возникла общая теория выпуклого анализа. Книга американского математика Р.Т.Рокафеллара [1] - первая монография посвященная выпуклому анализу.

Выпуклый анализ играет огромную роль для решения задач математического программирования (линейного, выпуклого и нелинейного программирования), теории игр и теории оптимальных процессов.

Исследование задачи линейного программирования берет свое начало с работы Дж. фон Неймана, О. Моргенштерна. Ряд задач линейного программирования и метод их решения предложен Л.В. Канторовичем. Основным методом решения задач линейного программирования является симплекс - метод разработанный Дж. Данцигом, получивший развитие в работах А.Чарнса, Л.Форда, Д.Фалкерсона. Основы линейного программирования и численные методы решения приведены в [2]. Симплекс метод применим для решения невырожденных задач линейного программирования в каноническом виде и имеет ряд недостатков: во-первых, приведение общей задачи линейного программирования к каноническому виду требует введение дополнительных переменных, когда отсутствуют ограничения на значения искомых переменных. Это приводит к увеличению числа крайних точек, к росту числа итераций; во-вторых, в случае, когда ранг матрицы условий меньше числа ограничений задача линейного программирования становится вырожденной. Для решения таких задач симплекс - метод не применим; в третьих, американские ученые В. Кли, Дж.Минти построили пример задачи линейного программирования с n переменными и $2n$ ограничениями, для решения которого требуется не менее $2^n - 1$ итераций симплекс метода, т.е. симплекс метод является алгоритмом "экспоненциальной трудности". Поэтому представляет интерес разработка новых методов решения общей задачи линейного программирования без приведения их к каноническому виду, ориентированные на применение современных средств вычислительной техники.

Как известно [3] поиск наименьшего значения выпуклой функции, определенной на выпуклом множестве, сводится к определению седловой точки функции Лагранжа. При таком подходе к решению задачи выпуклого программирования возникает необходимость наложить дополнительные требования на исходные данные задачи, что снижает эффективность метода множителей Лагранжа. Теоремы Куна-Таккера [1], гарантирующие существования седловой точки функции Лагранжа, являются достаточными условиями. Существуют множества задач выпуклого программирования, которые имеют решения, однако соответствующие функции Лагранжа не имеют седловых точек. Поэтому актуальным является поиск новых методов решения задачи выпуклого программирования без каких-либо множителей Лагранжа и не прибегая к существованию седловой точки функции Лагранжа.

Для задачи нелинейного программирования не имеется аналогичных теорем, как для задачи выпуклого программирования, гарантирующих существование седловой точки обобщенной функции Лагранжа. Нелинейное программирование относится к малоизученной области математического программирования.

1. Постановка задачи

Общая задача линейного программирования имеет вид

$$I(u) =< c, u >= c^*u \to \inf \tag{1}$$

$$u \in U = \{u \in R^n \ / \ u \in U_0, \ Au - b \leq 0, \ \bar{A}u - \bar{b} = 0\}, \tag{2}$$

где $c \in R^n$, $b \in R^m$, $\bar{b} \in R^s-$ заданные векторы, A, $\bar{A}-$ заданные матрицы порядков $m \times n$, $s \times n$ соответственно, множество $U_0 = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n / u_j \geq 0, j \in I \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$, (*)-знак транспонирования.

Задача 1. Найти необходимое и достаточное условие существования решения общей задачи линейного программирования (1), (2).

Задача 2. Найти новый эффективный метод построения решения общей задачи линейного программирования (1), (2).

Общая задача линейного программирования (1), (2) может быть решена симплекс-методом после приведения ее к каноническому виду, путем введения вспомогательных переменных υ_j, q_j, $j \notin I$, где $u_j = \upsilon_j - q_j$, $j \notin I$, $\upsilon_j \geq 0$, $q_j \geq 0$. Однако это приводит к увеличению числа переменных, не говоря о недостатках симплекс метода в целом, указанные выше.

Часто на практике встречаются задачи выпуклого программирования следующего вида:

$$I(u) \to \inf, \tag{3}$$

$$u \in U = \{u \in R^n / u \in U_0, g_i(u) \leq 0, i = \overline{1, m}, g_i(u) =< a_i, u > -b_i = 0, i = \overline{m+1, s}\}, \tag{4}$$

где $I(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1, m}-$ выпуклые функции, определенные на выпуклом множестве U_0, $a_i \in R^n$, $i = \overline{m+1, s}-$ заданные векторы.

Заметим, что один из методов решения задачи (3), (4) является метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (3), (4) имеет вид

$$\mathscr{L}(u, \lambda) = I(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u), \ u \in U_0, \ \lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in R^s \ / \ \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}. \tag{5}$$

Если пара $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda_0-$ седловая точка функции Лагранжа (5), т.е. $\mathscr{L}(u_*, \lambda) \leq$ $\leq \mathscr{L}(u_*, \lambda^*) \leq \mathscr{L}(u, \lambda^*)$, $\forall u \in U_0$, $\forall \lambda \in \Lambda_0$, то $u_* \in U-$ решение задачи (3), (4). Здесь возникают следующие проблемы: во-первых, задача (3), (4) имеет ли решение, когда функция Лагранжа не имеет седловую точку; во-вторых, при выполнении дополнительно каких требований функция Лагранжа имеет седловую точку. Можно привести много примеров для случаев, когда задача (3), (4) имеет решение, однако функция Лагранжа (5) не имеет седловую точку. Как следует из работ Куна, Таккера для того, чтобы функция Лагранжа (5) имела седловую точку достаточно, чтобы выполнялось условие регулярности, т.е. существовала точка $\bar{u} \in U_0$ такая, что $g_i(\bar{u}) < 0$, $i = \overline{1, m}$. Это дополнительное требование к исходным данным задачи. Поэтому актуальными являются решения следующих задач:

Задача 3. Найти необходимое и достаточное условие существования решения задачи выпуклого программирования (3), (4).

Задача 4. Найти новый эффективный метод решения задачи выпуклого программирования (3), (4).

Рассмотрим задачу нелинейного программирования следующего вида:

$$I(u) \to \inf \tag{6}$$

$$u \in U = \{u \in R^n \,/\, u \in U_0,\ g_i(u) \le 0,\ i = \overline{1,m},\ g_i(u) = 0,\ i = \overline{m+1,s}\}, \tag{7}$$

где $I(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,s}-$ заданные функции, определенные на выпуклом множестве $U_0 \subset R^n$.

Задача 5. Найти необходимое и достаточное условие существования решения задачи нелинейного программирования (6), (7), где $I(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,s}$, $u \in U_0-$ любые заданные функции.

2. Исследование по линейному программированию

Рассмотрим общую задачу линейного программирования (1), (2).

Лемма 1 *Пусть множество* $U_* = \{u_* \in U \,/\, I(u_*) = \gamma_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)\} \ne \emptyset$. *Тогда разность* $I(u) - \gamma \ge 0$ *при всех* $u \in U$, *для любого*

$$\gamma \in \Gamma = \{\gamma \in R^1 \,/\, a \le \gamma \le \gamma_*\},$$

где $a \le \gamma_*-$ *любое число.*

Доказательство. Так как $I(u) \ge \gamma_*$, $\forall u, u \in U$, то $I(u) - \gamma \ge \gamma_* - \gamma$, где $\gamma-$ любое число. Отсюда следует $I(u) - \gamma \ge 0$, $\forall u, u \in U$, если $\gamma_* - \gamma \ge 0$. Следовательно, $\gamma \le \gamma_*$. Пусть $a-$ некоторое число, $a \le \gamma_*$. Тогда $I(u) - \gamma \ge 0$ $\forall u, u \in U$ в любом выпуклом множестве $\Gamma = \{\gamma \in R^1 \,/\, a \le \gamma \le \gamma_*\}$, где $\gamma \in \Gamma$. Лемма доказана.

По исходным данным задачи (1), (2) определим функцию

$$\Phi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [Au - b + d]^*[Au - b + d] + [\bar{A}u - \bar{b}]^*[\bar{A}u - \bar{b}], \tag{8}$$

где

$$u \in U_0, \ \ \gamma \in \Gamma, \ \ d \in D = \{d \in R^m \,/\, d \ge 0\}.$$

Пусть $\upsilon = (u, \gamma, d)$, множество $V = U_0 \times \Gamma \times D$. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\Phi(\upsilon) \to \inf, \ \ \upsilon \in V, \tag{9}$$

где функция $\Phi(\upsilon) = \Phi(u, \gamma, d)$ определяется по формуле (8). Пусть $V_* = \{\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in \in V \,/\, \Phi(\upsilon_*) = \Phi_* = \inf\limits_{\upsilon \in V} \Phi(\upsilon)\}$.

Теорема 1 *Пусть* $u_* \in U_* \subset U-$ *решение задачи (1), (2). Тогда*

$$\upsilon_* = (u_*, \gamma_* = I(u_*),\ d_* = Au_* - b) \in V_*$$

-решение задачи (9) соответствующее значению $\Phi(\upsilon_*) = 0$.

Обратно, если $\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ *– решение задачи (9) при* $\Phi(\upsilon_*) = 0$, *то* $u_* \in U_* \subset U$ *– решение задачи (1), (2).*

Если значение $\Phi(\upsilon_*) > 0$, *то задача (1), (2) не имеет решения.*

Доказательство. Пусть $u_* \in U_*$ – решение задачи (1), (2), где $I(u_*) = I_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)$. Следовательно, $u_* \in U_0$, $Au_* - b \leq 0$, $\bar{A}u_* - \bar{b} = 0$. Выберем $\gamma_* = I(u_*)$, $d_* = -Au_* + b \geq 0$. Тогда $\Phi(\upsilon_*) = [I(u_*) - \gamma_*]^2 + [Au_* - b + d_*][Au_* - b + d_*] + [\bar{A}u_* - \bar{b}]^*[\bar{A}u_* - \bar{b}] = 0$. Так как значение $\Phi(\upsilon) \geq 0$, $\forall \upsilon$, $\upsilon \in V$, то $\Phi(\upsilon_*) = \inf\limits_{\upsilon \in V} \Phi(\upsilon) \geq 0$.

Отсюда следует, что $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V$ – решение задачи (9) при $\Phi(\upsilon_*) = 0$. Первая часть теоремы доказана.

Значение $\Phi(\upsilon_*) = 0$ тогда и только тогда, когда $I(u_*) - \gamma_* = 0$, $Au_* - b + d_* = 0$, $\bar{A}u_* - \bar{b} = 0$, $u_* \in U_0$, $\gamma_* \in \Gamma$, $d_* \in D$. Так как $Au_* - b = -d_* \leq 0$, $\bar{A}u_* - \bar{b} = 0$, $u_* \in U_0$, то $u_* \in U$. Из $I(u_*) - \gamma_* = 0$, $u_* \in U$ следует, что $\gamma_* = I_*$. Итак, $I(u_*) = \gamma_* = I_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)$. Следовательно, $u_* \in U_*$– решение задачи (1), (2).

Если $\Phi(\upsilon_*) > 0$, то: либо $[I(u_*) - \gamma_*] > 0$; либо $[Au_* - b + d_*]^*[Au_* - b + d_*] > 0$; либо $[\bar{A}u_* - \bar{b}]^*[\bar{A}u_* - \bar{b}] > 0$. Отсюда следует, что: либо $I(u_*) \neq \gamma_*$; либо $Au_* - b + d_* \neq 0$; либо $\bar{A}u_* - \bar{b} \neq 0$. Следовательно, $u_* \notin U$. Это означает, что задача (1), (2) не имеет решения. Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть U_0– выпуклое множество. Тогда:*

1) множество $V = U_0 \times \Gamma \times D$ выпукло.

2) функция $\Phi(\upsilon)$ определенная на выпуклом множестве V является выпуклой функцией, т.е.

$$\Phi(\alpha\upsilon_1 + (1-\alpha)\upsilon_2) \leq \alpha\Phi(\upsilon_1) + (1-\alpha)\Phi(\upsilon_2),\ \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in V,\ \forall \alpha, \alpha \in [0,1].$$

3) если для некоторой заданной точки $\varpi \in V$ множество

$$M(\varpi) = \{\upsilon \in V \ / \ I(\upsilon) \leq I(\varpi)\}$$

ограничено, то множество V_* непусто, компактно и любая минимизирующая последовательно $\{\upsilon_n\} \subset M(\varpi)$ сходится к множеству V_*.

Доказательство. Пусть $\upsilon_1 = (u_1, \gamma_1, d_1) \in V$, $\upsilon_2 = (u_2, \gamma_2, d_2) \in V$ и число $\alpha \in [0,1]$. Тогда $\alpha\upsilon_1 + (1-\alpha)\upsilon_2 = (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2,\ \alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2,\ \alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) \in V$ в силу того, что $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U_0$, $\alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2 \in \Gamma$, $\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2 \in D$, где U_0, Γ, D – выпуклые множества.

Поскольку $\Phi(\upsilon) \in C^2(V)$, то необходимое и достаточное условие выпуклости $\Phi(\upsilon)$ на V имеет вид

$$< \Phi''(\upsilon)\xi, \xi > \geq 0,\ \forall \upsilon,\ \upsilon \in V,\ \forall \xi,\ \xi \in R^{n+1+m}.$$

Как следует из (8) функция $\Phi(\upsilon) = \upsilon^* Q \upsilon + q\upsilon + b^*b + \bar{b}^*\bar{b}$, где матрица

$$Q = \begin{pmatrix} cc^* + A^*A + \bar{A}^*\bar{A} & -c & A^* \\ -c^* & 1 & 0 \\ A & 0 & I_m \end{pmatrix} = Q^* \geq 0,\ q = \begin{pmatrix} -2A^*b - 2\bar{A}^*\bar{b} \\ 0 \\ -2b \end{pmatrix}^*,$$

то $\Phi''(\upsilon) = 2Q \geq 0$, $\forall \upsilon$, $\upsilon \in V$. Отсюда следует, что функция $\Phi(\upsilon)$ является выпуклой на выпуклом множестве V.

Поскольку $\Phi(\upsilon) \in C^2(V)$, то множество $M(\varpi)$ замкнуто. По условию теоремы $M(\varpi)$ – ограничено. Следовательно, множество $M(\varpi)$ компактно на V. Тогда согласно теореме Вейерштрасса множество $V_* \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество. Пусть $\{\upsilon_k\} \subset M(\varpi)$ –

минимизирующая последовательность, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(\upsilon_k)=\Phi_*=\inf\limits_{\upsilon\in V}\Phi(\upsilon)$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\upsilon_k=\upsilon_*\in V_*$.

Заметим, что минимизирующая последовательность всегда существует.

Пусть υ_*- любая предельная точка $\{\upsilon_k\}$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\upsilon_{k_m}\}\subset M(\varpi)$, для которой $\lim\limits_{m\to\infty}\upsilon_{k_m}=\upsilon_*$. В силу компактности множества $M(\varpi)$ все предельные точки минимизирующей последовательности принадлежат множеству $M(\varpi)$.

Как следует из определения нижней грани и непрерывности $\Phi(\upsilon)$ на V верны неравенства

$$\Phi_*\le\Phi(\upsilon_*)\le\lim_{m\to\infty}\Phi(\upsilon_{k_m})=\lim_{k\to\infty}\Phi(\upsilon_k)=\Phi_*.$$

Следовательно, $\Phi(\upsilon_*)=\Phi_*=\inf\limits_{\upsilon\in V}\Phi(\upsilon)$. Отсюда следует, что множество $V_*\ne\emptyset$ и любая минимизирующая последовательность сходится к V_*. Легко убедиться в том, что множество V_* компактно. Теорема доказана.

Лемма 2 *Производная* $\Phi'(\upsilon)=(\Phi'_u(\upsilon),\Phi'_\gamma(\upsilon),\Phi'_d(\upsilon))$, *где*

$$\begin{gathered}\Phi'_u(\upsilon)=(2cc^*+2A^*A+2\bar A^*\bar A)u-2c_\gamma+2A^*d-2A^*b-2\bar A^*\bar b,\\ \Phi'_\gamma(\upsilon)=-2(c^*u-\gamma),\ \ \Phi'_d(\upsilon)=2(Au-b+d)\end{gathered}\tag{10}$$

удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|\le L|\upsilon_1-\upsilon_2|,\ \ \forall\upsilon_1,\upsilon_2\in V.\tag{11}$$

Доказательство. Как следует из выражения $\Phi(\upsilon)=\upsilon^*Q\upsilon+q\upsilon+b^*b+\bar b^*\bar b$, производная $\Phi'(\upsilon)=2Q\upsilon+q$, $\upsilon\in V$. Отсюда следует формула (10). Так как

$$\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)=(\Phi'_u(\upsilon_1)-\Phi'_u(\upsilon_2),\Phi'_\gamma(\upsilon_1)-\Phi'_\gamma(\upsilon_2),\Phi'_d(\upsilon_1)-\Phi'_d(\upsilon_2)),$$

то

$$\begin{gathered}|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|\le|\Phi'_u(\upsilon_1)-\Phi'_u(\upsilon_2)|+|\Phi'_\gamma(\upsilon_1)-\Phi'_\gamma(\upsilon_2)|+|\Phi'_d(\upsilon_1)-\Phi'_d(\upsilon_2)|\le\\ \le l(|u_1-u_2|+|\gamma_1-\gamma_2|+|d_1-d_2|),\ \ l=max\{\|2cc^*+2A^*A+2\bar A^*\bar A\|+2\|c^*\|+\\ +2\|A^*A\|,\ 2\|c\|+2,\ 4\|A^*\|\}.\end{gathered}$$

Отсюда, используя оценку $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$, получим

$$|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|^2\le 4l^2(|u_1-u_2|^2+|\gamma_1-\gamma_2|^2+|d_1-d_2|^2).$$

Следовательно, $|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|\le L(|u_1-u_2|^2+|\gamma_1-\gamma_2|^2+|d_1-d_2|^2)^{1/2}$, где $L=2l$. Отсюда следует неравенство (11). Лемма доказана.

На основе формул (10), (11) строим последовательности $\{u_n\},\{d_n\},\{\gamma_n\}$ по следующему алгоритму:

$$\begin{gathered}u_{n+1}=P_{U_0}[u_n-\alpha_n\Phi'_u(\upsilon_n)],\ \ \gamma_{n+1}=P_\Gamma[\gamma_n-\alpha_n\Phi'_\gamma(\upsilon_n)],\\ d_{n+1}=P_D[d_n-\alpha_n\Phi'_d(\upsilon_n)],\ \ n=0,1,2,\dots,0<\varepsilon_0\le\alpha_n\le\frac{2}{L+2\varepsilon_1},\ \varepsilon_1>0,\end{gathered}\tag{12}$$

где $L=const>0-$ постоянная Липшица из (11).

Теорема 3 *Пусть выполнены условия теоремы 2, последовательности* $\{u_n\} \subset U_0$, $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$, $\{d_n\} \subset D$ *определяются по формуле (12), множество* $M(\upsilon_0) = \{\upsilon \in V / \Phi(\upsilon) \le \Phi(\upsilon_0)\}$ *ограничено. Тогда:*

1) последовательность $\{\upsilon_n\} = \{u_n, \gamma_n, d_n\} \subset M(\upsilon_0)$ *является минимизирующей, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(\upsilon_n) = \Phi_* = \inf\limits_{\upsilon \in V} \Phi(\upsilon)$;

2) последовательность $\{\upsilon_n\} \subset V$ *сходится к множеству* V_*, $V_* \neq \emptyset$, *т.е.* $u_n \to u_*$, $\gamma_n \to \gamma_*$, $d_n \to d_*$ *при* $n \to \infty$, $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$;

3) справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \le \Phi(\upsilon_n) - \Phi_* \le \frac{c^2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{n}, \tag{13}$$

где $c = \sup\limits_{\upsilon \in M(\upsilon_0)} |\Phi'(\upsilon)| + \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{d}$, $\bar{d}-$ *диаметр множества* $M(\upsilon_0)$;

4) общая задача линейного программирования (1), (2) имеет решение тогда только тогда, когда $\Phi(\upsilon_*) = \Phi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$, *где* $u_* \in U-$ *решение общей задачи линейного программирования;*

5) если значение $\Phi(\upsilon_*) > 0$, *то общая задача линейного программирования (1), (2) не имеет решения.*

Доказательство. Поскольку $\upsilon_{n+1} \in V$ является проекцией точки $\upsilon_n - \alpha_n \Phi'(\upsilon_n) \in \in R^{n+1+m}$, то $< \upsilon_{n+1} - \upsilon_n + \alpha_n \Phi'(\upsilon_n), \ \upsilon - \upsilon_{n+1} > \ge 0$, $\forall \upsilon, \ \upsilon \in V$. Отсюда получим

$$< \Phi'(\upsilon_n), \upsilon - \upsilon_{n+1} > \ge \frac{1}{\alpha_n} < \upsilon_n - \upsilon_{n+1}, \upsilon - \upsilon_{n+1} >, \ \forall \upsilon, \ \upsilon \in V, \ n = 0, 1, 2, \dots. \tag{14}$$

Поскольку функция $\Phi(\upsilon) \in C^{1,1}(V)$, то справедливо неравенство

$$\Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_{n+1}) \ge < \Phi'(\upsilon_n), \upsilon_n - \upsilon_{n+1} > -\frac{L}{2}\|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}\|^2, \ \forall \upsilon_n, \upsilon_{n+1} \in V. \tag{15}$$

Из (14), (15), с учетом неравенства $0 \le \varepsilon_0 \le \alpha_n \le 2/(L + 2\varepsilon_1)$, имеем

$$\begin{gathered} \Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_{n+1}) \ge (\frac{1}{\alpha_n} - \frac{L}{2})|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|^2 \ge \varepsilon_1 |\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|^2, \ \varepsilon_1 > 0, \\ \forall \upsilon_n, \upsilon_{n+1} \in V, \ n = 0, 1, 2, \dots. \end{gathered} \tag{16}$$

Из (16) следует, что числовая последовательность $\{\Phi(\upsilon_n)\}$ строго убывает, и она сходится в силу того, что функция $\Phi(\upsilon) \ge 0$, $\forall \upsilon, \ \upsilon \in V$ ограничена снизу. Тогда $\lim\limits_{n\to 0}[\Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_{n+1})] = 0$ и из (16) имеем $|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}| \to 0$ при $n \to \infty$. Множество $M(\upsilon_0)$ – компактно, $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$ в силу того, что $\Phi(\upsilon_{n+1}) < \Phi(\upsilon_n) < \dots < \Phi(\upsilon_1) \le \Phi(\upsilon_0)$, где $\upsilon_0 \in V-$ начальная точка для последовательности $\{\upsilon_n\} \subset V$. Множество $V_* \subset M(\upsilon_0)$ и функция $\Phi(\upsilon)$ достигает нижней грани на множестве $M(\upsilon_0)$. Следовательно, $V_* \neq \emptyset$. Легко убедиться в том, что множество $M(\upsilon_0)$ выпукло.

Покажем, что последовательность $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$ минимизирующая. Поскольку функция $\Phi(\upsilon) \in C^1(M(\upsilon_0))$ выпукла на выпуклом множестве $M(\upsilon_0)$, то необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\Phi(\upsilon) - \Phi(\varpi) \ge < \Phi'(\varpi), \upsilon - \varpi >, \ \forall \upsilon, \varpi \in M(u_0).$$

Отсюда следует

$$\Phi(\varpi) - \Phi(\upsilon) \leq < \Phi'(\varpi), \varpi - \upsilon >, \ \forall \upsilon, \varpi \in M(u_0). \tag{17}$$

Из (17), в частности, когда $\upsilon = \upsilon_* \in M(\upsilon_0)$, $\varpi = \upsilon_n \in M(u_0)$, имеем

$$0 \leq \Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_*) \leq < \Phi'(\upsilon_n), \upsilon_n - \upsilon_* > = < \Phi'(\upsilon_n), \upsilon_n - \upsilon_{n+1} > -$$

$$- < \Phi'(\upsilon_n), \upsilon_{n+1} - \upsilon_* > \leq < \Phi'(\upsilon_n), \upsilon_n - \upsilon_{n+1} > - \frac{1}{\alpha_n} < \upsilon_n - \upsilon_{n+1}, \upsilon_* - \upsilon_{n+1} >,$$

в силу неравенства (14). Следовательно

$$0 \leq a_n = \Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_*) \leq < \Phi'(\upsilon_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\upsilon_* - \upsilon_{n+1}), \upsilon_n - \upsilon_{n+1} > \leq$$

$$\leq |\Phi'(\upsilon_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\upsilon_* - \upsilon_{n+1})||\upsilon_n - \upsilon_{n+1}| \leq (\sup_{\upsilon \in M(\upsilon_0)} |\Phi'(\upsilon)| + \frac{\overline{d}}{\varepsilon_0})|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}| = c|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|.$$

Так как по доказанному $|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}| \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \Phi(\upsilon_n) = \Phi_*$. Это означает, что последовательность $\{\upsilon_n\}$ является минимизирующей и в силу компактности множества $M(\upsilon_0)$ и непрерывности $\Phi(\upsilon)$ на $M(\upsilon_0)$ все предельные точки $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$ принадлежат множеству $V_* \subset M(\upsilon_0)$. Из неравенства $0 \leq a_n = \Phi(\upsilon_n) - \Phi_* \leq c|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|$, $\Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_{n+1}) \geq \varepsilon_1 |\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|^2$ следует оценка (13). Утверждения 4),5) следуют из теоремы 1. Теорема доказана.

Пример. Решить задачу линейного программирования

$$I(u) = -2u_1 - 3u_2 + 5u_3 - 6u_4 \to \inf \tag{18}$$

$$2u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 5, \ u_1 + 3u_2 + u_3 - u_4 \leq 8, \ -u_1 + 4u_2 + u_4 = 1, \tag{19}$$

1) $u_0 = \{u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0, \ u_3 \geq 0, \ u_4 \geq 0\}$, 2) $u_0 = \{u_1 \geq 0, \ u_2 \in R^1, \ u_3 \geq 0, \ u_4 \in R^1\}$.

В отдельности, рассмотрим случаи 1), 2).

1. Пусть $U_0 = \{u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0, \ u_3 \geq 0, \ u_4 \geq 0\}$. Для задачи (18), (19) имеем

$$c^* = (-2, -3, 5, -6), \quad A = (1, 3, 1, -1), \quad b = -8, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \upsilon = (u, \gamma, d)^*, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in R^1, \ d \geq 0,$$

$$Au - 8 + d = 0, \quad \upsilon^* = (u_1, u_2, u_3, u_4, \gamma, d) \in V = U_0 \times R^1 \times D.$$

Функция

$$\Phi(\upsilon) = [c^* u - \gamma]^2 + [Au - 8 + d]^2 + [\bar{A}u - \bar{b}]^* [\bar{A}u - \bar{b}] = \upsilon^* Q \upsilon + q\upsilon + b^* b + \bar{b}^* \bar{b},$$

где

$$Q = Q^* = \begin{pmatrix} cc^* + A^*A + \bar{A}^*\bar{A} & -c & A^* \\ -c^* & 1 & 0 \\ A & 0 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -11 & 12 & 2 & 1 \\ 7 & 36 & -13 & 20 & 3 & 3 \\ -11 & -13 & 27 & -32 & -5 & 1 \\ 12 & 20 & -32 & 39 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$q = ((-2A^*b - 2\bar{A}^*\bar{b})^*, 0, -2b^*) = (34, 66, 6, -4, 0, 10, 2), \quad b^*b + \bar{b}^*\bar{b} = 90.$$

Производные

$$\Phi'_u(\upsilon) = (2cc^* + 2A^*A + 2\bar{A}^*\bar{A})u - 2c\gamma + 2A^*d - 2A^*b - 2\bar{A}^*\bar{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20u_1 + 14u_2 - 22u_3 + 24u_4 + 4\gamma + 2d + 34 \\ 14u_1 + 72u_2 - 26u_3 + 40u_4 + 6\gamma + 6d + 66 \\ -22u_1 - 26u_2 + 54u_3 - 64u_4 - 10\gamma + 2d + 6 \\ 24u_1 + 40u_2 - 64u_3 + 78u_4 + 12\gamma - 2d - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi'_{u_1}(\upsilon) \\ \Phi'_{u_2}(\upsilon) \\ \Phi'_{u_3}(\upsilon) \\ \Phi'_{u_4}(\upsilon) \end{pmatrix},$$

$$\Phi'_\gamma(\upsilon) = -2(c^*u - \gamma) = -2(-2u_1 - 3u_2 + 5u_3 - 6u_4 - \gamma),$$

$$\Phi'_d(\upsilon) = 2(Au - b + d) = 2(u_1 + 3u_2 + u_3 - u_4 - 8 + d).$$

Последовательности $\{u_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{d_n\}$ определяются соотношениями:

$$\begin{gathered} u_1^{(n+1)} = P_{U_0}[u_1^{(n)} - \alpha_n \Phi'_{u_1}(\upsilon_n)], \ \ u_2^{(n+1)} = P_{U_0}[u_2^{(n)} - \alpha_n \Phi'_{u_2}(\upsilon_n)], \\ u_3^{(n+1)} = P_{U_0}[u_3^{(n)} - \alpha_n \Phi'_{u_3}(\upsilon_n)], \ \ u_4^{(n+1)} = P_{U_0}[u_4^{(n)} - \alpha_n \Phi'_{u_4}(\upsilon_n)], \\ \gamma_{n+1} = P_\Gamma[\gamma_n - \alpha_n \Phi'_\gamma(\upsilon_n)], \ \ d_{n+1} = P_D[d_n - \alpha_n \Phi'_d(\upsilon_n)], \ \ n = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{20}$$

где $\alpha_n = const = \frac{1}{L}$ при $\varepsilon_1 = \frac{L}{2}$, $\varepsilon_0 = \alpha_n = const > 0$. Для численных расчетов выбрано значение α_n=0,1. Заметим, что проекция точки $\varpi \in R^n$ на множество $U_0 = \{u \in R^n \ / \ u \geq 0\}$ определяется так $P_{U_0}[\varpi] = \{\max(0, \varpi_1), \max(0, \varpi_2), \ldots, \max(0, \varpi_n)\}$, где $\varpi = (\varpi_1, \ldots, \varpi_n)$.

Найдены предельные точки последовательностей равные:

$$\lim_{n\to\infty} u_1^{(n)} = u_{1*} = \frac{19}{9}, \ \ \lim_{n\to\infty} u_2^{(n)} = \frac{7}{9}, \ \ \lim_{n\to\infty} u_3^{(n)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_4^{(n)} = 0, \ \ \lim_{n\to\infty} \gamma_n = -\frac{59}{9}, \ \ \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{32}{9}.$$

Решением исходной задачи (18), (19) являются: $u_* = (u_{1*}, u_{2*}, u_{3*}, u_{4*}) = \left(\frac{19}{9}, \frac{7}{9}, 0, 0\right)$, значение $I(u_*) = \gamma_* = -\frac{59}{9}$. Такие же результаты можно получить путем решения задачи (18), (19) симплекс методом после ее приведения к каноническому виду.

Легко убедиться в том, что значение $\Phi(\upsilon_*) = \Phi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$, где $\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$, $\Phi(\upsilon_*) = \Phi_* = \inf\limits_{\upsilon \in V} \Phi(\upsilon) = 0$. В самом деле, $I(u_*) - \gamma_* = -2 \cdot \frac{19}{9} - 3 \cdot \frac{7}{9} - \left(-\frac{59}{9}\right) = 0$, $Au_* - 8 + d_* = \frac{19}{9} + 3 \cdot \frac{7}{9} - 8 + \frac{32}{9} = 0$; $\bar{A}u_* - \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{19}{9} + \frac{7}{9} - 5 = 0 \\ (-1) \cdot \frac{19}{9} + 4 \cdot \frac{7}{9} - 1 = 0 \end{pmatrix}$.

2. Пусть $U_0 = \{u_1 \geq 0,\ u_2 \in R^1,\ u_3 \geq 0, u_4 \in R^1\}$. Данный случай отличается от первого случая только тем, что последовательности $\{u_2^n\}$, $\{u_4^{(n)}\}$ определяются соотношениями

$$u_2^{n+1} = u_2^n - \alpha_n \Phi'_{u_2}(\upsilon_n),\ \ u_4^{n+1} = u_4^n - \alpha_n \Phi'_{u_4}(\upsilon_n),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нет необходимости приведения задачи (18), (19) к каноническому виду путем введения дополнительных переменных $u_2 = \upsilon_2 - q_2$, $\upsilon_2 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $u_4 = \upsilon_4 - q_4$, $\upsilon_4 \geq 0$, $q_4 \geq 0$.

3. Исследование по выпуклому программированию

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (3), (4).

Лемма 3 *Пусть множество* $U_* = \{u_* \in U \ / \ I(u_*) = \gamma_* = \inf_{u \in U} I(u)\} \neq \emptyset$. *Тогда сумма* $g(u) + d \geq 0$ *при всех* $u \in U$ *для любого*

$$d \in D_1 = \{d \in R^m \ / \ d \geq d_*,\ \ d_* = -g(u_*) \geq 0\}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1. Как в предыдущем случае, по исходным данным задачи (3), (4) определим функцию

$$\Psi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [g(u) + d]^*[g(u) + d] + [Au - b]^*[Au - b], \tag{21}$$

где $u \in U_*$, $\gamma \in \Gamma$, $d \in D_1$.

Функции $I(u)$, $g(u) = (g_1(u), \ldots, g_m(u))-$ выпуклы на выпуклом множестве U_0.

Пусть $\upsilon = (u, \gamma, d)$, множество $V_1 = U_0 \times \Gamma \times D_1$. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\Psi(\upsilon) \to \inf,\ \ \upsilon \in V_1, \tag{22}$$

где функция $\Psi(\upsilon) = \Psi(u, \gamma, d)$ определяется по формуле (21). Пусть $U_* = \{u_* \in U / I(u_*) = I_* = \inf_{u \in U} I(u)\}-$ множество решений задачи (3), (4), множество

$$V_* = \{\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_1 \ / \ \Psi(\upsilon_*) = \Psi_* = \inf_{\upsilon \in V_1} \Psi(\upsilon)\}$$

-множество решений задачи (22).

Теорема 4 *Пусть множество* $U_* = \{u_* \in U \ / \ I(u_*) = I_* = \inf_{u \in U} I(u)\} \neq \emptyset$. *Тогда:*

1) если $u_* \in U_*$ *– решение задачи выпуклого программирования (3), (4), то* $\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ *– решение задачи (22), где* $\gamma_* = I(u_*) = I_*$, $d_* = -g(u_*)$, $\Phi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$;

2) если $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*-$ *решение задачи (22) при* $\Phi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$, *то* $u_* \in U_* \subset U$ *– решение задачи выпуклого программирования (3), (4);*

3) если $\Phi(u_*, \gamma_*, d_*) > 0$, *то задача выпуклого программирования (3), (4) не имеет решения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 5 *Пусть U_0- выпуклое множество, функции $I(u) \in C^2(U_0)$, $g_i(u) \in C^2(U_0)$ – выпуклы. Тогда:*

1) множество $V_1 = U_0 \times \Gamma \times D_1$ выпукло;

2) для того чтобы функция $\Psi(\upsilon)$, $\upsilon \in V$ была выпукла, необходимо и достаточно, чтобы

$$I(u) - \gamma \geq 0, \;\; g(u) + d \geq 0, \;\; \forall u \in U_0, \;\; \gamma \in \Gamma, \;\; d \in D_1.$$

Если кроме того, для некоторой точки $\varpi \in V$ множество $M(\varpi) = \{\upsilon \in V_1 \,/\, \Psi(\upsilon) \leq \Psi(\varpi)\}$ ограничено, то множество V_* непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_n \subset V_1\}$ сходится к множеству V_*.

Доказательство. Рассмотрим первое слагаемое из суммы (21). Пусть $\Psi_1(u, \gamma) = [I(u) - \gamma]^2$, $u \in U_0$, $\gamma \in R^1$, где $I(u) \in C^2(U_0)-$ выпуклая функция. Заметим, что $< I''(u)\xi, \xi > \geq$, $\forall u, u \in U_0$, $\forall \xi, \xi \in R^n$ в силу выпуклости функции $I(u)$ на U_0. Поскольку

$$\Psi'_1(u,\gamma) = \begin{pmatrix} 2[I(u)-\gamma]I'(u) \\ -2[I(u)-\gamma] \end{pmatrix}, \;\; \Psi''_1(u,\gamma) = \begin{pmatrix} 2I'(u)[I'(u)]^* + 2[I(u)-\gamma]I''(u) & -2I'(u) \\ -2[I'(u)]^* & 2 \end{pmatrix},$$

$$u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Для того чтобы функция $\Psi_1(u, \gamma) \in C^2(U_0 \times R^1)$ была выпуклой функцией необходимо и достаточно, чтобы $\Psi''_1(u, \gamma) \geq 0$, $\forall u \in U_0$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Далее, применяя известную лемму о том, что: матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} G & g \\ g^* & \Gamma_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

равносильно неравенству $G - g\Gamma_1^{-1} g \geq 0$, где $\Gamma_1 > 0$. Для матрицы $\Psi''_1(u, \gamma)$, $G = 2I'(u)[I'(u)]^* + $ $+2[I(u) - \gamma]I''(u)$, $g = -2I'(u)$, $\Gamma_1 = 2$. Отсюда следует, что $\Psi''_1(u, \gamma) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $2[I(u) - \gamma]I''(u) \geq 0$, $u \in U_0$, $\gamma \in \Gamma$. По условию теоремы $I(u) - \gamma \geq 0$. Следовательно, $\Psi''_1(u, \gamma) \geq 0$ функция $\Psi_1(u, \gamma)-$ выпукла на выпуклом множестве $U_0 \times R^1$.

Аналогичным путем можно доказать выпуклость функции $\Psi_2(\lambda) = [g(u)+d]^*[g(u)+d]$ на выпуклом множестве $U_0 \times D_1$. Поскольку функция $\Psi_3(u) = [Au - b]^*[Au - b]$ выпукла на выпуклом множестве U_0. Тогда $\Psi(u, \gamma, d) = \Psi_1(u, \gamma) + \Psi_2(u, d) + \Psi_3(u)$ выпуклая функция на выпуклом множестве V_1.

Доказательства других утверждений теоремы следуют из доказательства теоремы 2. Теорема доказана.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия теоремы 5, и пусть, кроме того, существует число $\beta > 0$ такое, что*

$$\beta|\Psi'_\upsilon(\upsilon_1) - \Psi'_\upsilon(\upsilon_2)| \leq < \Psi'_\upsilon(\upsilon_1) - \Psi'_\upsilon(\upsilon_2), \upsilon_1 - \upsilon_2 >, \;\; \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in V_1. \tag{23}$$

Тогда: 1) производные

$$\begin{gathered} \Psi'_u(\upsilon) = 2[I(u) - \gamma]I'(u) + 2\sum_{i=1}^{m}[g_i(u) + d_i]g'_i(u) + 2A^*(Au - b), \\ \Psi'_\gamma(\upsilon) = -2[I(u) - \gamma], \;\; \Psi'_d(\upsilon) = 2[g(u) + d]; \end{gathered} \tag{24}$$

2) градиент $\Psi'_v(v)$, $v \in V_1$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|, \ \ \forall v_1, v_2 \in V_1, \tag{25}$$

где $L = 1/\beta > 0-$ постоянная Липшица.

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из включения $\Psi(v) \in C^2(V_1)$. При выполнении условия теоремы 5 функция $\Psi(v)$ выпукла на выпуклом множестве V_1. Тогда необходимо и достаточно выполнение условия

$$< \Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2, v_1 - v_2) > \geq 0, \ \ \forall v_1, v_2 \in V_1.$$

По условию леммы выполнено неравенство (23). Из (23) следует, что

$$\beta|\Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2)|^2 \leq |\Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2)||v_1 - v_2|, \ \ \forall v_1, v_2 \in V_1.$$

Отсюда следует неравенство (25). Лемма доказана.

На основе формул (24), (25) строим последовательность $\{v_n\} = \{u_n, \gamma_n, d_n\} \subset V$ по следующему алгоритму:

$$\begin{gathered} u_{n+1} = P_{U_0}[u_n - \alpha_n \Psi'_u(v_n)], \ \ \gamma_{n+1} = P_\Gamma[\gamma_n - \alpha_n \Psi'_\gamma(v_n)], \ \ d_{n+1} = P_D[d_n - \alpha_n \Psi'_d(v_n)], \\ n = 0, 1, 2, \ldots, \ \ 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon_1}, \ \ \varepsilon_1 > 0, \end{gathered} \tag{26}$$

где $L = const > 0-$ постоянная Липшица из (25).

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 5, последовательности $\{u_n\} \subset U_0$, $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$, $\{d_n\} \subset D_1$ определяются по формуле (26). Тогда:*

1) последовательность $\{v_n\} \subset M(v_0)$ является минимизирующей,

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(v_n) = \Psi_* = \inf_{v \in V} \Psi(v);$$

2) последовательность $\{v_n\} \subset M(v_0)$ сходится к множеству V_*, $V_* \neq \emptyset$, $u_n \to u_*$, $\gamma_n \to \gamma_*$, $d_n \to d_*$ при $n \to \infty$, $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$;

3) справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq \Psi(v_n) - \Psi_* \leq \frac{c_1^2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{n}, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

где $c_1 = \sup_{v \in V} |\Psi'_v(v)| + \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{d}$, $\bar{d}-$ диаметр множества $M(v_0)$;

4) задача выпуклого программирования (3), (4) имеет решение тогда и только тогда, когда $\Psi(v_*) = 0$;

5) задача выпуклого программирования (3), (4) не имеет решения при $\Psi(v_*) > 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Пример 2. Решить задачу выпуклого программирования

$$I(u) = 8u_1^2 + 10u_2^2 - 12u_1u_2 + 50u_1 - 80u_2 \to \inf \tag{27}$$

$$u \in U = \{u = (u_1, u_2) \in R^2 / u \in U_0, g_1(u) = 8u_2^2 + u_2^2 - 2 \le 0, g_2(u) = u_1 + u_2 - 1 = 0\}, \quad (28)$$

$$u_0 = \{u = (u_1, u_2) \in R^2 \,/\, u_1 \ge 0, u_2 \ge 0\}. \quad (29)$$

Заметим, что множество $U_0 \subset R^2$ выпукло, функция $I(u)$ выпукла на множестве U_0, так как симметричная матрица

$$I''(u) = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} > 0, \quad < I''(u)\xi, \xi >> 0, \quad \forall \xi \in R^2, \quad \forall u.u \in U_0.$$

Легко проверить, что функции $g_1(u)$, $g_2(u)$ выпуклы на множестве U_0. Итак, задача (27)-(29) является задачей выпуклого программирования.

Функция

$$\Psi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d]^2 + [u_1 + u_2 - 1]^2,$$

$$u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad d \in D_1 = \{d \ge d_*\}, \quad V = U_0 \times \Gamma \times D_1, \quad \upsilon = (u, \gamma, d) \in V_1.$$

Производные

$$\Psi'_u(\upsilon) = \begin{pmatrix} 2[I(u) - \gamma](16u_1 - 12u_2 + 50) + 32u_1(8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d) + 2(u_1 + u_2 - 1) \\ 2[I(u) - \gamma](20u_2 - 12u_1 - 80) + 4u_2(8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d) + 2(u_1 + u_2 - 1) \end{pmatrix},$$

$$\Psi'(\gamma) = -2[I(u) - \gamma], \quad \Psi'_d(\upsilon) = 2(8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d).$$

Последовательности

$$u_1^{(n+1)} = P_{U_0}[u_1^{(n)} - \alpha_n \Psi'_{u_1}(\upsilon_n)], \quad u_2^{(n+1)} = P_{U_0}[u_2^{(n)} - \alpha_n \Psi'_{u_2}(\upsilon_2)],$$

$$\gamma_{n+1} = P_\Gamma[\gamma_n - \alpha_n \Psi'_\gamma(\upsilon_n)], \quad d_{n+1} = P_{D_1}[d_n - \alpha_n \Psi'_d(\upsilon_n)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_n = \dfrac{1}{L} = 0,05$. Предельные точки $u_1^{(n)} \to u_{1*} = 0$, $u_2^{(n)} \to u_{2*} = 1$, $\gamma_n \to \gamma_* = -70$, $d_n \to d_* = 0$ при $n \to \infty$. Решение задачи выпуклого программирования (27)-(29): $u_{1*} = 0$, $u_{2*} = 1$, $I(u_*) = \gamma_* = -70$. Значение $\Psi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$.

4. Исследование по нелинейному программированию

Рассмотрим задачу нелинейного программирования (6), (7). Определим функцию

$$\pi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [g(u) + d]^*[g(u) + d] + [\bar{g}(u)]^*[\bar{g}(u)], \quad (30)$$

где $g(u) = (g_1(u), \ldots, g_m(u))$, $\bar{g}(u) = (g_{m+1}(u), \ldots, g_s(u))$.

Пусть $\upsilon = (u, \gamma, d)$, $u \in U_0$, $\gamma \in \Gamma$, $d \in D_1 = \{d \in R^m \,/\, d \ge d_*\}$. Множество $V = U_0 \times \Gamma \times D_1$. Наряду задачи нелинейного программирования (6), (7), рассмотрим оптимизационную задачу

$$\pi(\upsilon) \to \inf, \quad \upsilon \in V, \quad (31)$$

где $\pi(\upsilon) = \pi(u, \gamma, d)$ определяется по формуле (30). Пусть множество $U_* = \{u_* \in U \,/\, I(u_*) = = I_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)\}$ – решение задачи (6), (7), множество

$$V_* = \{\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V \,/\, \pi(\upsilon_*) = \pi_* = \inf_{\upsilon \in V} \pi(\upsilon)\}$$

-множество решений задачи (31).

Теорема 7 *Пусть множество $U_* \neq \emptyset$. Тогда:*

1) если $u_* \in U_*$ – решение задачи нелинейного программирования (6), (7), то $v_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ – решение задачи (31), где $\gamma_* = I(u_*) = I_*$, $d_* = -g(u_*)$, $\pi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$;

2) если $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ – решение задачи (31) при $\pi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$, то $u_* \in U_*$ – решение задачи нелинейного программирования (6), (7);

3) если $\pi(u_*, \gamma_*, d_*) > 0$, то задача нелинейного программирования (6), (7) не имеет решения.

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем 1,4.

Теорема 8 *Пусть U_0- выпуклое множество, функции $I(u) \in C^2(U_0)$, $g_i(u) \in C^2(U_0)$, $i = \overline{1,s}$. Тогда:*

1) множество $V = U_0 \times R^1 \times D-$ выпукло;

2) для того чтобы функция $\pi(v)$, $v \in V$ была выпукла, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\pi''(v)$ порядка $(n+s+1) \times (n+s+1)$ была неотрицательной.

Если, кроме того, для некоторой точки $\varpi \in V$ множество $M(\varpi) = \{v \in V / \pi(v) \leq \pi(\varpi)\}$ ограничено, то множество V_* непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{v_k \subset V\}$ сходится к множеству V_*.

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем 2,5.

Пусть функция $\pi(v) \in C^{1,1}(V)$, т.е. $\pi(v) \in C^1(V)$ и градиент $\pi'(v)$, $v \in V$ удовлетворяет условию Липшица $|\pi'(v_1) - \pi'(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|$, $\forall v_1, v_2 \in V$. Строим последовательности $\{u_n\}, \{\gamma_n\}, \{d_n\}$ по следующему алгоритму:

$$u_{n+1} = P_{U_0}[u_n - \alpha_n \pi'_u(v_n)], \quad \gamma_{n+1} = P_\Gamma[\gamma_n - \alpha_n \pi'_\gamma(v_n)],$$
$$d_{n+1} = P_{D_1}[d_n - \alpha_n \pi'_d(v_n)], \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 > 0, \ n = 0,1,2,\ldots, \tag{32}$$

где $\pi'_u(v) = 2[I(u) - \gamma]I'(u) + 2\sum\limits_{i=1}^{m}[g_i(u) + d_i]g'_i(u) + 2\sum\limits_{i=m+1}^{s}\bar{g}_i(u)\bar{g}'_i(u)$,

$$\pi'_\gamma(v) = -2[I(u) - \gamma], \quad \pi'_d(v) = 2[g(u) + d].$$

Теорема 9 *Пусть U_0 выпуклое множество, функция $\pi(v) \in C^{1,1}(V)$, последовательности $\{u_n\} \subset U_0$, $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$, $\{d_n\} \subset D_1$ определяются по формуле (32). Тогда:*

1) $\pi(v_n) - \pi(v_{n+1}) \leq \varepsilon_1 |v_n - v_{n+1}|^2$, $n = 0,1,2,\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |v_n - v_{n+1}| = 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 (см. (16)). Поскольку значение $\pi(v) \geq 0$, $v \in V$, то функция $\pi(v)$ ограничена снизу.

Теорема 10 *Пусть выполнены условия теоремы 9, и пусть, кроме того, $\pi(v)$, $v \in V-$ выпуклая функция, множество $M(v_0) = \{v \in V \ / \ \pi(v) \leq \pi(v_0)\}-$ ограничено. Тогда:*

1) последовательность $\{v_n\} = \{u_n, \gamma_n, d_n\} \subset M(v_0)$ является минимизирующей $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(v_n) = \pi_* = \inf\limits_{v \in V} \pi(v)$;

2) последовательность $\{v_n\} \subset M(v_0)$ сходится к множеству V_*, $V_* \neq \emptyset$;

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq \pi(\upsilon_n) - \pi_* \leq \frac{c_1}{n}, \ \ c_1 = const > 0, \ \ n = 1, 2, \ldots ;$$

4) задача нелинейного программирования (6), (7) имеет решение тогда и только тогда, когда $\pi(\upsilon_*) = 0$, $\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V^*$, *где* $u_* \in U_*-$ *решение задачи нелинейного программирования (6), (7);*

5) если значение $\pi(\upsilon_*) > 0$, *то задача нелинейного программирования (6), (7) не имеет решения.*

При выполнении условия теоремы задача (31) является задачей выпуклого программирования и доказательство теоремы следует из теорем 3, 6.

Следует отметить, что в ряде случаев несмотря на то функции $I(u)$, $g_i(u)$ $i = \overline{1, s}$ не выпуклые, однако функции $[I(u) - \gamma]^2$, $[g_i(u) + d]^2$, $[g_i(u)]^2$ могут быть выпуклыми. Напр. $g_i(u) = u^3-$ не выпуклая функция, $[g_i(u)]^2 = u^6-$ выпуклая функция.

5. Заключение

Создан единый метод решения задачи математического программирования, основанный на последовательном сужении области допустимых решений, ориентированный на применения современных компьютеров.

Отличительной особенностью нового подхода от известных методов (симплекс-метод, метод множителей Лагранжа) состоит в том, что: осуществляется переход от исходной задачи к равносильной задаче с ограниченной снизу функцией цели; сформулированные необходимые и достаточные условия существования решения задачи математического программирования; построения минимизирующих последовательностей, предельные точки которых являются решениями задачи математического программирования.

Научная новизна созданного метода решения задачи математического программирования заключается в том, что: нет необходимости определения крайних точек и осуществить переход от одной крайней точки в другую, зачастую связанный с зацикливанием; метод применим как вырожденным, так и невырожденным задачам математического программирования; решения задач выпуклого и нелинейного программирования не связаны с поиском седловой точки функции Лагранжа; в ряде случае переход от исходной задачи к равносильной задаче позволяет свести решения задачи нелинейного программирования к решению задачи выпуклого программирования.

Список литературы

[1] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ // Изд-во "Мир". – М.: 1973. – 470 с.

[2] *Ашманов С.А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.– 304 с.

[3] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

References

[1] *Rokafellar R.* Vypuklyi analiz // Izd-vo "Mir". – M.: 1973. – 470 s.

[2] *Ashmanov S.A.* Lineinoe programmirovanie. – M.: Nauka, 1981.– 304 s.

[3] *Vasil'eva F.P.* Chislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach. – M.: Nauka, 1980. – 518 s.

Поступила в редакцию 25 апреля 2013 года