УДК 517.968.23

С.А. Айсагалиев, М.Е. Шангитова

*Казахского национального университета им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz*

К математической теории управляемых процессов

Предлагаются методы построения программных и позиционных управлений для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями при наличии краевых условий с учетом ограничений на управления. Разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия на основе решения задачи управляемости. Решены две задачи: существование решения задачи управляемости и построение множества всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в заданное конечное состояние.
Основой предлагаемых методов построения программных и позиционных управлений является интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Получено необходимое и достаточное условие существования решения интегрального уравнения. Найдено общее решение одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода.
Показано, что решения проблем управляемости для линейных и нелинейных регулируемых систем могут быть сведены к решению начальной задачи оптимального управления специального вида. Приведены алгоритмы построения минимизирующих последовательностей и оценки их скорости сходимости.
Ключевые слова: программное управление, позиционное управление, оптимальное быстродействие, минимизирующие последовательности.

S.A. Aisagaliev, M.E. Shangitova
To mathematical theory of control processes

The methods of building program and positional controls for processes described by ordinary differential equations in the presence of boundary conditions with the restrictions on the control are developed. An algorithm for solving problem of optimal fast action based on the solution of the controllability problem is elaborated. Two problems are solved: the existence of the controllability problem's solution and the construction of the set of all controls, each element of which transfers trajectory of the system from any initial state to a given final state.
The basis of the proposed methods of constructing program and positional control is a Fredholm integral equation of the first kind. The necessary and sufficient condition for existence of the solution of the integral equation was received. A general solution of one class of Fredholm integral equation of the first kind was found.
It is shown that the solutions of problems of controllability of linear and nonlinear control systems can be reduced to the solution of the initial problem of optimal control of a special type. Algorithms for minimizing sequences and estimation of their rate of convergence are given.
Key words: {program control,positional control,optimal fast action,minimizing sequences.}

С.А. Айсагалиев, М.Е. Шангитова

Басқарлатын процесстердін математикалық теориясына

Басқарудағы шектеуді ескеретін шекаралық шартты қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үрдістер үшін бағдарламалық (программалық) және бағыттық басқару әдістерінің құрылымы ұсынылады. Басқару есебі шешімінің негізінде тиімді тезәрекет есебін шешу алгоритмі құрылды. Екі есеп шешілді: басқару есебі шешімінің бар болуы және әрбір элементі жүйе траекториясын кез - келген бастапқы күйден берілген соңғы күйге көшіретін барлық басқарулар жиынының құрылуы.
Бағдарламалық (программалық) және бағыттық басқаруды құруды ұсынылатын әдістерінің негізі бірінші текті Фредгольм интегралдық теңдеуі болып табылады. Интегралдық теңдеу шешімі бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Бірінші текті Фредгольм интегралдық теңдеуінің бір класының жалпы шешімі табылды.
Басқару мәселесіндегі сызықты және сызықты емес реттелетін жүйелердің шешімі арнайы түрдегі бастапқы тиімді басқару есебі шешіміне сәйкестігі көрсетіледі. Жинақталу жылдамдықтарының бағалаулары мен тізбектерді минимизациялау алгоритімі келтірілген.

Түйін сөздер: {программалық басқару, позициялық басқару, тиімді тез әсерету, минимумдаушы тізбектер }

Истоком современной теории управляемости была работа Р.Е.Калмана [1]. Им построено управление с минимальной нормой и получен ранговый критерий управляемости линейных стационарных систем. Решение задачи управляемости на основе l-проблемы моментов было предложено Н.Н.Красовским [2]. Отдельные вопросы управляемости: наименьшая размерность вектора управления, управляемость нелинейных систем с малым параметром, управляемость линейных систем с последействием исследованы в работах [3,4]. Обзор состояния проблемы управляемости до начала XXI века приведен в [5].

Общая задача управляемости обыкновенных дифференциальных уравнений сформулирована в монографии [6]. Последние годы опубликован ряд научных статей посвященных проблемам управляемости и оптимального быстродействия динамических систем. Синтезу ограниченного управления (позиционное управление) линейными динамическими системами на основе функции Ляпунова посвящена работа [7]. Геометрический подход к проблеме управляемости неавтономных линейных систем исследован в работе [8].

Проблема управляемости тесно связана с решением проблем стабилизации динамических систем. В работе [9] рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия билинейных и аффинных систем канонического вида. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем исследованы в [10]. Следует отметить, что в указанных работах исследованы частные случаи общей задачи управляемости и быстродействия динамических систем без фазовых и интегральных ограничений.

Актуальными и нерешенными проблемами управляемости и оптимального быстродействия являются необходимые и достаточные условия разрешимости общей задачи управляемости и быстродействия, конструктивный метод построения решения общей задачи управляемости и быстродействия для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты полученные в данной работе являются продолжением научных исследований, изложенных в [4,5, 11 - 14].

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \mu(t),\ t \in [t_0, t_1] = I, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x_0 = x(t_0) \in S_0,\ x_1 = x(t_1) \in S_1,\ S_0 \subset R^n,\ S_1 \subset R^n, \tag{2}$$

с ограничением на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u(t) \in V(t) \in R^m,\ \text{п.в.}t \in I.\} \tag{3}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы порядков $n\times n$, $n\times m$ соответственно с кусочно-непрерывными элементами, S_0, S_1 – заданные ограниченные выпуклые замкнутые множества, $V(t)$, $t \in I$ – заданное множество в R^m, $\mu(t)$, $t \in I$ – заданная вектор-функция с кусочно-непрерывными элементами. В частности, множества S_0, S_1 содержат единственные элементы $x_0 \in R^n$, $x_1 \in R^n$ соответственно. Множество $V = \{-1 \le u_i(t) \le 1,\ i = \overline{1,m},\ \text{п.в. } t \in I\}$.

Задача 1 *Пусть $U = L_2(I, R^m)$, $V = R^m$. Найти все множества программных и позиционных управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (1) из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$, где t_0, t_1 – фиксированы, $t_1 > t_0$.*

Задача 2 *Найти программное и позиционное управление для системы (1), которое переводит траекторию системы из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$, когда $u(t) \in U(t)$, $t \in I$, где множество $U(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (3). Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия для системы (1) - (3), когда момент времени t_1 – не фиксирован.*

Определение 1 *Пусть управление $u(t) \in U(t)$, $t \in I$ переводит траекторию системы (1) из начальной точки $x_0 \in R^n$ в точку $x_1 \in R^n$, а функция $x(t) = x(t, u)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ – решение системы (1). Тогда искомое управление $u(t) = u(t, x_0, x_1) \in U(t)$, $t \in I$ называется программным, а искомое управление вида $u(x, t)$, $t \in I$, где $x = x(t)$, $t \in I$ называется позиционным (или синтезирующим) управлением.*

Определение 2 *Пусть t_0 – фиксированный момент времени, а величина $t_1 > t_0$ – нефиксирована. Решение задачи 2, соответствующее наименьшему значению конечного момента времени t_1, называется решением задачи оптимального быстродействия.*

В теории регулируемых систем рассматриваются абсолютная устойчивость положения равновесия уравнения [15]:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \sigma = Sx,\ x(0) = x_0,\ t \in [0, \infty), \tag{4}$$

с включениями

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi_i(\sigma) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1, m}\}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ |\varphi_i(\sigma_i)| \le \varphi_{*i}, \\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^m,\ 0 < \varphi_{*i} < \infty,\ i = \overline{1, m}\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь A, B, S – заданные постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно.

Для решения многих прикладных задач представляет интерес решения задач управляемости для регулируемых систем.

Пусть уравнения движения регулируемой системы имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(u) + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{7}$$

$$x(t_0) = x_0 \in R^n,\ x(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{8}$$

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u(t) \in V(t),\ t \in I\}, \tag{9}$$

где функция $\varphi(u)-$ фиксированные элементы следующих множеств:

$$\varphi(u) \in \Phi_0 = \{\varphi(u) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(u_i)u_i \le \mu_{0i}u_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1, m}\}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\varphi(u) \in \Phi_1 = \{\varphi(u) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(u_i)u_i \le \mu_{0i}u_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1, m}, \\ |\varphi_i(u_i)| \le \varphi_{*i}, \forall u,\ u \in R^m,\ 0 < \varphi_{*i} < \infty,\ i = \overline{1, m}\}.\end{gathered} \tag{11}$$

Как следует из (4) - (6) и (7) - (11), управляемость регулируемых систем рассматривается на конечном отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, функция $\sigma(t)$, $t \in [0, \infty)$ заменена на управление $u(t) \in U(t)$, $t \in I = [t_0, t_1]$, функция $\varphi(u)$ фиксированный элемент множества Φ_0 (либо Φ_1).

Задача 3 *Пусть $\varphi(u) \in \Phi_0$ – заданная функция. Найти все множества программных и позиционных управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (7) из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$, когда множество $U = L_2(I, R^m)$, t_0, t_1 – фиксированные моменты времени $t_1 > t_0$.*

Задача 4 *Пусть $\varphi(u) \in \Phi_1-$ заданная функция. Найти программное и позиционное управления из множества $U(t) \subset L_2(I, R^m)$, которые переводят траекторию системы (7) из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$ за время $t_1 - t_0$, $t_1 > t_0$. Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия для системы (7) - (9), когда момент времени t_1 – нефиксирован.*

Построения всех множеств программных или позиционных управлений в задачах 1,3, когда множество $U \equiv L_2(I, R^m)$, являются нерешенными проблемами теории управляемости как для линейных динамических систем, так и для нелинейных регулируемых систем.

Решения задач 2, 4 актуальны для систем с ограниченными ресурсами.

2. Интегральное уравнение.

Решения задач 1-4 связаны со свойствами решений одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Ниже приведены результаты исследования по интегральному уравнению, приведенные в работах автора [11, 12].

Рассмотрим интегральное уравнение следующего вида

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)u(t)dt = a, \; t \in I = [t_0, t_1], \tag{12}$$

где $K(t_0,t) = \|K_{ij}(t_0,t)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ – известная матрица порядка $n \times m$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированных t_0, t_1, $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – искомая функция, оператор $K : L_2(I, R^m) \to R^n$, $a \in R^n$– заданный вектор.

Теорема 1 *Интегральное уравнение (12) при любом $a \in R^n$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt \tag{13}$$

порядка $n \times n$ является положительно-определенной, где (*)- знак транспонирования.

Теорема 2 *Пусть матрица $C(t_0,t_1) > 0$. Тогда общее решение интегрального уравнения (12) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a + \upsilon(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)\upsilon(t)dt, \; t \in I, \tag{14}$$

где $\upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – произвольная функция, $a \in R^n$ – любой вектор.

3. Управляемость и оптимальное быстродействие линейных динамических систем.

А. Пусть уравнения движения управляемого процесса имеют вид (1), $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$, $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$ – заданные точки, искомое управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m) \equiv U$, матрица

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt, \tag{15}$$

где $\Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi} = A(t)\xi$, т.е. $\dot{\theta}(t) = A(t)\theta$, $\theta(t_0) = I_n$, $t \in I$, I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Программное управление. Следующая теорема позволяет выделить все множества программных управлений из $L_2(I, R^m)$ для задачи 1.

Теорема 3 *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ порядка $n \times n$ положительно определенная. Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию системы (1) из любой начальной точки $x_0 \in R^n$ в любое заданное конечное состояние $x_1 \in R^n$ тогда и только тогда, когда*

$$u(t) \in \Lambda = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u(t) = \upsilon(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, \upsilon), \\ t \in I, \forall \upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m)\}, \tag{16}$$

где

$$\lambda_1(t, x_0, x_1) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)[\Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt],$$

$$N_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \ t \in I,$$

функция $z(t, \upsilon)$, $t \in I-$ решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\upsilon(t), \ z(t_0) = 0, \ \forall \upsilon, \ \upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{17}$$

Решение дифференциального уравнения (1), соответствующее управлению $u(t) \in \Lambda$, $t \in I$, определяется по формуле

$$x(t) = z(t, \upsilon) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, \upsilon), \ \forall \upsilon, \ \upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{18}$$

где

$$\lambda_2(t, x_0, x_1) = \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)x_0 + \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \times$$

$$\times \Phi(t_0, t_1)x_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt, \ \ t \in I,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \ W(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau,$$

$$W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t), \ \ t \in I,$$

матрица $W(t_0, t_1)$ определяется по формуле (15).

Позиционное управление. На основе найденного множества программных управлений (16) может быть построено множество позиционных управлений Λ_1 для задачи 1.

Теорема 4 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная;

2) матрица R_1 порядка $n \times n$ такая, что $x_1 = R_1 x_0$;

3) матрица $\Sigma(t) = \Phi(t,t_0)\Gamma(t)+\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\times$ $\times\Phi(t_0,t_1)R_1 - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma(t_1),\ t \in I$ *порядка* $n \times n$ *неособая,где произвольная функция* $\upsilon(t) = H(t)x_0$, $\Gamma(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)H(\tau)d\tau$, $t \in I$.

Тогда множество позиционных управлений представимо в виде

$$\Lambda_1 = \{u(t) \in \Lambda \subset L_2(I,R^m)/u(t) = u(x,t) = K(t)x(t) + \eta(t),\ \forall H(t),\ t \in I\}, \tag{19}$$

где $H(t)-$ *произвольная матрица порядка* $m \times n$, *матрица*

$$\begin{aligned} K(t) = \{&H(t) + B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\big[\Phi(t_0,t_1)R_1 - I_n\big]- \\ &-B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma(t_1)\}\Sigma^{-1}(t),\ t \in I, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) = K(t)\Big[\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\times \\ \times\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt\Big] + B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt. \end{aligned} \tag{21}$$

Б. Решение задачи 2. Как следует из теоремы 3, множество всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (1) из x_0 в x_1, определяется по формуле (16). Для решения задачи 2 следует найти управление из пересечения множеств U и Λ. Для этого необходимо решить следующие две задачи: 1) показать, что $U \cap \Lambda \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество; 2) найти точки из множества $U \cap \Lambda$.

Решение указанных задач может быть сведено к решению следующей оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$I(\upsilon,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big|\upsilon(t) + \lambda_1(t,x_0,x_1) + N_1(t)z(t_1,\upsilon) - u(t)\big|^2 dt \to inf \tag{22}$$

при условиях

$$\dot z = A(t)z + B(t)\upsilon(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I = [t_0,t_1],\ \upsilon(\cdot) \in L_2(I,R^m), \tag{23}$$

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I,R^m)/u(t) \in V(t) \subset R^m,\ \text{п.в.}\ t \in I\}. \tag{24}$$

Заметим, что: 1) поскольку значение $I(\upsilon,u) \geq 0$, $\forall(\upsilon,u) \in L_2(I,R^m) \times U$, то задача 2 имеет решение тогда и только тогда, когда значение $I(\upsilon_*,u_*) = 0$, где (υ_*,u_*) – решение оптимизационной задачи (22)-(24); 2) если $I(\upsilon_*,u_*) = 0$, то решение задачи 2 определяется по формуле

$$u_*(t) = \upsilon_*(t) + \lambda_1(t,x_0,x_1) + N_1(t)z(t_1,\upsilon_*),\ t \in I,$$

где $z(t,\upsilon_*)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (23) при $\upsilon = \upsilon_*$; 3) значение функционала $I(\upsilon,u)$ ограничено снизу.

Програмное управление. Оптимизационная задача (22) - (24) может быть решена путем построения минимизирующих последовательностей $\{\upsilon_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{u_n\} \subset U$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} I(\upsilon_n, u_n) = I_* = \inf I(\upsilon, u)$, $(\upsilon, u) \in X = L_2(I, R^m) \times U$. Если $I_* = 0$, то задача 2 имеет решение. В случае $I_* > 0$ задача 2 не имеет решение.

Обозначая

$$F_0(q,t) = \left|\upsilon(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t) z(t_1, \upsilon) - u(t)\right|^2,$$

где $q = (\upsilon(t), u(t), z(t_1))$, функционал (22) представим в виде

$$I(\upsilon, u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(q(t), t) dt.$$

Теорема 5 *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$. *Тогда функционал (22) при условиях (23), (24) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$I'(\upsilon, u) = (I'_\upsilon(\upsilon, u), I'_u(\upsilon, u)) \in L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^m) = H,$$

в любой точке $(\upsilon, u) \in X$ *вычисляется по формуле*

$$I'_\upsilon(\upsilon, u) = \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial \upsilon} - B^*(t)\psi(t) \in L_2(I, R^m), \tag{25}$$

$$I'_u(\upsilon, u) = -\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial u} \in L_2(I, R^m), \tag{26}$$

где $z(t, \upsilon)$, $t \in I$ *– решение дифференциального уравнения (23), а функция* $\psi(t)$, $t \in I$ *– решение сопряженной системы*

$$\dot\psi = -A^*(t)\psi,\ \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z(t_1)} dt. \tag{27}$$

Кроме того, градиент $I'(\upsilon, u) \in H$ *– удовлетворяет условию Липшица*

$$\begin{gathered} \left\|I'(\upsilon_1, u_1) - I'(\upsilon_2, u_2)\right\|_{L_2} \le l\big(\|\upsilon_1 - \upsilon_2\|^2_{L_2} + \|u_1 - u_2\|^2_{L_2}\big)^{\frac{1}{2}}, \\ \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in L_2(I, R^m),\ \ \forall u_1, u_2 \in U. \end{gathered} \tag{28}$$

На основе формул (25) - (28) строим последовательности $\{\upsilon_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{u_n\} \subset U$ по следующему алгоритму

$$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n - \alpha_n I'_\upsilon(\upsilon_n, u_n),\ u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n I'_u(\upsilon_n, u_n)],\ n = 0, 1, 2, \dots, \tag{29}$$

где $\varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l + 2\varepsilon_1}$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В частности, при $\varepsilon_1 = \frac{l}{2}$ имеем $\varepsilon_0 = \alpha_n = \frac{1}{l}$, где $l = const > 0$ – постоянная Липшица из (28). Здесь $P_U[\cdot]$ – проекция точки на множество U. Как следует из теоремы 5, функционал $I(\upsilon, u) \in C^{1,1}(X)$.

Лемма 1 *Пусть* U *– ограниченное выпуклое замкнутое множество в* $L_2(I, R^m)$. *Тогда: 1) функционал* $I(\upsilon, u) \in C^{1,1}(X)$ *из (22) при условиях (23), (24) является выпуклым; 2) функционал* $I(\upsilon, u) \in C^{1,1}(X)$ *достигает нижней грани на множестве* $L_2^\rho(I, R^m) \times U$, *где* $L_2^\rho(I, R^m) = \{\upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m) / \|\upsilon\| \le \rho\}$, $\rho > 0$ *– достаточно большое число.*

Теорема 6 *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$, множество U – ограниченное выпуклое замкнутое множество, последовательности $\{v_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{u_n\} \subset U$ определяются по формуле (29). Тогда:*

1) последовательности $\{v_n\}$, $\{u_n\}$ являются минимизирующими, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} I(v_n, u_n) = I_* = \inf_{(v,u)\in X} I(v,u);$$

2) последовательности $\{v_n\}$, $\{u_n\}$ слабо сходятся к множеству

$$X_* = \{(v_*, u_*) \in X \,/\, I(v_*, u_*) = I_*\}, \;\; v_n \xrightarrow{сл} v_*, \;\; u_n \xrightarrow{сл} u_* \; при \, n \to \infty;$$

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$I(v_n, u_n) - I(v_*, u_*) \le \frac{m_0}{n}, \; n = 1, 2, \ldots, \; m_0 = const > 0;$$

4) для того чтобы задача 2 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение

$$I(v_*, u_*) = I_* = 0.$$

Позиционное управление. На основе найденного программного управления (??) может быть построено позиционное управление.

Теорема 7 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица $W(t_0,t_1) > 0$, значение $I(\theta_*) = I(v_*, u_*) = 0$;

2) матрица R_1 порядка $n \times n$ такая, что $x_1 = R_1 x_0$;

3) функция $v_*(t) = H_*(t)x_0$, $H_*(t)$ – матрица порядка $n \times m$,

4) матрица $\Sigma_1(t) = \Phi(t,t_0)\Gamma_*(t) + \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1) + \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1) \times \times \Phi(t_0,t_1)R_1 - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma_*(t_1)$, $t \in I$ порядка $n \times n$ неособая, где $\Gamma_*(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)H_*(\tau)d\tau$, $t \in I$. Тогда позиционное управление

$$u_*(x_*, t) = K_*(t)x_*(t) + \eta_*(t), \; t \in I,$$

где

$$K_*(t) = \{H_*(t) + B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)[\Phi(t_0,t_1)R_1 - I_n] -$$

$$-B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma_*(t_1)\}\Sigma^{-1}(t), \; t \in I$$

$$\eta_*(t) = K_*(t)\Big[\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1) \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt\Big] + B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt.$$

Решение дифференциального уравнения (1), соответствующее управлению (**??**), равно

$$x_*(t) = z(t, \upsilon_*) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t) z(t_1, \upsilon_*),\ t \in I.$$

Оптимальное быстродействие. Решение задачи 2, соответствующее наименьшему значению конечного момента времени при фиксированном t_0, называется решением задачи оптимального быстродействия.

Предположим, что найдено управление $u_*(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$ из решения задачи 2, где t_0, $t_1 > t_0$ – заданные величины.

Пусть $t_* > t_0$– наименьшее значение t_1, для которого значение $I(\theta_*) = 0$. Необходимо найти управление $\bar{u}_*(t) \in U$, $t \in [t_0, t_*]$, $t_* < t_1$, которое переводит траекторию системы (1) из заданной начальной точки $x_0 \in R^n$ в момент времени t_0 в заданную точку $x_1 = x(t_*)$ за кратчайшее время $t_* - t_0$.

Выберем $t_{11} = t_1/2$. По изложенному алгоритму находим управление $u_{**}(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, t_{11}]$ и траекторию $x_{**}(t) = x_{**}(t, u_{**})$, $t \in [t_0, t_{11}]$. Если для данной пары (u_{**}, x_{**}) значение $I(u_{**}, x_{**}) = 0$, то выберем значение $t_{12} = t_1/4$, $t_{12} < t_{11}$ и т.д. В случае, если $I(u_{**}, x_{**}) > 0$, то выберем $t_{12} = 3t_1/4$ и т.д.

4. Управляемость и оптимальное быстродействие нелинейных регулируемых систем.

А. Решение задачи 3. Пусть нелинейная функция $\varphi(u) \in \Phi_0$, уравнение движения регулируемой системы имеет вид (7), где $x_0 = x(t_0) \in R^n$, $x_1 = x(t_1) \in R^n$ – заданные точки, управления $u(t) \in L_2(I, R^m)$.

Наряду (7) - (9) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = Ay + B\varpi(t) + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{30}$$

$$y(t_0) = x_0 \in R^n,\ y(t_1) = x_1 \in R^n,\ \varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{31}$$

Заметим, что если $\varpi(t) = \varphi(u(t))$, $t \in I$, то $y(t) = x(t)$, $t \in I$, где $x(t)$ – решение дифференциального уравнения (7) с условиями (8), (9). Для управляемой системы (30), (31) верны утверждения теорем 3, 4.

Программное управление. Следующая теорема определяет множества программных управлений для системы (30), (31).

Теорема 8 *Пусть матрица* $W_1(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} BB^* e^{A^*(t_0-t)} dt$ *порядка* $n \times n$ *положительно определенная. Тогда управление* $\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ *переводит траекторию системы (30) из любой начальной точки* $y(t_0) = x_0 \in R^n$ *в любое заданное конечное состояние* $y(t_1) = x_1 \in R^n$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} \varpi(t) \in \Omega = \{\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m) \ / \ \varpi(t) = \omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega), \\ t \in I,\ \ \forall \omega(\cdot) \in L_2(I, R^m)\}, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\pi_1(t, x_0, x_1) = B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0, t_1)[e^{A(t_0-t_1)} x_1 - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)}\mu(t) dt],$$

$$S_1(t) = -B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)},\ t \in I,$$

функция $\xi(t,\omega)$, $t \in I$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{\xi} = A\xi + B\omega(t),\ \xi(t_0) = 0,\ \forall\omega,\ \omega(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{33}$$

Решение дифференциального уравнения (30), соответствующее управлению $\varpi(t) \in \Omega$, *определяется по формуле*

$$y(t) = \xi(t,\omega) + \pi_2(t,x_0,x_1) + S_2(t)\xi(t_1,\omega),\ t \in I, \tag{34}$$

где

$$\pi_2(t,x_0,x_1) = e^{A(t-t_0)} W_1(t,t_1) W_1^{-1}(t_0,t_1) x_0 + e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \times$$

$$\times e^{A(t_0-t_1)} x_1 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau - e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} \mu(t) dt,\ t \in I,$$

$$S_2(t) = -e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)},\ W_1(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)} BB^* e^{A^*(t_0-\tau)} d\tau,$$

$$W_1(t,t_1) = W_1(t_0,t_1) - W_1(t_0,t),\ \ t \in I.$$

Позиционное управление. На основе теоремы 8 можно сформулировать следующие утверждения.

Теорема 9 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица $W_1(t_0,t_1) > 0$;

2) матрица R_1 *порядка* $n \times n$ *такая, что* $x_1 = R_1 x_0$;

3) матрица $\Sigma_1(t) = e^{A(t-t_0)}\Gamma_1(t) + e^{A(t-t_0)} W_1(t,t_1) W_1^{-1}(t_0,t_1) + e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \times$ $\times e^{A(t_0-t_1)} R_1 - e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)} \Gamma_1(t_1)$, $t \in I$ *порядка* $n \times n$ *неособая, где произвольная функция* $\omega(t) = H_1(t)x_0$, $\Gamma_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)} BH(\tau) d\tau$, $t \in I$. *Тогда множество позиционных управлений представимо в виде*

$$\Omega_1 = \{\varpi(t) \in \Omega \,/\, \varpi(t) = \varpi(y,t) = K_1(t)y(t) + \eta(t),\ \forall H_1(t),\ t \in I\}, \tag{35}$$

где $H_1(t)$ *– произвольная матрица порядка* $m \times n$ *с кусочно-непрерывными элементами, матрица*

$$\begin{aligned} K_1(t) = \{&H_1(t) + B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) \big[e^{A(t_0-t_1)} R_1 - I_n\big] - \\ &- B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)} \Gamma_1(t_1)\} \Sigma^{-1}(t)\ t \in I, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) = K_1(t)\Big[&\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau - e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} \mu(t) dt\Big] + \\ &+ B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} \mu(t) dt. \end{aligned} \tag{37}$$

Пусть $\varpi(t) = (\varpi_1(t), \ldots, \varpi_m(t)) \in \Omega$, функция $\varphi(u) = (\varphi_1(u_1), \ldots, \varphi_m(u_m)) \in \Phi_0$, в частности, множество

$$\Phi_0 = \{\varphi(u) = (\varphi_1(u_1), \ldots, \varphi_m(u_m)) \in C(I, R^m)/\varphi_i(u_i)u_i \geq 0, \\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1,m},\ \mu_{0i} \to \infty,\ i = \overline{1,m}\}. \tag{38}$$

На практике часто встречаются функции $\varphi_i(u_i)$, $i = \overline{1,m}$ такие, что

$$\varphi_{1i}(u_i) = k_{1i}u_i,\ k_{1i} > 0,\ i = \overline{1,m},\ \varphi_{2i}(u_i) = \begin{cases} k_{2i}u_i^2 & \text{при } u_i \geq 0; \\ -k_{2i}u_i^2 & \text{при } u_i \leq 0,\ k_{2i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}; \end{cases}$$

$$\varphi_{3i}(u_i) = k_{3i}u_i^3,\ k_{3i} > 0,\ i = \overline{1,m},\ \varphi_{4i}(u_i) = \begin{cases} k_{4i}u_i^4 & \text{при } u_i \geq 0; \\ -k_{4i}u_i^4 & \text{при } u_i \leq 0,\ k_{4i} > 0,\ i = \overline{1,m}; \end{cases}$$

$$\varphi_i(u_i) = \varphi_{1i}(u_i) + \varphi_{2i}(u_i) + \varphi_{3i}(u_i) + \varphi_{4i}(u_i),\ i = \overline{1,m}.$$

Теорема 10 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица $W_1(t_0, t_1)$ положительно определенная;

2) функции $\zeta_i = \varphi_i(u_i)$, $i = \overline{1,m}$ имеют непрерывные обратные функции $u_i = \varphi_i^{-1}(\zeta_i)$, $i = \overline{1,m}$.

Тогда: 1) множество программных управлений для задачи 3 равно

$$u(t) \in U_1 = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u_i(t) = \varphi_i^{-1}(\varpi_i(t)),\ i = \overline{1,m}, \\ \varpi(t) = (\varpi_1(t), \ldots, \varpi_m(t)) \in \Omega\}, \tag{39}$$

2) множество позиционных управлений для задачи 3 равно

$$u(x,t) \in U_2 = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u_i(x,t) = \varphi_i^{-1}(\varpi_i(x,t)), \\ i = \overline{1,m},\ \varpi(x,t) \in \Omega_1\}, \tag{40}$$

где $\varpi(t) \in \Omega$, $\varpi(x,t) \in \Omega_1$.

Б. Решение задачи 4. Пусть нелинейная функция $\varphi(u) \in \Phi_1$. В частности,

$$\varphi_{1i}(u_i) = \begin{cases} u_i & \text{при } |u_i| \leq 1; \\ +1 & \text{при } u_i \geq 1; \\ -1 & \text{при } u_i \leq -1,\ i = \overline{1,m}; \end{cases} \qquad \varphi_{2i}(u_i) = arctgu_i,\ \ i = \overline{1,m}.$$

В этом случае необходимо рассмотреть линейную управляемую систему следующего вида

$$\dot{y} = Ay + B\varpi(t) + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1],\ y(t_0) = x_0 \in R^n,\ y(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{41}$$

$$\varpi(t) \in T = \{\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\alpha_i \leq \varpi_i(t) \leq \beta_i(t),\ i = \overline{1,m},\ t \in I\}. \tag{42}$$

Для решения задачи 4 необходимо найти управления из пересечения множеств T и Ω. Для этого необходимо решить следующую задачу: минимизировать функционал

$$I_1(\omega, \varpi) = \int_{t_0}^{t_1} |\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega) - \varpi(t)|^2 dt \to \inf \tag{43}$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A\xi + B\omega(t),\ \xi(t_0) = 0,\ \forall\omega,\ \omega(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{44}$$

$$\varpi(t) \in T = \{\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\alpha_i \le \varpi_i(t) \le \beta_i,\ i = \overline{1,m},\ t \in I\}. \tag{45}$$

Теорема 11 *Пусть матрица $W_1(t_0, t_1) > 0$. Тогда функционал (43) при условиях (44), (45) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$I_1'(\omega, \varpi) = (I_{1\omega}'(\omega, \varpi), I_{1\varpi}'(\omega, \varpi)) \in H,$$

в любой точке $(\omega, \varpi) \in X$ вычисляется по формуле

$$I_{1\omega}'(\omega, \varpi) = 2[\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t, \omega) - \varpi(t)] - B^*\psi(t) \in L_2(I, R^m), \tag{46}$$

$$I_{1\varpi}'(\omega, \varpi) = -2[\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t, \omega) - u(t)] \in L_2(I, R^m), \tag{47}$$

где $\xi(t, \varpi)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (44), а функция $\psi(t)$, $t \in I-$ решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*\psi,\ \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} 2S_1^*(t)[\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega) - u(t)]dt. \tag{48}$$

Кроме того, градиент $I_1'(\omega, \varpi) \in H$ удовлетворяет условию Липшица

$$\begin{gathered}\|I_1'(\omega_1, \varpi_1) - I_1'(\omega_2, \varpi_2)\| \le l_1(\|\omega_1 - \omega_2\|^2 + \|\varpi_1 - \varpi_2\|^2)^{1/2},\\ \forall\omega_1, \omega_2 \in L_2(I, R^m),\ \forall\varpi_1, \varpi_2 \in T.\end{gathered} \tag{49}$$

Лемма 2 *Функционал (43) при условиях (44), (45) является выпуклым и достигает нижней грани на множестве X.*

Программное управление. На основе формул (46) - (49) строим последовательности $\{\omega_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{\varpi_n\} \subset T$ по следующему алгоритму

$$\begin{gathered}\omega_{n+1} = \omega_n - \alpha_n I_{1\omega}'(\omega_n, \varpi_n),\ \varpi_{n+1} = P_T[\varpi_n - \alpha_n I_{1\varpi}'(\omega_n, \varpi_n)],\\ 0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l_1 + 2\varepsilon_1},\ \varepsilon_1 > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots.\end{gathered} \tag{50}$$

Отметим, что: 1) $I_1(\omega, \varpi) \in C^{1,1}(X)$; 2) $I_1(\omega, \varpi) \ge 0$, $\forall(\omega, \varpi) \in X$; 3) если $I_1(\omega_*, \varpi_*) = 0$, то $\varpi_*(t) = \omega_*(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega_*)$, $t \in I$.

Теорема 12 *Пусть матрица $W_1(t_0, t_1) > 0$, последовательности $\{\omega_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{\varpi_n\} \subset T$ определяются по формуле (50). Тогда:*

1) последовательности $\{\omega_n\}$, $\{\varpi_n\}$ являются минимизирующими

$$\lim_{n\to\infty} I_1(\omega_n, \varpi_n) = I_{1*} = \inf_{(\omega,\varpi)\in X} I_1(\omega, \varpi);$$

2) последовательности $\{\omega_n\}$, $\{\varpi_n\}$ слабо сходятся к множеству $X_* \subset X$, $\omega_n \xrightarrow{сл} \omega_*$, $\varpi_n \xrightarrow{сл} \varpi_*$ при $n \to \infty$, $I_1(\omega_*, \varpi_*) = I_{1*}$;

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости $I_1(\omega_n, \varpi_n) - I_1(\omega_*, \varpi_*) \le \frac{m_{10}}{n}$, $m_{10} = const > 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

4) для того, чтобы задача 4 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $I_1(\omega_*, \varpi_*) = 0$.

В случае $I_1(\omega_*, \varpi_*) = 0$, имеем

$$\varpi_*(t) = \omega_*(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega_*),\ t \in I, \tag{51}$$

$$y_*(t) = \xi(t, \omega_*) + \pi_2(t, x_0, x_1) + S_2(t)\xi(t_1, \omega_*),\ t \in I. \tag{52}$$

Позиционное управление. Для системы (41), (42) верна следующая теорема.

Теорема 13 *Пусть выполнены следующие условия:*
1) матрица $W_1(t_0, t_1) > 0$;
2) матрица R_1 *порядка* $n \times n$ *такая, что* $x_1 = R_1 x_0$;
3) функция $\omega_*(t) = H_*(t)x_0,\ H_*(t),\ t \in I-$ *матрица порядка* $n \times m$;
4) матрица $\Sigma_1(t)$ *неособая, где* $\Gamma_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B H_*(\tau) d\tau$.
Тогда позиционное управление

$$\varpi_*(x_*, t) = K_*(t) y_*(t) + \eta(t),\ t \in I, \tag{53}$$

где $y_*(t)$, $\varpi_*(t)$ *определяются соотношениями (51), (52) соответственно.*

Оптимальное быстродействие. Для системы (41), (42) алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия такой же, что в решении задачи 2.

Теорема 14 *Пусть выполнены следующие условия:*
1) матрица $W_1(t_0, t_1) > 0$;
2) функция $\zeta_i = \varphi_i(u_i)$, $i = \overline{1, m}$ *имеют непрерывные обратные функции* $u_i = \varphi_i^{-1}(\zeta_i)$, $i = \overline{1, m}$ *при* $\alpha_i \le \zeta_i \le \beta_i$, $i = \overline{1, m}$.
Тогда: 1) программное управление

$$u_{i*}(t) = \begin{cases} u_{i*}(t) = \varphi_i^{-1}(\varpi_{i*}(t)) & \text{при } \alpha_i \le \varpi_{i*}(t) \le \beta_i; \\ \alpha_i & \text{при } \varpi_{i*}(t) = \alpha_i; \\ \beta_i & \text{при } \varpi_{i*}(t) = \beta_i; \end{cases} \quad i = \overline{1, m}$$

2) позиционное управление

$$u_{i*}(x_*, t) = \begin{cases} \varphi_i^{-1}(\varpi_{i*}(x_*, t)), & \text{если } \alpha_i \le \varpi_{i*}(x_*, t) \le \beta_i; \\ \alpha_i & \text{при } \varpi_{i*}(x_*, t) = \alpha_i; \\ \beta_i & \text{при } \varpi_{i*}(x_*, t) = \beta_i; \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Список литературы

[1] *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления. // Труды I Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т.II. АН СССР. – 1961. – С. 521 - 547.

[2] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.

[3] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 480 с.

[4] *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Краевые задачи оптимального управления. – Алматы: Қазақ университеті, 1999. – 214 с.

[6] *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. – Алматы: Қазақ университеті, 2002. – 348 с.

[7] *Ананьевский И.М., Анахин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова. // Доклады РАН. – 2010. – Т.434. – № 3. – С. 319 - 323.

[8] *Семенов Ю.М.* О полной управляемости линейных неавтономных систем. // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 9. – С. 126 - 127.

[9] *Емельянов С.В., Крищенко А.П.* Стабилизация нерегулярных систем. // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 11. – С. 1515 - 1524.

[10] *Коровин С.К., Капалин И.В., Фомичев В.В.* Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем. // Доклады НАН РК. – 2011. – Т.441. – №5. – С. 606 - 611.

[11] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т.27. – № 9. – С. 1475 - 1486.

[12] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений. // Математический журнал. – 2005. – Т. 5. – №4(18). – С. 17 - 34.

[13] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2010. – №1. – С. 30 - 55.

[14] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением. // Сибирский математический журнал, январь - февраль. – 2011. – Т.53. – № 1. – С. 20 - 37.

[15] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2000. – 234с.

References

[1] *Kalman R.E.* Ob obshei teorii sistem upravleniya. // Trudy I Kongressa Mejdunarodnoi federacii po avtomaticheskomu upravleniu. T.II AN SSSR. – 1961. – S. 521 - 547.

[2] *Krasovskii N.N.* Teoriya upravleniya dvijeniem. – M.: Nauka, 1968. – 475 s.

[3] *Gabasov R., Kirillova F.M.* Kachestvennaya teoriya optimalnyh processov. – M.: Nauka, 1971. – 480 s.

[4] *Zubov V.I.* Lekcii po teorii upravleniya. – M.: Nauka, 1975. – 495 s.

[5] *Aisagaliev S.A.* Kraevye zadachi optimalnogo upravleniya. – Almaty: Kazak universiteti, 1999. – 214 s.

[6] *Aisagaliev S.A., Aisagaliev T.S.* Metody resheniya kraevyh zadach. – Almaty: Kazak universiteti, 2002. – 348 s.

[7] *Anan'evskii I.M., Anahin N.V., Ovseevich A.I.* Sintez ogranichennogo upravleniya lineinymi dinamicheskimi sistemami s pomosh'u obshei funkcii Lyapunona. // Doklady RAN. – 2010. – T. 434. – № 3. – S. 319 - 323.

[8] *Semenov U.M.* O polnoi upravlyaemosti lineinyh neavtonomnyh system. // Differencialnye uravneniya. – 2012. – T. 48. – № 9. – S. 126 - 127.

[9] *Emel'yanov S.V., Krishenko A.P.* Stabilizaciya neregulyarnyh sistem. // Differencialnye uravneniya. – 2012. – T. 48. – № 11. – S. 1515 - 1524.

[10] *Korovin S.K., Kapalin I.V., Fomichev V.V.* Minimalnye stabilizatory dlya lineinyh dinamicheskih sistem. // Doklady NAN RK. – 2011. – T. 441. – № 5. – S. 606 - 611.

[11] *Aisagaliev S.A.* Upravlyaemost nekotoroi sistemy differencialnyh uravnenii. // Differencialnye uravneniya. – 1991. – T. 27. – № 9. – S. 1475 - 1486.

[12] *Aisagaliev S.A.* Obshee reshenie odnogo klassa integralnyh uravnenii. // Matematicheskii jurnal. – 2005. – T. 5. – № 4(18). – S. 17 - 34.

[13] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Optimalnoe bystrodeistvie nelineinyh sistem s ogranicheniyami. // Differencialnye uravneniya i processy upravleniya. – 2010. – № 1. – S. 30 - 55.

[14] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P.* Upravlyaemost i bystrodeistvie processa, opisyvaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennym upravleniem. // Sibirskii matematicheskii jurnal, yanvar - fevral. – 2011. – T.53. – № 1. – S. 20 - 37.

[15] *Aisagaliev S.A.* Teoriya reguliruemyh sistem. – Almaty: Kazak universiteti, 2000. – 234 s.

Поступила в редакцию 25 апреля 2013 года