УДК 517.927

Ж.Х. Жунусова

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
e-mail: zhzhkh@mail.ru*

Геометрические корни одной космологической модели

Всевозрастающий интерес разрешения солитонных уравнений в (1+1)-размерности сделал прогресс в развитии математики, в частности, дифференциальной геометрии. Для нахождения солитонного решения проявляется недостаточность геометрических формулировок. В этой связи мы даем геометрическое истолкование исследуемой модели. Рассмотрим теорию гравитации с метрикой, зависящей от кручения, так называемую $F(R,T)$ гравитацию [1]-[2]. Изучаем геометрические корни такой теории. В частности, приводим вывод модели с геометрической точки зрения. Представляем более общую форму $F(R,T)$ гравитации с двумя произвольными функциями и рассматриваем ее в случае пространственно плоской метрики Фридмана-Робертсона-Уолкера. Определяя ненулевые компоненты связи Леви-Чивита и кручения находим компоненты искривления. Подобно им найдены ненулевые компоненты кривизны Риччи. Наконец, приведены явные формы скаляров кривизны и кручения.
Ключевые слова: геометрия, кривизна, кручение, тензор, нелинейное уравнение, космология, космологическое ускорение, пространство-время, масштабный фактор, гравитация, солитонное решение.

Zh.Kh. Zhunussova
Geometric roots of the cosmology model

Arising of interest in solving of soliton equations in (1+1)-dimension made some progress in developing of mathematics, particularly, differential geometry. Lack of geometric charachteristics are appeared in undestanding of soliton solution. In this context, we give geometric explanation of the investigated model. We consider gravity theory with a metric-dependent on torsion, so-called $F(R,T)$ gravity [1]-[2]. We research geometric roots of the theory. In particular, we represent the model with geometric point of view. Moreover, the general form of $F(R,T)$ gravity with two arbitrarly functions is represented. It is considered in the case of Fridmann-Robertson-Walker spatially flat metric. Contortion components are found by defining of non-vanishing torsion components and Levi-Civita connections. Similarly non-vanishing Ricci curvature components are found. Finally, the explicit forms of curvature and torsion scalars are represented.
Key words: geometry, curvature, torsion, tensor, nonlinear equation, cosmology, cosmology acceleration, space-time, scale factor, gravity, soliton solution.

Ж.Х. Жүнүсова

Космологиялық моделдің геометриялық бастаулары

Солитондық теңдеулерді (1+1)-өлшемде шешудегі қарқындылық математиканы, соның ішінде дифференциалдық геометрияны дамытты. Геометриялық сипаттамалардың жетіспеушілігі солитондық шешімдерді іздеу кезінде байқалады. Сол себептен қарастырылып отырған моделді геометрия тұрғысынан талқыладық. Гравитация теориясын бұрандалықтан тәуелді метрикамен қарастырдық, ол $F(R,T)$ гравитация деп аталады [1]-[2]. Осындай теорияның геометриялық түбірлерін зерттейміз. Яғни, моделді геометриялық тұрғысынан сипаттаймыз. Екі кез-келген функциямен $F(R,T)$ гравитацияның жалпы формасын келтіреміз. Оны Фридман-Робертсон-Уолкер кеңістіктегі жазық метрикасы жағдайында қарастырамыз. Бұрандалықпен Леви-Чивита байланысының нолдік емес компоненттерін анықтап қисайу компоненттерін табамыз. Сондай-ақ Риччи қисықтықтығының нолдік емес компоненттері табылған. Сонымен, қисықтықпен бұрандалықтың скалярларының айқын түрлері келтірілген. *Түйін сөздер*: геометрия, қисықтық, бұрандалық, тензор, сызықты емес теңдеу, космология, космологиялық үдеу, уақыт-кеңістігі, масштабтық фактор, гравитация, солитондық шешім.

1.Введение. В космологическом контексте, мы находим ускоренное расширение Вселенной. Открытие ускоренного расширения Вселенной было большим прогрессом для современной космологии. Принято считать, что это космологическое ускорение благодаря некоторому виду материи с отрицательной формой давления известно как темная энергия. Природа темной энергии также как его космологическое происхождение остается неизвестной на настоящее время. Для того чтобы объяснить природу темной энергии и ускоренного расширения, широкая разновидность теоретических моделей были предложены в литературе, такие, как квинтэссенция, фантомная, k-эссенция, тахион, f-эссенция, газ Чаплыгина, g- эссенция, и т.д. Среди различных моделей темной энергии, модифицированные модели гравитации являются довольно интересными, поскольку они включают некоторые понятия квантовой и общей (классической) теории гравитации. Есть несколько измененных теорий гравитации, как F(R) гравитация, $F(G)$ гравитация, $F(T)$ гравитация и т. д. [3]-[5]. Одним из интересных и перспективных версии модифицированных теорий гравитации является $F(R,T)$ гравитация. Недавно одна из версии $F(R,T)$ гравитации была предложена в работе [1] и некоторые его свойства были изучены в работе [2].

В данной работе гравитационное действие $F(R,T)$ гравитации и его аргументы получены с геометрической точки зрения. Используя их в пространственно плоской Фридмана-Робертсона-Уолкера (FRW) метрике получена система действий со скалярами кривизны и кручения.

Мы исходим из M43 - модели [1]. Эта модель является одним из представлений $F(R,T)$ гравитации. Действие M43 - модели

$$S_{43} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$R = \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{1}$$

$$T = \varepsilon_2 S^{\mu\nu}_{\rho} T^{\rho}_{\mu\nu},$$

где L_m является Лагранжианом материи, $\varepsilon_i = \pm 1$ (сигнатура). Мы попытались дать одно из возможных геометрических формулировок этой М43 - модели. Заметим, что мы имеем разные случаи, связанные с сигнатурой:

$$1)\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1; \quad 2)\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1; \quad 3)\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1; \quad 4)\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1.$$

Также отметим, что М43 - модель является частным случаем М37 - модели, имеющей вид

$$S_{37} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$R = u + \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{2}$$

$$T = \nu + \varepsilon_2 S_\rho^{\mu\nu} T^\rho_{\mu\nu},$$

$$R_S = \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, T_S = \varepsilon_2 S_\rho^{\mu\nu} T_{\rho\mu\nu}. \tag{3}$$

2.Общий случай.

Для того чтобы понять геометрию М43 - модели мы рассмотрим некоторые пространства-времени с кривизной и кручением, так что ее связь $G^\lambda_{\mu\nu}$ является суммой частей кривизны и кручения. В данной работе греческий алфавит $(\mu, \nu, \rho, \ldots = 0, 1, 2, 3)$ обозначает индексы, связанные с пространством-временем, и латинский алфавит $(i, j, k, \ldots = 0, 1, 2, 3)$ обозначает индексы, которые поднимаются и опускаются с метрикой Минковского $\eta_{ij} = diag(-1, +1, +1, +1)$. Для нашего пространства-времени связь $G^\lambda_{\mu\nu}$

$$G^\lambda_{\mu\nu} = \varepsilon_i^\lambda \partial_\mu \varepsilon^i_\nu + \varepsilon_j^\lambda \varepsilon^i_\nu \omega^j_{i\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Здесь $\Gamma^j_{i\mu}$ является связью Леви-Чивита и $K^j_{i\mu}$ является искривлением. Пусть метрика имеет вид

$$ds^2 = g_{ij} ds^i ds^j. \tag{5}$$

Тогда ортонормированный тетраэдр компонентов $\varepsilon_i(x^\mu)$ связывается с метрикой через

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} \varepsilon^i_\mu \varepsilon^j_\nu, \tag{6}$$

так что условие ортонормальности

$$\eta_{ij} = g_{\mu\nu} \varepsilon_i^\mu \varepsilon_j^\mu. \tag{7}$$

Здесь $\eta_{ij} = diag(-1, +1, +1, +1)$ и мы использовали соотношение

$$\varepsilon_i^\mu \varepsilon^j_\mu = \delta^i_j. \tag{8}$$

Величины $\Gamma^j_{i\mu}$ и $K^j_{i\mu}$ определим как

$$\Gamma^j_{jk} = \frac{1}{2} g^{lr} \{\partial_k g_{rj} + \partial_j g_{rk} - \partial_r g_{jk}\} \tag{9}$$

и

$$K^\lambda_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2}(T^\lambda_{\mu\nu} + T^\lambda_{\mu\nu} + T^\lambda_{\nu\mu}) \tag{10}$$

соответственно. При этом компоненты тензора кручения задаются

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \varepsilon^{\lambda}_{i} T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}, \tag{11}$$

$$T^{i}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\varepsilon^{i}_{\nu} - \partial_{\mu}\varepsilon^{i}_{\mu} + \Gamma^{i}_{j\mu}\varepsilon^{j}_{\nu} - \Gamma^{i}_{j\nu}\varepsilon^{j}_{\mu}. \tag{12}$$

Кривизну $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ определим как

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \varepsilon^{\rho}_{i}\varepsilon^{\sigma}_{j} R^{i}_{j\mu\nu} = \partial_{\mu}G^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}G^{\rho}_{\sigma\mu} + G^{\rho}_{\lambda\mu}G^{\lambda}_{\sigma\nu} - G^{\rho}_{\lambda\nu}G^{\lambda}_{\sigma\mu} \\ = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} + \partial_{\mu}K^{\rho}_{\sigma\mu} - \partial_{\nu}K^{\rho}_{\sigma\mu} + K^{\rho}_{\lambda\mu}K^{\lambda}_{\sigma\nu} - K^{\rho}_{\lambda\nu}K^{\lambda}_{\sigma\mu} \\ +\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}K^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}K^{\lambda}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\rho}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}K^{\rho}_{\lambda\nu}, \end{aligned} \tag{13}$$

где кривизна римановой связности Леви-Чивита определяется стандартным образом

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}. \tag{14}$$

Введем теперь два важных для нас величин, именно скаляры кривизны (R) и кручения (T) как

$$R = g^{ij}R_{ij}, \tag{15}$$

$$T = S^{\mu\nu}_{\rho}T^{\rho}_{\mu\nu}, \tag{16}$$

где

$$S^{\mu\nu}_{\rho}\frac{1}{2}(K^{\mu\nu}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\rho}T^{\theta\nu}_{\theta} - \delta^{\nu}_{\rho}T^{\theta\mu}_{\theta}). \tag{17}$$

Тогда M43 - модель запишем в виде (1).

3.Случай для пространственно плоской метрики Фридмана-Робертсона-Уолкера.

Рассмотрим пространственно плоскую метрику Фридмана-Робертсона-Уолкера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{18}$$

где (t) является масштабным фактором. В этом случае ненулевые компоненты связи Леви-Чивита являются

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{00} = \Gamma^{i}_{00} = 0, \\ \Gamma^{0}_{0i} = \Gamma^{0}_{i0} = \Gamma^{0}_{ij} = a^2H\delta_{ij}, \\ \Gamma^{i}_{j0} = \Gamma^{i}_{0j} = H\delta^{j}_{i}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $H = (lna)_t$ и $(i, j, k, \ldots = 1, 2, 3)$. Теперь вычислим компоненты кручения. Его ненулевые компоненты определяются по формуле

$$\begin{aligned} T_{110} = T_{220} = T_{330} = a^2h, \\ T_{123} + T_{231} + T_{312} = 2a^3f, \end{aligned} \tag{20}$$

где h и f некоторые действительные функции [3]. Заметим, что индексы тензора кручения поднимаются и опускаются по отношению к метрике

$$T_{ijk} = g_{kl} T^{l}_{ij}. \tag{21}$$

Теперь мы можем найти компоненты искривления. Тогда получим

$$K^{1}_{10} = K^{2}_{20} + K^{3}_{30} = 0,$$

$$\begin{gathered} K^{1}_{01} = K^{2}_{02} = K^{3}_{03} = h, \\ K^{0}_{11} = K^{0}_{22} + K^{0}_{33} = a^2 h, \\ K^{1}_{23} = K^{2}_{31} + K^{3}_{12} = -af, \\ K^{1}_{32} + K^{2}_{13} + K^{3}_{21} = af. \end{gathered} \tag{22}$$

Ненулевые компоненты кривизны $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ задаются следующим образом

$$\begin{gathered} R^{0}_{101} = R^{0}_{202} = R^{0}_{303} = a^2(\dot{H} + H^2 + Hh + \dot{h}), \\ R^{0}_{123} = -R^{0}_{213} = R^{0}_{312} = 2a^3 f(H + h), \\ R^{1}_{203} = -R^{1}_{302} = R^{2}_{301} = -aHf + \dot{f}, \\ R^{1}_{212} = R^{1}_{313} = R^{2}_{323} = a^2[(H+h)^2 + f^2]. \end{gathered} \tag{23}$$

Подобно им напишем ненулевые компоненты кривизны Риччи $R_{mu\nu}$ как

$$R_{00} = -3\dot{H} - 3\dot{h} - 3H^2 - 3Hh,$$

$$R_{11} = R_{22} + R_{33} a^2(\dot{H} + \dot{h} + 3H^2 + 5Hh + 2H^2 - f^2). \tag{24}$$

Так же находим ненулевые компоненты тензора $S^{\mu\nu}_{\rho}$. Получим

$$S^{10}_{1} = \frac{1}{2}(K^{10}_{1} + \delta^{1}_{1} T^{\theta 0}_{\theta} - \delta^{1}_{1} T^{\theta\nu}_{\theta}) = \frac{1}{2}(h + 2h) = h, \tag{25}$$

$$S^{10}_{1} = S^{20}_{2} = S^{30}_{3} = 2h, \tag{26}$$

$$S^{23}_{1} = \frac{1}{2}(K^{23}_{1} + \delta^{2}_{1} + \delta^{3}_{1}) = -\frac{f}{2a}, \tag{27}$$

$$S^{23}_{1} = S^{31}_{2} = S^{21}_{3} = -\frac{f}{2a} \tag{28}$$

и

$$T = T^{1}_{10} S^{10}_{1} + T^{2}_{20} S^{20}_{2} + T^{3}_{30} S^{30}_{3} + T^{1}_{23} S^{23}_{1} + T^{2}_{31} S^{31}_{2} + T^{3}_{12} S^{12}_{3}. \tag{29}$$

Теперь мы можем написать явные формы скаляров кривизны и кручения

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) + 6\dot{h} + 18Hh + 6h^2 - 3f^2, \tag{30}$$

$$T = 6h^2 - a^{-2} f^2.$$

Итак, M43 - модель запишем следующим образом

$$S_{43} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) + 6\dot{h} + 18Hh + 6h^2 - 3f^2, \tag{31}$$
$$T = 6h^2 - a^{-2}f^{-2}.$$

Далее определив Лагранжиан обобщенной модели $F(R,T)$ гравитации можем построить некоторые космологические решения, в частности, для модели $F = \mu R + \nu T$.

В этом случае решения космологических уравнений делятся на два класса. Каждая из них связана с некоторыми скалярными функциями кручения. В частности, можно найти точное решение де Ситтера. Эти точные аналитические решения космологических уравнений описывают ускоренное расширение Вселенной.

Список литературы

[1] *Myrzakulov R.* arXiv:1008.4486;

[2] *Myrzakulov R.* arXiv:1205.5266;

[3] *Muller-Hoissen F.* Phys. Lett. A, 92, N9, 433-434 (1982);

[4] *Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S.*, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006) [hepth/0603057];

[5] *Frieman J., Turner M. and Huterer D.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 46, 385 (2008) [arXiv:0803.0982].

References

[1] *Myrzakulov R.* arXiv:1008.4486;

[2] *Myrzakulov R.* arXiv:1205.5266;

[3] *Muller-Hoissen F.* Phys. Lett. A, 92, N9, 433-434 (1982);

[4] *Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S.*, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006) [hepth/0603057];

[5] *Frieman J., Turner M. and Huterer D.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 46, 385 (2008) [arXiv:0803.0982].

Поступила в редакцию 3 мая 2013 года