*УДК 514.7; 517.977*

А.Д. Мажитова

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;*
*e-mail: Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz*

# Субриманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением

В данной работе мы рассматриваем субриманову задачу на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением. Эта задача основана на построении Гамильтоновой структуры для заданной метрики Карно-Каратеодори при помощи принципа максимума Понтрягина. В последнее время очень актуальны задачи исследования геодезических потоков на субримановых многообразиях (см., например, [5, 6]). Подробные теоретические аспекты отражены в [1]. Классификация левоинвариантных структур на трехмерных группах Ли приведена А. Аграчевым и Д. Барилари в [3]. Согласно этой классификации существуют инварианты субримановой геометрии, реализуемой на четырех разрешимых ненильпотентных группах Ли: $SOLV^-$, $SOLV^+$, $SE(2)$ и $SH(2)$. Мы занимаемся исследованием групп $SOLV^-$ и $SOLV^+$. В работах [8, 9] подробно изучены эти группы с левоинвариантным неголономным распределением.

*Ключевые слова: субриманова геометрия, правоинвариантная метрика, Гамильтониан, геодезические.*

*A.D. Mazhitova,*

**Sub-Riemannian problem on the three-dimensional solvable Lie group $SOLV^+$ with right-invariant distribution**

In this article we consider sub-Riemannian problem on the three dimensional solvable Lie group $SOLV^+$ with right-invariant distribution. We constructed the Hamiltonian structure for the geodesic flow of Carnot-Caratheodory metrics via the Pontryagin maximum principle. Recently, a very relevant research problems geodesic flows on sub-Riemannian manifolds (see, for example, [5, 6]). Detailed theoretical aspects are reflected in [1]. In work [3] A. Agrachev and D. Barilari made classification of left-invariant structures on three-dimensional Lie groups. According to this classification, there are invariants of the sub-Riemannian geometry, implemented in four nonnilpotent solvable Lie groups: $SOLV^-$, $SOLV^+$, $SE(2)$ and $SH(2)$. We research $SOLV^-$ and $SOLV^+$. In the papers [8, 9] detailed study these groups with nonholonomic left-invariant distribution.

*Key words*: {sub-Riemannian geometry, right-invariant metric, Hamiltonian, geodesics}

*А.Д. Мажитова,*

**Есептелімді үш өлшемді $SOLV^+$ Ли тобындағы оң-инвариант үйлестірімді субриман есебі**

Бұл жұмыста есептелімді үш өлшемді $SOLV^+$ Ли тобындағы оң-инвариант үйлестірімді субриман есебі қарастырылды. Карно-Каратеодори метрикасының геодезиялық қисықтары үшін Понтрягиннің максимум принципінде негізделген Гамильтон жүйесі құрастырылған. Соңғы уақытта субриман көпбейнеліктердегі геодезиялық қисықтарды зерттеу есептері актуалды (мысалы, [5, 6] қараңыз). Негізгі теориялық аспектілер [1] жұмысында келтірілген. Үш өлшемді Ли тобындағы сол-инвариант құрылымдар классификациясын А. Аграчев пен Д. Барилари [3] жұмысында жасаған. Сол классификация бойынша субриман геометриясы орнын табатын $SOLV^-$, $SOLV^+$, $SE(2)$ және $SH(2)$ нильпотентті емес Ли топтарында инварианттар бар. Біз соның ішіндегі $SOLV^-$ и $SOLV^+$ топтарын зерттеумен айналысамыз. [8, 9] жұмыстарында бұл топтар оң-инвариантты голономды емес үйлестірімімен зерттелген.

*Түйін сөздер*: {субриман геометриясы, оң-инвариантты метрика, Гамильтониан, геодезиялық қисықтар}

Пусть $M^n$ гладкое $n$-мерное многообразие. Гладкое семейство

$$\Delta = \{\Delta(q) : \quad \Delta(q) \in T_qM^n \quad \forall q \in M^n, \ \ \dim\Delta(q) = k\}$$

$k$-мерных подпространств в касательных пространствах в точке $q \in M^n$ называется вполне неинтегрируемым, если векторные поля из $\Delta$, и их всевозможные коммутаторы порождают все касательное пространство $TM^n$:

$$\operatorname{span}\{[f_1, [\dots [f_{m-1}, f_m] \dots]](q) : f_i(p) \in \Delta(p) \ \ \forall p \in M^n, m = 1, \dots\} = T_qM^n.$$

Иногда такое распределение $\Delta$ называется вполне неголономным. Двумерное распределение на трехмерном многообразии является вполне неголономным тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{span}\{f_1(q), f_2(q), [f_1(q), f_2(q)]\} = T_qM^3,$$

где в каждой точке $q$ вектора $f_1(q)$ и $f_2(q)$ образуют базу в $\Delta(q)$.

Пусть $g_{ij}$ полная риманова метрика на $M^n$. Тройка $(M^n, \ \Delta, \ g_{ij})$ называется субримановым многообразием. Непрерывная в смысле Липшица кривая $\gamma : [0, T] \to M^n$ называется допустимой, если $\dot\gamma(t) \in \Delta(\gamma(t))$ для почти всех $t \in [0, T]$. Длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{g_{\gamma(t)}\left(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)}dt.$$

Расстояние между двумя точками на многообразии находится следующим образом,

$$d(q_0, q_1) = \inf_{\gamma \in \Omega_{q_0,q_1}} l(\gamma),$$

где $\Omega_{q_0,q_1}$ является множеством всех допустимых кривых, соединяющих точки $q_0$ и $q_1$. Такая функция $d(\cdot, \cdot)$ называется субримановой метрикой на $M^n$, а геодезическая этой метрики является допустимой кривой $\gamma : [0,T] \to M^n$, которая локально минимизирует функционал длины $l(\gamma)$.

Геодезические субримановой метрики должны удовлетворять принципу максимума Понтрягина (смотрите, например, [1]).

Пусть $f_1, \dots, f_k$ касательные ортонормированные векторные поля из $\Delta$, которые порождают всё $\Delta$ в каждой точке $M^n$.

Принцип максимума Понтрягина утверждает следующее:

- *Пусть $M^n$ гладкое $n$-мерное многообразие. Рассмотрим для непрерывных в смысле Липшица кривых следующую задачу минимизации*

$$\dot q = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q), \quad u_i \in \mathbf{R}, \quad \int_0^T \sum_{i=1}^{k} u_i^2(t)dt \longrightarrow \min, \quad q(0) = q_0, \quad q(T) = q_1$$

*с фиксированным $T$. Рассмотрим отображение $\mathcal{H} : T^*M^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, заданную функцией*

$$\mathcal{H}(q, \lambda, p_0, u) := \langle \lambda, \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q) \rangle + p_0 \sum_{i=1}^{k} u_i^2.$$

*Если кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$ с управлением $u(\cdot) : [0,T] \to \mathbf{R}^k$ является оптимальной, тогда существует Липшицева функция (ковектор) $\lambda(\cdot) : t \in [0,T] \mapsto \lambda(t) \in T^*_{q(t)}M^n$, $(\lambda(t), p_0) \neq 0$ и постоянная $p_0 \leq 0$ такие, что*

*i)* $\dot q(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t))$,

*ii)* $\dot\lambda(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t))$,

*iii)* $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t)) = 0$.

Кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина называется экстремальной кривой (или экстремалью). Такой кривой соответствует множество пар $(\lambda(\cdot), p_0)$. Тип экстремальной кривой (нормальный или анормальный) зависит от значения $p_0$:

- если $p_0 \neq 0$, то экстремаль называется нормальной;
- если $p_0 = 0$, то экстремаль называется анормальной;
- экстремаль называется строго анормальной, если она не проектируется (на $M^n$) в нормальные экстремали.

Для нормальных экстремалей, которые являются геодезическими согласно [1], мы будем полагать $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Из пункта iii) следует, что $u_i = \langle \lambda(t), f_i(t) \rangle$, а также, что кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$ будет геодезической тогда и только тогда, если она является проекцией на $M^n$ решения

$(\lambda(t), q(t))$ Гамильтоновой системы, действующей на $T^*M^n$ со следующей Гамильтоновой функцией:

$$H(q,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\langle\lambda, f_i\rangle^2\right), \quad q \in M^n, \quad \lambda \in T_q^*M^n. \tag{1}$$

Гамильтониан $H$ является постоянным вдоль любого решения Гамильтоновой системы. Более того, $H = \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда геодезическая натурально-параметризованна.

Теперь перейдем непосредственно к нашей субримановой задаче на группе $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением.

В работах [8],[9] были подробно изучены геодезические потоки субримановой задачи на трехмерных разрешимых группах $SOLV^-$ и $SOLV^+$ с левоинвариантным расперделением.

Итак, наша группа $SOLV^+$ представлена матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а их коммутационные отношения следующие

$$[e_1, e_2] = 0; \quad [e_1, e_3] = e_2; \quad [e_2, e_3] = -e_1.$$

Коммутаторы базисных векторов порождает все касательное пространство.

Пусть метрика на группе будет обычной

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

а правонвариантное распределение образовано площадками $\Delta = \mathrm{span}\{e_1, e_3\}$. Пусть $q = (x, y, z)$ точка на группе $SOLV^+$. Тогда касательное пространство в каждой точке $SOLV^+$ определяется матрицами вида

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_z = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а векторы $e_1, e_2, e_3$ с помощью правых сдвигов переходят в следующие вектора

$$R_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & y \\ -\cos z & -\sin z & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть,

$$\begin{aligned} &R_q^*(e_1) = \partial_x, \\ &R_q^*(e_2) = \partial_y, \\ &R_q^*(e_3) = y\cdot\partial_x\ - x\cdot\partial_y\ + \partial_z. \end{aligned} \tag{5}$$

В каждой точке группы неголономное распределение образовано векторами $\tilde{f}_1 = \partial_x$, $\tilde{f}_3 = y\cdot\partial_x\ - x\cdot\partial_y\ + \partial_z$. Для применения Принципа максимума Понтрягина и Гамильтоновой структуры это распределение должно определяться ортонормированной системой. После процесса ортогонализации и нормировки они перейдут в вектора:

$$f_1 = \partial_x, \quad f_3 = \frac{-x\cdot\partial_y\ + \partial_z}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Найдем функцию Гамильтона по формуле (1)

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}\,p_x^2 + \frac{1}{2\,(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z)^2. \tag{6}$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получаем уравнения Гамильтона для (6)

$$\begin{aligned} &\dot{x} = p_x, && \dot{p_x} = \frac{x}{(x^2+1)^2}\,(-xp_y + p_z)^2 + \\ & && \qquad + \frac{1}{(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z)p_y, \\ &\dot{y} = -\frac{x}{(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z), && \dot{p_y} = 0, \\ &\dot{z} = \frac{1}{(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z), && \dot{p_z} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где точка означает производную по $t$. Система (7) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_y, \quad I_3 = p_z,$$

значит эта система дифференциальных уравнений полностью интегрируема. Нужно отметить, что интегрирование же этой системы является довольно сложной задачей, хотя бы, потому, что интегралы получаются в эллиптических функциях. Мы вычислим явно интеграл только для переменной $t$. Не теряя общности, будем считать, что все геодезические берут начало в единице группы, то есть справедливы следующие начальные условия для системы (7):

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \tag{8}$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \quad p_y = a, \quad p_z = b.$$

Подставим это все в гамильтониан (6) и получим

$$1 = p_x^2 + \frac{1}{x^2+1}(-ax+b)^2. \tag{9}$$

Из (7) нетрудно увидеть, что если $p_x \equiv 0$, то $b = \pm 1$, $a = 0$. В этом случае

$$x(t) = 0 \quad y(t) = bt, \quad z(t) = bt.$$

Если $a \neq 0$, то $p_x$ тождественно не может равняться нулю, поэтому из (9) находим $p_x$. Подставим его в первое уравнение системы (7) и найдем интеграл для переменной $t$ при $p_x > 0$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{(-ax+b)^2}{x^2+1}}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{\sqrt{(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2}}. \tag{10}$$

Случай $p_x < 0$ может быть посчитан аналогично. Последний интеграл разбивается на 2 слагаемых

$$t = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(1-a^2)x^2+2abx+1-b^2}} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)}\sqrt{(1-a^2)x^2+2abx+1-b^2}},$$

которые вычисляются в терминах эллиптических функций. Предварительно эти интегралы нужно привести к нормальной форме Лежандра (смотрите [4, 10]). Отметим, что мы будем рассматривать случай, когда квадратный трехчлен $(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2$ имеет два вещественных корня, т.е. $a^2 + b^2 - 1 > 0$. Подкоренное выражение интегралов $G(x)$ является полиномом четвертой степени, который можно привести к виду

$$G(x) = \left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(x - \frac{b}{a}\right)^2\right] \times$$

$$\times \left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a^2(1-a^2-b^2)}{a^2+b^2}\left(x - \frac{b}{a}\right)^2\right],$$

и переписать в следующей форме

$$G(x)=\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^2\cdot\left(x+\frac{a}{b}\right)^4\cdot\left[1+\frac{a^2}{b^2}\cdot\left(\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}\right)^2\right]\times\left[1+\frac{a^2(1-a^2-b^2)}{b^2}\cdot\left(\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}\right)^2\right].$$

Подставим полученное разложение в интегралы и сделаем дробно-линейное преобразование $\dfrac{b}{a}\xi=\dfrac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}$, получим

$$t=\int\frac{d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1-(a^2+b^2-1)\xi^2)}}+\frac{b^2}{a^2}\int\frac{\left(\frac{\xi+\frac{b}{a}}{\xi-\frac{a}{b}}\right)^2d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1-(a^2+b^2-1)\xi^2)}}.$$

Вычислив эти интегралы после соответствующего преобразования, получим,что

$$\begin{aligned}t=&\frac{1}{k}\cdot\mathbf{F}\left(\arccos m\xi,\,k\right)+p_1\cdot\Pi\left(\arccos m\xi,\,n,\,k\right)+p_2\cdot\mathbf{E}\left(\arccos m\xi,\,k\right)+\\&+p_3\cdot\frac{\xi\cdot\sqrt{(1+\xi^2)\left(\frac{1}{a^2+b^2-1}-\xi^2\right)}}{1-\frac{b^2}{a^2}\cdot\xi^2}+\\&+p_4\cdot\sqrt{A\left(\xi^2-\tfrac{a^2}{b^2}\right)^{-2}+B\left(\xi^2-\tfrac{a^2}{b^2}\right)^{-1}+C}+\\&+p_5\cdot\arcsin\frac{2A\left(\xi^2-\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}+B}{p_6},\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$m=\sqrt{a^2+b^2-1},\quad n=\frac{b^2}{b^2-a^2(a^2+b^2-1)},\quad k=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$p_1=\frac{a^2(a^2+b^2-1)}{\sqrt{a^2+b^2}(a^2(a^2+b^2-1)-b^2)}\times$$

$$\times\left[\frac{b^4-a^2+a^2b^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2a^4(1-a^2)-a^4+a^2b^2}{2(b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2))}\right)-\frac{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)}{a^2b^2}-\right],$$

$$p_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot(b^4-a^4+a^2b^2)}{b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2)},\quad p_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2(b^4-a^4+a^2b^2)(a^2+b^2-1)}{a^2(b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2))},\tag{12}$$

$$p_4=-\frac{a\sqrt{a^2+b^2-1}}{b^3(a^2+b^2)(1-a^2)},\quad p_5=-\frac{b^3\sqrt{a^2+b^2-1}}{2a(a^2-1)^{3/2}},$$

$$p_6=b^4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-1}}$$

Подставляя это выражение в первые три уравнения системы (7) можно получить явные уравнения для геодезических нашей субримановой геометрии.

## Список литературы


[1] *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления - М: Физматлит, 2005. - 392 с.

[2] *Аксенов Е. П.* Специальные функции в небесной механике - М: Наука, 1986. - 321 с.

[3] *Agrachev A. and Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 21-44.

[4] *Бэйтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье - М: Наука, 1967. - 300 с.

[5] *Boscain U. and Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on $S^3$, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. - 2008. - Vol. 47. - P. 1851-1878.

[6] *Calin O., Chang D.-Ch., and Markina I.* SubRiemannian geometry on the sphere $S^3$. // Canad. J. Math. - 2009. - Vol. 61. -P.721-739.

[7] *Градштейн И. С.,Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений - М: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

[8] *Мажитова А. Д.* Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Математические труды. - 2012. - Т. 15, № 1. - С. 120-128.

[9] *Mazhitova A. D.*Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group $SOLV^-$ // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 309-322.

[10] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции - М: Физматлит, 1963. - 500 с.

## References

[1] *Agrachev A.A. and Sachkov, Yu.L.* Control theory from the geometric viewpoint // Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 87. Control Theory and Optimization, II. // - Springer-Verlag, Berlin, 2004. - 392 p.

[2] *Aksenov Ye. P.* Special Functions in Celestial Mechanics - M:Nauka, 1986. - 321 p.

[3] *Agrachev A. and Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 21-44.

[4] *Bateman H., Erdeyi A.* Higher Transcendental Functions. Elliptic and automorphic functions. Lame functions and Mathieu. - Moscow: Nauka, 1967. - 343 p.

[5] *Boscain U. and Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on $S^3$, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. - 2008. - Vol. 47. - P. 1851-1878.

[6] *Calin O., Chang D.-Ch., and Markina I.* SubRiemannian geometry on the sphere $S^3$. // Canad. J. Math. - 2009. - Vol. 61. - P. 721-739.

[7] *Gradstein I.S. and Ryzhik, I.M.* Tables of Integrals // Series and Products - New York, Academic. - 1980. - 1100 p.

[8] *Mazhitova A. D.* The geodesic flow of the sub-Riemannian metric on a three-dimensional solvable Lie group // Mathematical works. - 2012. - V.15, № 1. - P. 120-128.

[9] *Mazhitova A. D.* Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group $SOLV^-$ // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 309-322.

[10] *Whittaker E. T. and Watson G. N.* A course of modern analysis. Transcendental functions - M: Fizmatlit, 1963. - Chapter 2. - 516 c.

*Поступила в редакцию 2 мая 2013 года*