УДК 519.21

Н. Аканбай , А.Б. Ахмедов , З.И. Сулейменова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы e-mail: noureke@mail.ru

О некоторых вариантах неклассической центральной предельной теоремы

Условие равномерной предельной малости слагаемых является основой классических предельных теорем теории вероятностей для сумм независимых случайных величин. Не использующие условию равномерной бесконечной малости слагаемых предельные теоремы обычно называются неклассическими. Общеизвестно также, что в схемах суммирования независимых слагаемых зачастую бывает удобнее иметь дело с самими распределениями и сформулировать условия предельных теорем в опирающихся непосредственно на распределения ограничениях. Вместе с тем в наше время аппарат характеристических функций прочно вошел в теорию вероятностей как основа одного из самих мощных используемых в ней методов. Тем не менее доказательству сходимости рядов из независимых случайных величин в условиях на характеристических функций посвящены сравнительно мало работ. Данная работа посвящена доказательству некоторых неклассических предельных теорем в сформулированных в терминах характеристических функций, условиях.

Ключевые слова: неклассическая предельная теорема, математическое ожидание, конечная дисперсия.

N.Akanbai, A.B. Ahmedov, Z.I. Suleimenova

On some versions of non-classical central limit theorem

The condition of the smallness of the uniform limit of terms is the basis of the classical limit theorems for sums of independent random variables. Do not use the condition of uniform infinitesimal terms limit theorems are usually called non-classical. It is well known also that the schemes summation of independent variables is often more convenient to deal with the very distributions and formulate the conditions in limit theorems based directly on the allocation constraints. However, in our time, the characteristic functions of the device firmly entrenched in probability theory as the basis of one of themselves powerful techniques used in it. However, the proof of the convergence of series of independent random variables in terms of the characteristic functions are devoted to sravntielno little work. This work is devoted to the proof of some non-classical limit theorems formulated in terms of characteristic functions, conditions.

Key words: {non-classical limit theorem, the expectation, the final variance.}

Н. Аканбай , А.Б. Ахмедов , З.И. Сулейменова

Классикалық емес орталық шекті теореманың кейбір нұсқалары туралы

Қосылғыштардың бірқалыпты шектік аздығы туралы шарт - тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындылары үшін ықтималдықтар теориясының классикалық шектік теоремаларының негізі. Қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздығы шарты пайдаланылмайтын шектік теоремалар әдетте классикалық емес шектік теоеремалар деп аталады. Тәуелсіз қосылғыштарды қосу схемаларында үлестірімдердің өздерімен жұмыс істеу және шектік теоремалардың шарттарын тікелей үлестірімдерге сүйенетін шектеулер арқылы тұжырымдау көбіне ыңғайлы болатыны да жалпы белгілі. Сонымен бірге сипаттамалық функциялар аппараты қазіргі уақытта ықтималдықтар теориясына нық енген, осы теорияда қолданылатын ең бір қуатты әдістердің бірі екені де белгілі. Бұл жұмыс классикалық емес шектік теоремалардың кейбір нұсқалардың сипаттамалық функциялар терминдері арқылы тұжырымдалған шарттар аясында дәлелдеуге арналған.

Түйін сөздер:{классикалық емес шекті теорема, математикалық күтім, ақырлы дисперсия.}

Пусть

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, ..., \xi_{nn}, ... \tag{1}$$

-последовательность серий независимых случайных величин (с.в.),

$$F_{nj}(x) = P(\xi_{nj} < x), j = 1, 2, ...,$$

$$S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + ...,$$

причем число слагаемых S_n может быть как конечным, так и бесконечным. В последнем случае будет предполагаться, что S_n представляет собой сходящийся (в смысле слабой сходимости) ряд независимых с.в..

Замечание 1. Напомним, что для последнего ряда (т.е. для S_n) понятия сходимости по распределению (слабой сходимости), по вероятности и с вероятностью 1 эквивалентны.

Положим

$$F_n(x) = P(S_n < x) = F_{n1} * F_{n2} * ... * ..., \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

где $*$ - знак композиции распределений.

Как хорошо известно, метрика Леви ($L-$ метрика) между двумя функциями распределения (ф.р.) $F(x)$ и $G(x)$ определяется формулой

$$L(F, G) = inf\{\varepsilon : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x + \varepsilon) + \varepsilon; x \in R\},$$

и расстояние $L(\cdot, \cdot)$ метризует топологию слабой сходимости распределений. Также напомним, что если

$$\lim_{n\to\infty} L(F_n, \Phi) = 0, \tag{2}$$

то для последовательности (1) имеет место центральная предельная теорема (ЦПТ).

Возникает вопрос об ограничениях, которые следует наложить на слагаемые, чтобы условие (2) о справидливости ЦПТ перестала быть тривиальной и в тоже время сохранила достаточную степень общности. На этом пути и появилось ограничение, известное под названием условия равномерной бесконечности малости. Оно требует, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ было выполнено условие

$$\sup_j P(|\xi_{nj}| \geq \varepsilon) \to 0, n \to \infty. \tag{3}$$

Необходимость подобного (3) ограничения, в первую очередь, связано с желанием сделать каждое слагаемое равноправным в формировании значения суммы S_n. Построение теории суммирования независимых с.в. при выполнении условия (3) связано, в основном, с именами П. Леви, В. Феллера, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко. В частности, в трудах этих ученых доказано, что класс предельных законов распределений для F_n (в смысле слабой сходимости)совпадает с классом всех безгранично делимых распределений (см.[1], [2]).

Как отмечено в монографии [3], еще П. Леви попытался сформулировать условия справедливости ЦПТ без предположения о равномерной бесконечной малости слагаемых (3). Следуя В.М. Золотареву, предельные теоремы о распределениях суммы S_n, не использующие условие (3), стали называться неклассическим. Им впервые доказана следующая теорема, обобщеющая классическую ЦПТ в форме Линдеберга - Феллера (см.[4]).

Теорема 1. Пусть с.в. последовательности (1) имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии $E\xi_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2$, причем

$$\sum_j \sigma_{nj}^2 = 1 \tag{4}$$

Тогда сходимость $L(F_n, \Phi) \to 0$ (т.е. ЦПТ) имеет место тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$ выполнены следующие два условия:

а)

$$\alpha_n = \sup_j L(F_{n,j}, \Phi_{nj}) \to 0, \tag{5}$$

где $\Phi_{n,j}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$;

б) при каждом $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j \in A_n} \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 d(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)) \to 0, \tag{6}$$

где множество A_n содержит те значения индекса j, для которых $\sigma_{nj}^2 \leq \sqrt{\alpha_n}$, т.е.

$$A_n = \{j : \sigma_{nj}^2 \leq \sqrt{\alpha_n}\} \tag{7}$$

Замечание 2. В [5] доказано, что условия а) и б) могут быть объединены в одно:

для любого $\varepsilon > 0$

$$R_n(\varepsilon) = \sum_j \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx \to 0, n \to \infty. \tag{8}$$

Замечание 3. Условие равномерной бесконечной малости (3) в случае существования дисперсий σ^2_{nj} переходит в условие

$$\sup_j L(F_{nj}, 0) \to 0, n \to \infty. \tag{3$'$}$$

Следующая лемма позволяет установить отношения взаимосвязи условий (3), (5), (3′).

Лемма 1.Если выполнено условие (3′), то из условия (5) следует выполнение условия равномерной бесконечной малости (3).

Доказательство. Согласно замечанию 3, условие (3) равносильно условие (3′). Далее, по свойству метрического расстояния

$$L(F_{nj}, 0) \le L(F_{nj}, \Phi_{nj}) + L(\Phi_{nj}, 0). \tag{9}$$

Следовательно

$$\sup_j L(F_{nj}, 0) \le \alpha_n + \sup_j L(\Phi_{n,j}, 0). \tag{10}$$

Легко увидеть, что при любом j

$$L(\Phi_{nj}, 0) \le \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} d\Phi_{nj} = \int\limits_{|x|\ge\frac{\varepsilon}{\sigma_{nj}}} d\Phi \le \int\limits_{|x|\ge\frac{\varepsilon}{\sup\limits_j \sigma_{nj}}} d\Phi \to \infty, n \to \infty. \tag{11}$$

Последнее предельное соотношение в (11) вытекает из того, что согласно (4) $\sigma_{n,j} \to 0, (n \to \infty)$.

Теперь приведем и докажем некторые варианты неклассических ЦПТ в терминах характеристических функций (х.ф.).

Предварительно введем следующие обозначения:

$$f_{nj}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nj}(x), \varphi_{nj}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_{nj}(x) = e^{-\frac{\sigma^2_{nj}t^2}{2}}, j = 1, 2, ...,$$

$$f_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod_j f_{nj}(t), \varphi_n(t) = \prod_j \varphi_{nj}(t).$$

Заметим, что в силу (4) $\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Теорема 2.Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда сходимость $L(F_n, \Phi) \to 0$ (т.е. ЦПТ) имеет место тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$ выполняется следующие два условия:

1) для любого $T > 0$

$$\sup_j \sup_{|t|\le T} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \to 0. \tag{12}$$

2) при каждому положительном T

$$\sup_{|t|\leq T}\sum_{j\in A_n}|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)|\to 0, \tag{13}$$

где множество A_n определено соотношением (7).

При доказательстве теоремы 2 нами будут использованы приводимые ниже вспомогательные леммы 2-4.

Для любой ф.р. $F(x)$ положим

$$F^*(x)=1-F(x)+F(-x).$$

Пусть $g(x)-$ некоторая неотрицательная и неубывающая на $[0,\infty)$ функция, а $F(x)$ и $G(x)$ две ф.р. такие, что

$$\int_0^\infty g(x)F^*(x)dx=\int_0^\infty g(x)G^*(x)dx. \tag{14}$$

Для любых ф.р. $F(x)$ и $G(x)$ определим $\nu-$ метрику соотшением:

$$\nu(F,G)=\int_{-\infty}^{\infty} g(|x|)|(F(x)-G(x))|dx.$$

то, что ν будет (вероятностей) метрикой проверяется непосредственно.

Лемма 2.([5]). Если выполнено условие (14), то для любого $B>0$

$$\nu(F,G)\leq 4\{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)G^*(x)dx+g(B)(B+1)L(F,G)\}. \tag{15}$$

Далее, интегрированием по частям можно убедиться, что для любой ф.р. $F(x)$ с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией σ^2 справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2dF(x)=2\int_0^\infty xF^*(x)dx, \tag{16}$$

где $F^*(x)-$ определенное соотношением (14) функция.

Пусть $g(x)=x$. Тогда условие (14), согласно равенству (16), перейдет в условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2dG(x)=\sigma^2. \tag{17}$$

Положим $\overline{G}(x)=G(\sigma x)$. Тогда неравенство (15) можно переписать в виде

$$\nu(F,G)\leq 4\{\sigma^2\int_{B/\sigma}^{\infty} x(\overline{G}(x))^*dx+B(B+1)L(F,G)\} \tag{15$'$}$$

аналогичными рассуждениями, использованными при выводе равенства (16), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|x|\geq\varepsilon} x^2 dF(x) \geq \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} xF^*(x)dx. \tag{18}$$

Полагая в неравенстве (15′) $B = A\sigma$, с учетом (17), (18), а также тем, что $\sigma/A \leq 1$ при $A \geq 1$, получаем следующее

Следствие. Для любого $A \geq 1$

$$\nu(F,G) \leq 4\{\sigma^2 \int\limits_{|x|>A} x^2 d\overline{G}(x) + A^2(\sigma^2+\sigma)L(F,G)\} \tag{19}$$

Лемма 3. Пусть при $n \to \infty$ выполнено соотношение (5). Тогда для любого $T > 0$ при $n \to \infty$

$$\sup_j \sup_{|t|\leq T} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \to 0 \tag{20}$$

Замечание 4. Предельное соотношение (20) доказано в [3] рассуждениями от противного. Мы приведем здесь прямое доказательство этого соотношения, причем оценки, полученные в процессе этого доказательства, будут использованы в дальнейшем.

Доказательство. Имея в виду, что $F_{nj}(x)$ и $\Phi_{nj}(x)$ распределения с нулевыми математическими ожиданиями, для разности характерисческих функции этих распределний можем писать:

$$f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)(dF_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)).$$

Проведя здесь интегрирование по частям, получим

$$|f_{nj}(x) - \varphi_{nj}(t)| = |\int\limits_{-\infty}^{\infty} (it)(e^{itx} - 1)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x))dx.|$$

Откуда, в силу того, что $|e^{i\alpha} - 1| \leq |\alpha|$ для любого $\alpha \in R$, имеем

$$|f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \leq |t|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\,dx = t^2 v(F_{nj}, \Phi_{nj}). \tag{21}$$

Теперь воспользуемся оценкой метрики $v(F,G)$, приведенной в (19) и тем, что $\Phi_{nj}-$ распределние с дисперсией $\sigma_{nj}^2, \Phi_{nj}(\sigma_{nj}x) = \Phi(x)$. Тогда для любого $A \geq 1$

$$v(F_{nj}, \Phi_{nj}) \leq 4\{\sigma_{nj}^2 \int\limits_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + A^2(\sigma_{nj}^2 + \sigma_{nj})L(F_{nj}, \Phi_{nj})\} \tag{22}$$

Из (22), с учетом (4), получим

$$\sup_j v(F_{nj},\Phi_{nj}) \le 4\left[\int\limits_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + 2A^2\alpha_n\right]. \tag{23}$$

Утверждение леммы теперь вытекает из соотношений (5), (21), (23) и возможности выбора A достаточно большим.

Лемма 4([6]).Если $|a_k| \le 1, |b_k| \le 1; k = 1,2,...,n$, то

$$\left|\prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k\right| \le \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Достаточность. В первую очередь заметим, что в силу леммы 3 условие (12) теоремы 2 вытекает из условия a) теоремы 1.

Далее, с учетом леммы 4, можем писать

$$\left|f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \left|\prod_j f_{nj}(t) - \prod_j \varphi_{nj}(t)\right| \le \sum_j |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| =$$

$$= \sum_{j\in A_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) + \sum_{j\in \overline{A}_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)|. \tag{24}$$

Заметим теперь, что из условия 2) теоремы 2 вытекает сходимость к нулю первой суммы правой части (24). Следовательно, для окончательного доказательства утверждения теоремы 2 достаточно показать, что вторая сумма вторая сумма в (24) стремится к нулю при неограниченном росте n.

Поскольку $\sigma^2_{nj} \ge \sqrt{\alpha_n}$ при каждом $j \in \overline{A}_n$ (см.(7)), то

$$\sum_{j\in \overline{A}_n} \sigma^2_{nj} \ge \sqrt{\alpha_n} \sum_{j\in \overline{A}_n} 1.$$

Согласно (4) сумма $\sum\limits_{j\in \overline{A}_n} \sigma^2_{nj} \le 1$, следовательно число слагаемых в последней сумме, т.е. число элементов множества $\overline{A}_n$, удовлетворяет неравенству

$$|\overline{A}_n| = \sum_{j\in \overline{A}_n} 1 \le \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}. \tag{25}$$

В силу неравенств (21), (22), (25), для $T > 0$ и $A \ge 1$ можем написать следующую цепочку неравенств:

$$\sup_{|t|\le T} \sum_{j\in \overline{A}_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \le T^2 \sum_{j\in \overline{A}_n} v(F_{nj},\Phi_{nj}) \le 4T^2\left[\int\limits_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + 2A^2\sqrt{\alpha_n}\right].$$

Следовательно, если выбрать А достаточно большим, но так, чтобы $A^2\sqrt{\alpha_n} \to 0 (n \to \infty)$, то из последного неравенства получим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\le T} \sum_{j\in \overline{A}_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| = 0. \tag{26}$$

Итак, для всех t из конечного отрезка $[-T, T]$ верно предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{27}$$

т.е. условия 1) и 2) является достаточными условиями для выполнения условия (2), т.е. ЦПТ.

Необходимость. Необходимость условия 1) следует из теоремы А и леммы 3. Чтобы доказать необходимость условия 2), воспользуемся следующим соотношением, являющегося следствием того, что F_{nj} и Φ_{nj} является распределениями с одинаковыми (нулевыми) математическими ожиданиями и одинаковыми (равными σ_{nj}^2) дисперсиями:

$$f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}) d(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)).$$

Путем интегрирования получаем следующее: для любого $\varepsilon > 0$

$$|f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} it(e^{itx} - 1 - itx)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x))dx \right| \le$$

$$\le |t| \int_{|x|\le\varepsilon} \left|e^{itx} - 1 - itx\right| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx + \left| it \int_{|x|>\varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x))dx \right| \tag{28}$$

Обозначим через I_1 и I_2 соответственно первое и второе слагаемые правой части (28) и оценим их. Воспользовавщись неравенством

$$\left|e^{itx} - 1 - itx\right| \le \frac{t^2x^2}{2},$$

можем написать:

$$I_1 \le \frac{|t|^3}{2} \int_{|x|\le\varepsilon} x^2 |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx \le \frac{|t|^3}{2} \cdot \varepsilon \int_{|x|\le\varepsilon} |x|\, |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx. \tag{29}$$

Далее,

$$\int_{-\varepsilon}^{0} (-x)\, |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx = \int_{0}^{\varepsilon} u\, |F_{nj}(-u) - \Phi_{nj}(-u)|\, du \le \int_{0}^{\varepsilon} uF_{nj}(-u)du + \int_{0}^{\varepsilon} u\Phi_{nj}(-u)du. \tag{30}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_0^{\varepsilon} x\,|F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)|\,dx \le \int\limits_0^{\varepsilon} x(1-F_{nj}(x))dx + \int\limits_0^{\varepsilon} x(1-\Phi_{nj}(x))dx. \qquad (31)$$

Теперь вспомнив определения $F^*_{nj}(x)$ и $\Phi^*_{nj}(x)$, с учетом (29)-(31)и равенства (16)получим

$$I_1 \le \frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int\limits_0^{\varepsilon} xF^*_{nj}(x)dx + 2\int\limits_0^{\varepsilon} x\Phi^*_{nj}(x)dx\right] \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int\limits_0^{\infty} xF^*_{nj}(x)dx + 2\int\limits_0^{\infty} x\Phi^*_{nj}(x)dx\right] =$$

$$\frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dF_{nj}(x) + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2d\Phi_{nj}(x)\right] = \frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon(\sigma^2_{nj}+\sigma^2_{nj}) = \frac{|t|^3}{2}\cdot\varepsilon\sigma^2_{nj} \qquad (32)$$

Для оценки I_2 нам понадобится вспомогательная лемма 5. Предварительно для любой ф.р. $F(x)$ положим

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} 1-F(x), x>0, \\ \quad F(x), x\le 0, \end{cases}$$

и заметим, что для любых ф.р. $F(x)$ и $G(x)$

$$|F(x)-G(x)| \le \left|\widetilde{F}(x)-\widetilde{G}(x)\right| \le \widetilde{F}(x)+\widetilde{G}(x). \qquad (33)$$

Лемма 5. Если при некотором $k \ge 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) < \infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|^k dF(x) \le k \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|^{k-1}\widetilde{F}(x)dx. \qquad (34)$$

Доказательство леммы легко следует из соотношения

$$\int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|^k dF(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} x^k d(-\widetilde{F}(x)) + \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} (-x)^k d\widetilde{F}(x).$$

Оценим теперь I_2. Для этого сначала запишем I_2 в виде $I_2 = |I_{21}+I_{22}|$, где

$$I_{21} = it\int\limits_{|x|>\varepsilon} (e^{itx}-1)(F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x))dx, I_{22} = -it^2\int\limits_{|x|>\varepsilon} x(F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x))dx$$

Далее, можем писать (см. доказательства соотношений (21)и (22))

$$|I_{21}| \le |t| \int\limits_{|x|>\varepsilon} \left|e^{itx}-1\right| |F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)|\, dx \le |t| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|(e^{itx}-1)\right| |F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)|\, dx \le t^2 v(F_{nj},\Phi_{nj}).$$

Для $v(F_{nj},\Phi_{nj})$ справедливы неравенства (22) и (23), откуда вытекает , что

$$\sup_{|t|\le T} \sum_{j\in A_n} |I_{21}| \to 0 (n\to\infty).$$

Если воспользуемся соотношениями (33),(34), то получим оценку

$$I_{22} \le t^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|\, |F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)|\, dx \le t^2 \left[\int\limits_{|x|>\varepsilon} |x| \widetilde{F}_{nj}(x) dx + \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x| \widetilde{\Phi}_{nj}(x) dx \right] \le$$

$$\le t^2 \left[\int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nj}(x) \right] \tag{35}$$

Теперь из соотношений (28), (32), (35) следует, что

$$\sum_{j\in A_n} |f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)| \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{2}\cdot\varepsilon \sum_{j\in A_n} \sigma_{nj}^2 + t^2 \sum_{j\in A_n} \left[\int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nj}(x) \right] + \sum_{j\in A_n} |I_{21}|. \tag{36}$$

Поскольку $\Phi_{nj}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$, то с учетом структуры множества A_n и равенства (4) имеем

$$\sum_{j\in A_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nj}(x) = \sum_{j\in A_n} \sigma_{nj}^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon\sigma_{nj}} x^2 d\Phi(x) \le$$

$$\le \sum_{j\in A_n} \sigma_{nj}^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon\alpha_j^{-\frac{1}{4}}} x^2 d\Phi(x) \le \int\limits_{|x|>\epsilon\alpha_n^{\frac{-1}{4}}} x^2 d\Phi(x) \to 0 (m\to\infty) \tag{37}$$

Последнее соотношение формулы (37) вытекает из конечности дисперсии и из условия (5). Очевидно, что аналогичное соотношение справедливо и для слагаемых с $\widetilde{F}_{nj}$. Окончательно из соотношений (4), (36), (37), произвольности ε и теоремы 1 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\le T} \sum_{j\in A_n} |f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)| = 0.$$

Теорема 2 доказано.

Замечание 5. Поскольку распределение с.в. однозначно определяется через х.ф., то задача нахождения необходимых и достаточных условий для справедливости ЦПТ в терминах х.ф. является существенной в теории суммирования с.в. Это тем более важно, потому что выполнение условий, накладываемых на распределения слагаемых, сформулированные в терминах х.ф., обычно легко проверяются.

Замечание 6. Теорема 2 существенно обобщает классическую теоерему Линдеберга-Филлера. в идейном отношении вероятностный смысл теоремы 2 сводится к следующему: предварительно (как и в случае теоремы 1) выделяется подпоследовательность слагаемых с.в., которые удовлетворяют условию равномерной бесконечной малости, а потом для них проверяется выполнение классического условия Линдеберга.

При помощи небольшой видоизменений в доказательстве теоремы 2 можно убедиться в справедливости следующей теоремы, в которой два условия 1) и 2) объединены в одно.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (4). Тогда сходимость $L(F_n, \Phi) \to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup_{|t|\le T} \sup_{j} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \to 0, \tag{38}$$

при $n \to \infty$ и любом $T > 0$.

Эта теорема является аналогом выше упомянутой теоремы из [5] в терминах х.ф.

Авторы выражают глубокую признательность академику АН РУз Ш.К. Форманову за постановку задачи и полезные советы при написании статьи.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.-М.:Гостехиздат, 1949.- 264 с.

[2] *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. - М.: Наука, 1972.- 414 с.

[3] *Линник Ю.В., Островский И.В.* Разложения случайных величин и векторов. - М.: Наука, 1972. - 480 с.

[4] *Золотарев В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. - М.: Наука, 1986. - 417 с.

[5] *Rotar V.* Probability Thoery. World Scientific, River Edge, Nj, 1997. - 414 p.

[6] *Аканбай Н., Форманов Ш.К.* Неклассический вариант слабой сходимости в центральной предельной теореме - ДАН РУз., №4, 2012 , С. 3-6.

References

[1] *Gnedenko B.V.,Kolmogorov A.N.* Predel'nye raspredelenija dlja summ i nezavisimyh sluchajnyh velichin. M.:Gostehizdat, 1949.- 264 s.

[2] *Petrov V.V.*Summy nezavisimyh sluchajnyh velichin. M.: Nauka, 1972.- 414 s.

[3] Linnik Ju. V, Ostrovskij I.V. Razlozhenija sluchajnyh velichin i vektorov.M.: Nauka, 1972. - 480 s.

[4] *Zolotarev* Sovremennaja teorija summirovanija nezavisimyh sluchajnyh velichin.M.: Nauka, 1986. - 417 s.

[5] *Rotar V.* Probability Thoery. World Scientific, River Edge, Nj, 1997. - 414 p.

[6] *Akanbaj N., Formanov Sh.K.* Neklassicheskij variant slaboj shodimosti v central'noj predel'noj teoreme.- DAN RUz., №4, 2012 , s. 3-6.

Поступила в редакцию 28 апреля 2013 года