УДК 517.95

Н.С. Ахтаева, Э.Т. Каримов

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан; Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
e-mail: akhtaeva_nazgul@mail.ru, erkinjon@gmail.com

О краевой задаче с условием сопряжения интегрального вида для смешанного параболо - гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа

В работе изучены вопросы однозначной разрешимости одной локальной задачи с интегральными условиями сопряжения на линии изменения типа для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка. При определенных ограничениях на данные задачи доказывается теоремы существования и единственности решения задачи.
Ключевые слова: {Смешанное параболо-гиперболическое уравнение, условия сопряжения, интегральное уравнение.}

N.S. Akhtaeva, E.T. Karimov

A boundary value problem with adjointing condition of integral type for mixed parabolic - hyperbolic equations with non-characteristic line type change

In work questions of unique solvability of one local problem with integrated conditions of adjointing on the line of change of type for mixed parabolo-hyperbolic equation of the second order are studied. Under certain restrictions on the data of the problem we prove the existence and uniqueness of solutions of the problem.
Key words: {Mixed parabolo-hyperbolic equation,conditions of adjointing, integral equation.}

Н.С. Ақтаева, Е.Т. Кәрімов

Тип өзгеру сызығы характеристика болмаған аралас парабола-гиперболалық теңдеу үшін интегралдық түрдегі түйіндес шартты шекаралық есеп туралы

Жұмыста екінші ретті аралас парабола-гиперболалық теңдеулер үшін тип өзгеру сызығында түйіндес интегралдық шарттарымен берілген локалді есебінің бірмәнді шешілу мәселесі қарастырылады. Есептің берілгеніне нақтылы шектеулерден кейін есеп шешімінің бар болуы және бірмәнділігі туралы теоремалар дәлелденді.

Түйін сөздер: {Аралас парабола-гиперболалық теңдеу, түйіндес шарты, интегралдық теңдеу.}

Рассмотрим уравнение

$$f(x,y)=\begin{cases} u_x-u_{yy},\ y>0\\ u_{xx}-u_{yy},\ y<0\end{cases} \tag{1}$$

в конечной области Ω, ограниченной при $y>0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x=0, y=1, x=1$ соответственно, а при $y<0$ характеристиками $AC:\ x+y=0$ и $BC:\ x-y=1$ уравнения (1).

Задача. Найти решение уравнения (1) из класса функций

$$W=\left\{u(x,y):\ u\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega_1\cup\Omega_2\cup AB\right)\cap C_y^2\left(\Omega_1\right)\cap C^2\left(\Omega_2\right)\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u\left|_{AA_0\cup A_0B_0}\right.=0, \tag{2}$$

$$u\left|_{AC}\right.=0, \tag{3}$$

условию сопряжения

$$u_y(x,+0)=\alpha u_y(x,-0)+\beta\int\limits_x^1 u_y(t,-0)Q(x,t)dt,\ 0<x<1, \tag{4}$$

где $\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}$, $f(x,y)$, $Q(x,t)$ – заданные функции, $\alpha,\beta\in R$, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Это задача в случае, когда $\beta=0,\alpha=1$ совпадает с классической задачей Трикоми для уравнения (1) и является вольтерровой задачей (см. например [1]).

Различные краевые задачи с непрерывными и разрывными условиями склеивания исследованы во многих работах, информации об основных из этих работ можно найти в монографии [2]. Опуская огромную библиографию по этому направлению отметим работы [3-7], где изучены вопросы разрешимости краевых задач с условиями сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболических уравнений.

Мы исследуем задачу в следующих двух случаях: 1) $\alpha=0$, $\beta\neq 0$; 2) $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$.

Получение основных функциональных соотношений на линии изменения типа

В области Ω_1 решение 1-краевой задачи для уравнения (1) представимо в виде [2]:

$$u(x,y)=\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^1 G\left(x-x_1,y,y_1\right)f\left(x_1,y_1\right)dy_1+\int\limits_0^x G_{y_1}\left(x-x_1,y,0\right)\tau_1(x_1)dx_1, \tag{5}$$

где $\tau_1(x) = u(x, +0)$,

$$G(x, y, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[exp\left\{ -\frac{(y - y_1 + 2n)^2}{4x} \right\} - exp\left\{ -\frac{(y + y_1 + 2n)^2}{4x} \right\} \right]$$

– функция Грина 1-краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_1.

Вычислив производную u_y и устремляя y к нулю получим

$$\nu_1(x) = -\int_0^x k(x-t)\tau_1'(t)dt + \Phi_0(x), \tag{6}$$

где $u_y(x, +0) = \nu_1(x)$,

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{n^2}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \widetilde{k}(x),$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x - x_1, y_1) f(x_1, y_1) dy_1,$$

$$G_0(x, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y_1 + 2n) exp\left(-\frac{(y_1 + 2n)^2}{4x}\right).$$

В области Ω_2 решение ищем в виде

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left[\tau_2(\xi) + \tau_2(\eta) - \int_\xi^\eta \nu_2(t)dt\right] - \int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1, \eta_1)d\eta_1, \tag{7}$$

где $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $f_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$, $\tau_2(x) = u(x, -0)$, $u_y(x, -0) = \nu_2(x)$.

Используя условие (3) находим

$$\nu_2(\eta) = \tau_2'(\eta) - 2\int_0^\eta f_1(\xi_1, \eta)d\xi_1. \tag{8}$$

(8) подставим в условие сопряжения (4) и получим

$$\nu_1(x) = \alpha\tau_1'(x) + \beta\int_x^1 \tau_1'(t)Q(x,t)dt - 2\alpha\int_0^x f_1(\xi_1, x)d\xi_1 - 2\beta\int_x^1 \left(\int_0^t f_1(\xi_1, t)d\xi_1\right)Q(x,t)dt. \tag{9}$$

Доказательство единственности решения задачи. Умножим уравнение $u_x - u_{yy} = 0$ на функцию u и интегрируем по области Ω_1. Применяя формулу Грина, после использования условия (2), имеем

$$\iint_{\Omega_1} u_y^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(1, y)dy + \int_0^1 \tau_1(x)\nu_1(x)dx = 0. \tag{10}$$

Учитывая (9) в однородном случае, получим

$$I=\int\limits_0^1 \tau_1(x)\nu_1(x)dx=\alpha\int\limits_0^1 \tau_1(x)\tau_1(x)dx+\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)dx\int\limits_x^1 \tau_1'(t)Q(x,t)dt=I_1+I_2.$$

Легко можно убедиться, что если $\alpha\geq 0$, то $I\geq 0$. Используя формулу интегрирования по частьям I_2 напишем следующим образом:

$$I_2=\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)\left[\tau_1(1)Q(x,1)-\tau_1(x)Q(x,x)\right]dx-\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)dx\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_t(x,t)dt=I_{2,1}-I_{2,2}.$$

Пусть $Q(x,1)=0$. Если $\beta Q(x,x)\leq 0$, то $I_{2,1}\geq 0$. Если далее предположим, что $Q(x,t)=Q_1(x)Q_2(t)$, то $I_{2,2}=-\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)Q_1(x)dx\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt$. Так как

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2=-2\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)\times\tau_1(x)Q_2'(x)dt,$$

то интегрируя по частьям, после несложных преобразований имеем

$$I_{2,2}=-\frac{\beta}{2}\frac{Q_1(0)}{Q_2'(0)}\left(\int\limits_0^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2-\frac{\beta}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'dx.$$

Если $\frac{\beta Q_1(0)}{Q_2'(0)}\leq 0$, $\beta\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'\leq 0$, то $I_{2,2}\geq 0$.

Учитывая вышеполученные условия, получим, что $I\geq 0$. Тогда из (10) получим, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega_1}$. Учитывая искомий класс функции и решение задачи Коши получим, что $u(x,y)\equiv 0$ и в области $\overline{\Omega_2}$. И так, мы можем заключить, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega}$.

Теперь сформулируем только что доказанное утверждение в виде теоремы.

Теорема 1 *Пусть*

$$\alpha\geq 0,\ Q(x,t)=Q_1(x)Q_2(t),\ Q_2(1)=0,\ \beta Q_1(x)Q_2(x)\leq 0,\ \frac{\beta Q_1(0)}{Q_2'(0)}\leq 0,\ \beta\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'\leq 0.$$

Тогда если существует решение задачи, то оно единственно.

Замечание. В качестве примера для такой функции $Q(x,t)$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 1 приведем следующую функцию:

$$Q(x,t)=-x(1-t)^{\lambda},\ 0<\lambda<1.$$

Существование решения задачи

Справедлива следующая теорема о существовании решения задачи.

Теорема 2 *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Если* $f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $f(0,0)=0$, $Q(x,t) \in C([0,1]\times[0,1]) \cap C^1((0,1)\times(0,1))$, *то существует единственное решение задачи.*

Доказательство: (9) подставим в (6):

$$\begin{aligned} &\alpha\tau_1'(x) + \beta\int\limits_x^1 \tau_1'(t)Q(x,t)dt + \int\limits_0^x \tau_1'(t)k(x-t)dt = \\ &= \Phi_0(x) + 2\alpha\int\limits_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1 + 2\beta\int\limits_x^1 Q(x,t)dt\int\limits_0^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1. \end{aligned} \tag{11}$$

При $\beta=0, \alpha\neq 0$ уравнение (11) будет интегральным уравнением Вольтерра 2-рода с ядром $k(x)$, которая имеет слабую особенность, а правая часть непрерывно дифференцируема. Поэтому в этом случае задачно будет однозачно разрешима.

В случае, когда $\alpha=0, \beta\neq 0$ из (11) сначало получим интегральное уравнение Абелья, потом действуя по стандартному методу получим интегральное уравнение Фредгольма 2-рода вида

$$\tau'(x) + \int\limits_0^1 K_1(x,z)\tau'(z)dz = \Phi_1(x), \tag{12}$$

а в случае, когда $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$ сразу из (11) получим интегральное уравнение вида

$$\tau'(x) + \int\limits_0^1 K_2(x,z)\tau'(z)dz = \Phi_2(x), \tag{13}$$

где $\tau(x)=\tau_1(x)=\tau_2(x)$,

$$K_1(x,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^{x-z} \frac{dt}{\sqrt{x-t-z}}\frac{\partial\widetilde{k}(t)}{\partial t}dt + \beta\frac{Q(z,z)}{\sqrt{x-z}},\ 0\le z\le x, \\ -\beta\int\limits_z^1 \frac{\frac{\partial Q(t,z)}{\partial t}}{\sqrt{x-t}}dt,\ x\le z\le 1, \end{array}\right.$$

$$K_2(x,z) = \frac{1}{\alpha}\left\{\begin{array}{l} k(x-t),\ 0\le z\le x, \\ \beta Q(t,z),\ x\le z\le 1, \end{array}\right.$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{x-x_1}\frac{\frac{\partial G_0(t,y_1)}{\partial t}}{\sqrt{x-x_1-t}}dt\right]f(x_1,y_1)dy_1 + \right.$$

$$+2\beta\left[\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}}\int\limits_t^1 \frac{\partial Q(t,z)}{\partial t}dz\int\limits_0^z f_1(\xi_1,z)d\xi_1 - \right.$$

$$-\int\limits_0^x d\xi_1 \int\limits_0^{x-\xi_1} \frac{Q(\xi_1+t,\xi_1+t)}{\sqrt{x-t-\xi_1}} f_1(\xi_1,\xi_1+t)dt\Bigg]\Bigg\},$$

$$\Phi_2(x)=\frac{1}{\alpha}\Bigg\{\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^1 G_0(x-x_1,y)f(x_1,y_1)dy_1+2\alpha\int\limits_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1+$$

$$+2\beta\int\limits_x^1 Q(x,t)dt\int\limits_0^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1\Bigg\}.$$

Легко можно убедиться, что если выполнены условия теоремы 1 и 2, то интегральные уравнения (12) и (13) однозначно разрешимы. После нахождении функции $\tau(x)$, функции $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$ находятся по формулам (6) и (8) соответственно. После нахождения этих функций, решение задачи можно восстановить в области Ω_1 как решение 1-краевой задачи, а в области Ω_2 как решение задачи Коши.

Список литературы

[1] *Бердышев А.С.* О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. –1989. -No 3. – С.14–18.

[2] *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. // Ташкент: Фан. – 1986. – 220 с.

[3] *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения. - 1997. - Т.33. No 1. – С.115-119.

[4] *Eshmatov B.E., Karimov E.T.* Boundary value problems with continuous and special gluing conditions for parabolic–hyperbolic type equations. // Cent.Eur. J. Math.-2007.-Vol.5, No 4. – P.741–750.

[5] *Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A.* Nonlocal Problems with Special Gluing for a Parabolic- Hyperbolic Equation // Proceedings of the 6th International ISAAC Congress "Further Progress in Analysis". Ankara, Turkey, 13-18 August 2007. – P. 727-734.

[6] *Berdyshev A.S., Karimov E.T., Akhtaeva N.S.* Boundary Value Problems with Integral Gluing Conditions for Fractional-Order Mixed-Type Equation // International Journal of Differential Equations 2011, Volume 2011, Article ID 268465, 10 pages. doi:10.1155/2011/268465.

[7] *Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T.* On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator // Nonlinear analysis: Theory, Methods and Applications (NATMA).-2012.Vol.75. No 6. – P.3268-3273.

References

[1] *Berdyshev A.S.* O lokalnyh kraevyh zadachah s othodom ot haracteristici dlya parabolo-giperbolicheskogo uravnenya // Izvestya AN UZSSR. Seria fiz-mat nauk. -1989. -No 3. – S.14–18.

[2] *Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamozhanov M.* Kraevye zadachi dlya uravnenya parabolo-giperbolicheskogo tipa // Tashkent: Fan. – 1986. – 220 s.

[3] *Kapustin N.U., Moiseev E.I.* O spektralnyh zadachah so spektralnym parametrom v granichnom uslovii // Differensialnye uravnenya. - 1997. - T.33. No 1. – S.115-119.

[4] *Eshmatov B.E., Karimov E.T.* Boundary value problems with continuous and special gluing conditions for parabolic–hyperbolic type equations. // Cent.Eur. J. Math.-2007.-Vol.5, No 4. – P.741–750.

[5] *Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A.* Nonlocal Problems with Special Gluing for a Parabolic- Hyperbolic Equation // Proceedings of the 6th International ISAAC Congress "Further Progress in Analysis". Ankara, Turkey, 13-18 August 2007. – P. 727-734.

[6] *Berdyshev A.S., Karimov E.T., Akhtaeva N.S.* Boundary Value Problems with Integral Gluing Conditions for Fractional-Order Mixed-Type Equation // International Journal of Differential Equations 2011, Volume 2011, Article ID 268465, 10 pages. doi:10.1155/2011/268465.

[7] *Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T.* On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator // Nonlinear analysis: Theory, Methods and Applications (NATMA).- 2012. Vol.75. No 6. – P.3268-3273.

Поступила в редакцию 26 апреля 2013 года