УДК 517.977.55

З.Н. Мурзабеков, Ш.А. Айпанов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
e-mail: murzabekov-zein@mail.ru, aipanov@mail.ru

Конструирование оптимального управления с обратной связью для нестационарных линейных систем при закрепленных концах траекторий *

В работе предлагается алгоритм решения задачи оптимизации для нестационарных неоднородных линейных систем управления. Рассматривается задача с квадратичным функционалом затрат и ограниченным управлением из множества в форме эллипсоида. Требуется оптимальным образом перевести систему из заданного начального состояния в начало координат за конечный интервал времени. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что входной сигнал ищется в виде синтезирующего управления, зависящего от текущего состояния системы и времени. Использование множителей Лагранжа специального вида позволяет сконструировать искомое управление с обратной связью, обеспечивающее выполнение заданных ограничений на значения управления и точный перевод системы в начало координат за конечный интервал времени. Предлагаемый метод представлен в виде алгоритма, удобного для реализации на компьютере. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач оптимального управления космическими аппаратами, самолетами, роботами-манипуляторами и т.д.

Ключевые слова: линейная система, квадратичный функционал, эллипсоид, управление с обратной связью, множители Лагранжа.

Z.N. Murzabekov, Sh.A. Aipanov

Constructing the feedback optimal control for nonstationary linear systems with fixed endpoints of trajectories

The algorithm for solving the optimization problem for nonstationary nonhomogenous linear control systems is offered in this article. The problem with quadratic cost functional and ellipsoid-constrained control is considered. It is required to transfer the system from the given initial state to the origin along the optimal way for a finite time interval. The feature of the considered problem is that the entrance signal is looked for in the form of the synthesizing control which depends on current state of the system and time. Usage of Lagrange multipliers of a special form allows to construct the required feedback control providing a fulfillment of given constraints on control values and exact transfer the system into the origin for a finite time interval. The offered method is presented in the form of the algorithm convenient for computer-aided realization. The received results can be used for solving the optimal control problems for spacecrafts, planes, robot manipulators, etc.

Key words: {linear system, quadratic functional, ellipsoid, feedback control, Lagrange multipliers.}

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 1625 / ГФ3, 2013-2015 гг.

З.Н. Мұрзабеков, Ш.Ә. Айпанов

Жолсызықтарының ұштары бекітілген жағдайда тұрлаусыз сызықтық жүйелер үшін кері байланысты тиімді басқарым құру

Жұмыста тұрлаусыз біртектес емес сызықтық басқару жүйелері үшін тиімділеу есебін шешу алгоритмі ұсынылған. Квадраттық шығын функционалы және эллипсоид түріндегі жиыннан алынған шенелген басқарымы бар есеп қарастырылған. Жүйені ақырлы уақыт аралығында берілген бастапқы жағдайдан координаталар басына тиімді тәсілмен көшіру керек. Қарастырылып отырылған есептің ерекшелігі – кіріс сигналы жүйенің ағымдық жағдайы мен уақытқа тәуелді синтездеуші басқарым түрінде ізделінеді. Арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштерін қолдану басқарымның мәндеріне қойылған шектеулердің орындалуын қамтамасыз ететін және ақырлы уақыт аралығында жүйені координаталар басына дәл жеткізетін ізделінді кері байланысты басқарымды құруға мүмкіндік береді. Ұсынылып отырылған әдіс компьютерде жүзеге асыруға ыңғайлы алгоритм түрінде сипатталған. Алынған нәтижелерді ғарыш аппараттарын, ұшақтарды, робот-манипуляторларды, т.б. тиімді басқару есептерін шешу үшін қолдануға болады.

Түйін сөздер: {сызықтық жүйе, квадраттық функционал, эллипсоид, кері байланысты басқарым, Лагранж көбейткіштері.}

Введение. На практике часто встречаются задачи оптимального управления динамическими системами с закрепленными концами траекторий. Это, например, задачи управления космическими аппаратами, самолетами, роботами-манипуляторами и т.д. В этих задачах требуется обеспечить перевод системы из заданного начального состояния в желаемое конечное состояние за конечный интервал времени, минимизируя при этом затраты топлива или энергии.

Различные математические постановки задач оптимального управления и практические примеры приведены в [1, 2]. Обстоятельный обзор моделей и методов, используемых в современной теории оптимального управления содержится в [3]. Задача оптимального управления для динамических систем может быть сформулирована как задача нахождения программного управления $u(t)$ или как задача конструирования синтезирующего управления $u(x,t)$, т.е. управления с обратной связью, зависящего от вектора состояния системы x и текущего времени t. В первом случае задача может быть решена с использованием принципа максимума Понтрягина [4], во втором случае для решения задачи можно использовать метод динамического программирования Беллмана [5] или достаточные условия оптимальности Кротова [6].

Отметим, что особенностью рассматриваемой задачи является то, что траектории системы должны проходить через фиксированные точки в начальный и конечный моменты времени, т.е. левые и правые концы траекторий являются закрепленными. Приведенный в данной работе метод решения задачи оптимального управления основан на использовании множителей Лагранжа [7], причем предлагается использовать множители специального вида [8], которые позволяют построить синтезирующее управление и обеспечивают приведение системы к желаемому состоянию в конечный момент времени.

1 Постановка задачи

Рассматривается линейная система управления, описываемая дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad (t_0 \le t \le T), \tag{1}$$

с заданным начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

и конечным условием

$$x(T) = 0_n, \tag{3}$$

с ограничением на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u \in E^m \mid 0.5\, u'D(t)u - d \le 0\}, \quad d > 0, \quad (t_0 \le t \le T). \tag{4}$$

Здесь $x(t)$ – n-вектор состояния объекта; $u(t)$ – m-вектор кусочно-непрерывных управляющих воздействий; $A(t)$, $B(t)$ – матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$ соответственно (элементы этих матриц являются непрерывными функциями); $f(t)$ – n-вектор непрерывных функций; $D(t)$ – положительно определенная $(m \times m)$-матрица; 0_n – нулевой n-вектор; штрих $(')$ означает операцию транспонирования. Динамика системы рассматривается в интервале времени $[t_0, T]$, где t_0 и T – заданные начальный и конечный моменты времени.

Целевой функционалом имеет вид

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{T} [0.5\, x'(t)Q(t)x(t) + 0.5\, u'(t)R(t)u(t)]\, dt, \tag{5}$$

где $Q(t)$ – положительно полуопределенная $(n \times n)$-матрица, $R(t)$ – положительно определенная $(m \times m)$-матрица.

Ставится задача: найти синтезирующее управление $u(t) = u(x(t), t)$, которое удовлетворяет ограничению (4) и переводит систему (1) из заданного начального состояния (2) в конечное состояние (3) (в начало координат) за фиксированный интервал времени $[t_0, T]$, минимизируя при этом функционал (5).

2 Алгоритм решения задачи

Предлагаемый метод решения задачи основан на достаточных условиях оптимальности, полученных в [8]. Для снятия ограничения в виде дифференциальной связи (1) используется множитель Лагранжа $\lambda_0(t) = \lambda_0(x(t), t) = K(t)x(t) + q(t)$, где $K(t)$ – симметрическая $(n \times n)$-матрица, $q(t)$ – n-вектор-функция, подлежащие определению. А другой множитель Лагранжа $\lambda(t) \ge 0$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить выполнение ограничения (4) на значения управлений.

Обозначим через $W(t, T)$ симметрическую $(n \times n)$-матрицу вида

$$W(t, T) = \int\limits_{t}^{T} \Phi(t, \tau) S(t) \Phi'(t, \tau)\, d\tau.$$

Здесь $S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$ – симметрическая $(n \times n)$-матрица; $\Phi(t, \tau) = \Theta(t)\Theta^{-1}(\tau)$ – матрица размерности $(n \times n)$; $\Theta(t)$ – фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения вида $\dot{y}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]y(t)$.

Оптимальная траектория движения системы и оптимальное управление в задаче (1)–(5) могут быть найдены с использованием следующего алгоритма:

1) Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(T) = K_T,\\
&\dot{W}(t,T) = [A(t) - S(t)K(t)]W(t,T) + W(t,T)[A(t) - S(t)K(t)]' - S(t), \quad W(T,T) = O_n,
\end{aligned} \tag{6}$$

где K_T – положительно полуопределенная симметрическая $(n \times n)$-матрица; O_n – нулевая $(n \times n)$-матрица. В результате интегрирования системы (6) определяются матрицы $K_0 = K(t_0)$ и $W_0 = = W(t_0, T)$ (интегрирование производится в обратном направлении изменения времени).

2) Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_0) = K_0,\\
&\dot{\Phi}(t_0,t) = -\Phi(t_0,t)[A(t) - S(t)K(t)], \quad \Phi(t_0,t_0) = I_n,\\
&\dot{\chi}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]\chi(t) - S(t)\eta(t) + f(t), \quad \chi(t_0) = x_0,\\
&\dot{\eta}(t) = -[A(t) - S(t)K(t)]'\eta(t) - K(t)f(t), \quad \eta(t_0) = 0_n,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\chi(t)$, $\eta(t)$ – вспомогательные n-векторы; I_n – единичная $(n \times n)$-матрица. В результате интегрирования системы (7) определяются матрица $\Phi(t_0, T)$ и вектор $\chi(T)$, тем самым можно вычислить вектор

$$q_0 = W^{-1}(t_0,T)\Phi(t_0,T)\chi(T) \tag{8}$$

(предполагается, что матрица $W(t_0, T)$ невырождена).

3) Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_0) = K_0,\\
&\dot{W}(t,T) = [A(t) - S(t)K(t)]W(t,T) + W(t,T)[A(t) - S(t)K(t)]' - S(t), \quad W(t_0,T) = W_0,\\
&\dot{x}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]x(t) + B(t)\varphi(x(t),t) - S(t)q(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0,\\
&\dot{q}(t) = -[A(t) - S(t)K(t)]'q(t) + W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x(t),t) - K(t)f(t), \quad q(t_0) = q_0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь выбор вектора q_0 в начальном условии $q(t_0) = q_0$ в виде (8) обеспечивает прохождение траектории системы через начало координат в момент времени T, т.е. выполнение конечного условия $x(T) = 0_n$. Полученное из (9) решение $x(t)$, $(t_0 \le t \le T)$ соответствует искомой *оптимальной траектории* движения системы. В процессе интегрирования системы (9) вычисляется *оптимальное управление* по формуле

$$\begin{aligned}
&u(x(t),t) = -[R(t) + \lambda(t)D(t)]^{-1}B'(t)[K(t)x(t) + q(t)] =\\
&= \omega(x(t),t) + \varphi(x(t),t), \quad (t_0 \le t \le T),
\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
&\omega(x(t),t) = -R^{-1}(t)B'(t)[K(t)x(t) + q(t)],\\
&\varphi(x(t),t) = \{[I_m + \lambda(t)R^{-1}(t)D(t)]^{-1} - I_m\}\omega(x(t),t);
\end{aligned} \tag{11}$$

I_m – единичная $(m \times m)$-матрица.

В формулах (10), (11) множитель Лагранжа $\lambda(t) \ge 0$ следует выбрать так, чтобы обеспечить выполнение ограничения (4) на значения управлений. Если в момент времени t выполняется неравенство $0.5\,\omega'(x(t),t)D(t)\omega(x(t),t) - d \le 0$, то можно принять

$\lambda(t) = 0$; в противном случае $\lambda = \lambda(t)$ выбирается из условия

$$\delta(\lambda) = 0.5\, u'(x(t), t)D(t)u(x(t), t) - d = 0. \tag{12}$$

Можно показать, что существует единственный корень $\lambda > 0$ уравнения $\delta(\lambda) = 0$, который может быть найден с использованием известных численных методов (например, метода дихотомии [9]).

3 Пример

Рассматривается система, динамика которой в интервале времени $[t_0, T] = [0, 3]$ описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2\, x_1(t) + 3\, x_2(t) + u_1(t) + \sin t, \\ \dot{x}_2(t) &= -4\, x_1(t) - \ln(t+1)x_2(t) + u_2(t) \end{aligned} \tag{13}$$

с начальными условиями $x_1(t_0) = 7$ и $x_2(t_0) = 2$. Управления u_1 и u_2 могут принимать значения из эллипса $5\, u_1^2 - 6\, u_1 u_2 + 5\, u_2^2 - 8 \le 0$. Требуется перевести систему в начало координат, т.е. обеспечить выполнение конечных условий $x_1(T) = 0$ и $x_2(T) = 0$, минимизируя при этом функционал

$$\begin{aligned} J(u) = &\int_{t_0}^{T} [0.5\,(e^{-t} + 1)x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) + 0.5\, x_2^2(t) + \\ &+ 0.5\, u_1^2(t) + 0.5\,(t+1)u_2^2(t)]\, dt \to \inf_u . \end{aligned} \tag{14}$$

Результаты численных расчетов, полученные с использованием алгоритма, приведенного в предыдущем разделе, показаны на рис. 1 и 2. Найденные управления обеспечивают достаточно точный перевод системы из начального состояния $(7, 2)$ в начало координат $(0, 0)$ за интервал времени $[t_0, T] = [0, 3]$ (в численных расчетах получены значения $x_1(T) \approx 0.26 \cdot 10^{-12}$ и $x_2(T) \approx 0.52 \cdot 10^{-12}$).

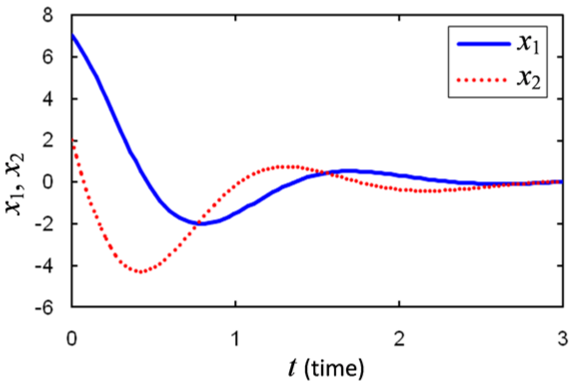

Рис. 1: Фазовые переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$

Как видно из рис. 2, оптимальные управления в интервале времени $[t_0, t_1]$ принимают значения, расположенные на границе эллипса (участок AB), а в интервале $(t_1, T]$

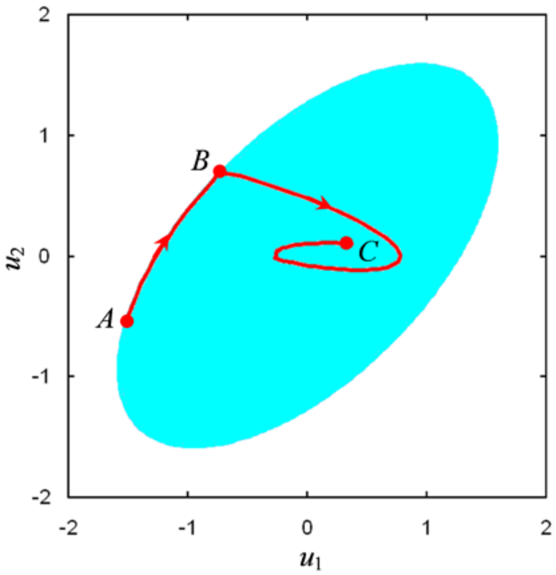

Рис. 2: Управления u_1 и u_2 (A – в начальный момент t_0;
B – в момент переключения управления t_1; C – в конечный момент T)

значения управления соответствуют внутренним точкам эллипса (участок BC). Переключение управления происходит в момент времени $t_1 \approx 0.4298$.

Заключение. В работе рассмотрена линейно-квадратичная задача оптимального управления, где допустимые значения входа принимают значения из заданного множества в виде эллипсоида. Особенностью задачи является то, что левые и правые концы траекторий являются закрепленными, требуется перевести систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(T) = 0_n$ за заданный интервал времени $[t_0, T]$, минимизируя при этом квадратичный функционал (5).

Рассматриваемая задача оптимального управления решена здесь с использованием множителя Лагранжа специального вида. Множитель $\lambda_0(t)$ выбирается в виде функции $\lambda_0(t) = = \lambda_0(x(t), t) = K(t)x(t) + q(t)$, что позволяет сконструировать синтезирующее оптимальное управление $u(x(t), t)$. Матрица $K(t)$ и вектор $q(t)$ находятся в результате решения некоторых дифференциальных уравнений в интервале $[t_0, T]$, причем для вектора $q(t)$ условие $q(t_0) = q_0$ выбирается так, чтобы обеспечить выполнение конечного условия $x(T) = 0_n$ для вектора состояния системы.

За счет выбора другого множителя Лагранжа $\lambda = \lambda(t)$ обеспечивается выполнение ограничения (4) на значения управлений. В случае, когда управление является внутренней точкой множества $U(t)$, имеем $\lambda = 0$. Если же управление лежит на границе множества $U(t)$, то соответствующее значение $\lambda > 0$ определяется как корень уравнения $\delta(\lambda) = 0$ (см. формулу (12)).

Рассмотренный пример (13), (14) показывает применимость предлагаемого алгоритма для нестационарных линейных систем с квадратичным функционалом качества, где подинтегральная функция также может явно зависеть от времени.

Список литературы

[1] *Bryson A.E., Ho Yu-Chi.* Applied optimal control: optimization, estimation and control. – Washington: Hemisphere, 1975. – 481 p.

[2] *Athans M., Falb P.* Optimal control: introduction to the theory and its applications. – New York: McGraw-Hill, 1966. – 879 p.

[3] *Куржанский А.Б.* Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений. I. Обыкновенные системы // Диф. уравн. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 12–22.

[4] *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

[5] *Bellman R., Kalaba R.* Dynamic programming and modern control theory. – New York: Academic Press, 1966. – 112 p.

[6] *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 446 с.

[7] *Алексеев В.М. и др.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

[8] *Мурзабеков З.Н.* Достаточные условия оптимальности динамических систем с закрепленными концами // Матем. журн. – 2004. – Т. 4, № 2(12). – С. 52–59.

[9] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. – М.: Факториал пресс, 2002. – 824 с.

References

[1] *Bryson A.E., Ho Yu-Chi.* Applied optimal control: optimization, estimation and control. – Washington: Hemisphere, 1975. – 481 p.

[2] *Athans M., Falb P.* Optimal control: introduction to the theory and its applications. – New York: McGraw-Hill, 1966. – 879 p.

[3] *Kurzhanskiy A.B.* Differentsial'nye uravneniya v zadachakh sinteza upravleniy. I. Obyknovennye sistemy // Dif. uravn. – 2005. – T. 41, N 1. – S. 12–22.

[4] *Pontryagin L.S. i dr.* Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov. – M.: Nauka, 1976. – 392 s.

[5] *Bellman R., Kalaba R.* Dynamic programming and modern control theory. – New York: Academic Press, 1966. – 112 p.

[6] *Krotov V.F., Gurman V.I.* Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya. – M.: Nauka, 1973. – 446 s.

[7] *Alekseev V.M. i dr.* Optimal'noe upravlenie. – M.: Nauka, 1979. – 432 s.

[8] *Murzabekov Z.N.* Dostatochnye usloviya optimal'nosti dinamicheskikh sistem s zakreplennymi kontsami // Matem. zhurn. – 2004. – T. 4, N 2(12). – S. 52–59.

[9] *Vasil'ev F.P.* Metody optimizatsii. – M.: Faktorial press, 2002. – 824 s.

Поступила в редакцию 6 мая 2013 года