

ISSN 1563 – 0277
eISSN 2617 – 4871
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 1 (105)

Алматы
«Қазақ университеті»
2020

Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан, свидетельство № 16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год. Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.

Редакционная коллегия

научный редактор – *Б.Е. Кангужин, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби,*
заместитель научного редактора – *Д.И. Борисов, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия,*
ответственный секретарь – *Г.М. Даирбаева, к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.*

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., Университет международного бизнеса, Казахстан

Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Бектемесов М.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан

Жакебаев Д.Б. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия

Кыдырбекулы А.Б. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института аэродинамики, Германия

Мальшикин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия

Ракишева З.Б. – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания

Сагитов С.М. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Гетеборга, Швеция

Сукачев Ф.А. – профессор, академик АН Австралии, Университет Нового Южного Уэльса

Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

Темляков В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Южной Каролины, США

Токмагамбетов Н.Е. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Шиничи Накасука – PhD доктор, профессор, Университет Токио, Япония

Научное издание

Вестник. Серия математика, механика, информатика, № 1(105) 2020.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Г.М. Даирбаева

ИБ N 13401



Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 17,6 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 2159. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

IRSTI 27.31.17

<https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.01>¹T.M. Aldibekov , ²M.M. Aldazharova ¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof., E-mail: tamash59@mail.ru²PhD, E-mail: a_maira77@mail.ru

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

ON A DIAGONAL SYSTEM OF THE FIRST-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FROM TWO INDEPENDENT VARIABLES

A diagonal system of three first-order partial differential equations in two independent variables is considered. The equations entering into the diagonal system are independent from each other, therefore, the compatibility condition of the system does not arise. We consider the asymptotic behavior of solutions at an infinitely distant point, with respect to some parameter. The main place in the system is occupied by a nonlinear first-order partial differential equation, the remaining equations are adjoining equations, the solutions of which contain the initial value of one independent variable as a parameter. The attached equations are chosen appropriately, and the solution to the system is already studied, which already has an internal connection. The adjoint equations are linear first-order partial differential equations. Using the fact that the zero solutions of the characteristic equations are asymptotically stable on Lyapunov, the conditions when the set of three differential equations, considered as a diagonal system of partial differential equations of the first order, has a solution with certain initial values and is an infinitesimal function in the vicinity of an infinitely remote point are described. Methods of the theory of functions and differential inequalities in the theory of first-order differential equations are used.

Key words: differential equations, diagonal system, first order partial derivatives, asymptotic behavior.

¹Т.М. Алдибеков, ²М.М. Алдажарова¹ф.-м.ғ.д., профессор, E-mail: tamash59@mail.ru²PhD, E-mail: a_maira77@mail.ru

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Екі тәуелсіз айнымалы бойынша бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің диагональдық жүйесі туралы

Екі тәуелсіз айнымалы бойынша үш теңдеуден тұратын бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жүйесі қарастырылады. Диагональдық жүйеге кіретін теңдеулер бір-бірінен тәуелсіз болғандықтан, жүйенің үйлесімділік шартының қажеті болмайды. Қандай да бір параметр бойынша шексіз алыс нүктедегі шешімнің асимптотикалық тәртібі қарастырылады. Жүйедегі негізгі орында, бірінші ретті дербес туындылы бейсызықты дифференциалдық теңдеу болып табылады, қалған екі теңдеулер шешімдері бір тәуелсіз айнымалының алғашқы мәнін параметр ретінде қарастыратын, үлестегі бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер болып табылады. Үлестегі бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер ыңғайлы түрде таңдап алынады да, енді ішкі байланыстары бар теңдеулерден тұратын жүйенің шешімі оқып зерттеледі. Үлестегі теңдеулер бірінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеулер болып табылады. Олардың сәйкес сипаттауыш теңдеулерінің нөлдік шешімдерінің Ляпунов бойынша асимптотикалық орнықтылықтарын пайдаланып, анықталған белгілі бір алғашқы мәндерімен берілген үш дифференциалдық теңдеудің жиынтығы, бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің диагональдық жүйесі түрінде қарастырылып, шексіз алыстағы нүктенің аймағында шешімі шексіз аз функция болатын шарттар сипатталған. Функциялар теориясының және бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының тәсілдері қолданылған.

Түйін сөздер: дифференциалдық теңдеулер, диагональдық жүйе, дербес туындылар бірінші ретті, асимптотикалық тәртіп.

¹Т.М. Алдибеков, ²М.М. Алдажарова

¹д.ф.-м.н., проф., E-mail: tamash59@mail.ru

²PhD, E-mail: a_maira77@mail.ru

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

Об одной диагональной системе дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка от двух независимых переменных

Рассматривается диагональная система из трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка от двух независимых переменных. Уравнения, входящие в диагональную систему друг от друга независимы, поэтому условия совместимости системы не возникает. Рассматривается асимптотическое поведение решений на бесконечно удаленной точке, относительно некоторого параметра. Основное место в системе занимает нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, остальные уравнения являются присоединенными уравнениями, решения которых содержат начальное значение одного независимого переменного как параметр. Присоединенные уравнения выбираются подходящим образом, и изучается решение системы, уже имеющее внутреннюю связь. Присоединенные уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями с частными производными первого порядка. Используя, что нулевые решения характеристических уравнений являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову, описываются условия, когда совокупность трех дифференциальных уравнений, рассматриваемых как диагональная система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка имеет решение с определенными начальными значениями и является бесконечно малой функцией в окрестности бесконечно удаленной точки. Применяются методы теории функций и дифференциальных неравенств в теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, диагональная система, частные производные первого порядка, асимптотическое поведение.

1 Introduction

Without pretending to completeness, we note some works, whose interests more or less intersect with questions on the subject of discussion. As known, the problems of a differential equation with first-order partial derivatives in the analytical case were considered in [1-2]. The first-order partial differential equations in the nonanalytic case were considered in [3-7]. There is a guide to first-order partial differential equations [8]. Also note some useful works under the subject of investigation [9-22]. Some information on the subject is available in books [23-29].

The study of system of the first-order partial differential equations in the nonlinear case is a difficult task, since, generally speaking, the characteristic system is not developed. The paper considers a certain diagonal system of the first-order partial differential equations, which arises as a result of differential inequalities. Using the methods of the theory of functions and differential inequalities in the theory of the first-order partial differential equations, the behavior of the solution is studied.

2 Materials and research methods

On the plane of variables $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, the set

$$S = ((x, y) : 0 \leq x < +\infty, c - Lx \leq y \leq d + Lx)$$

is defined, where $c < 0$, $L > 0$, $d > 0$. The first-order diagonal system of partial differential equations is considered

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = (b_1(x)y + h_1(x, y)) \frac{\partial \theta}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \left(b_2(x)y + h_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} = (b_3(x)y + h_3(x, y)) \frac{\partial \nu}{\partial y}; \end{cases} \quad (1)$$

$$(b_1(x)y + h_1(x, y)) \frac{\partial \theta}{\partial y} \in \mathbb{C}^2(E),$$

$$\left(b_2(x)y + h_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) \frac{\partial u}{\partial y} \in \mathbb{C}^2(E),$$

$(b_3(x)y + h_3(x, y)) \frac{\partial \nu}{\partial y} \in \mathbb{C}^2(E)$; where E is a convex domain in \mathbb{R}^4 containing the point 0, the projection of which onto the (x, y) -plane contains S . Denote by $I \equiv [0, +\infty)$. The variable $x \in I$.

The diagonal system (1) is considered with initial values

$$\begin{cases} \theta(0, y) = \omega_1(y), \quad \omega_1(y) \in \mathbb{C}^2 \\ u(0, y) = \varphi(y), \quad \varphi(y) \in \mathbb{C}^2 \\ \nu(0, y) = \omega_2(y), \quad \omega_2(y) \in \mathbb{C}^2 \end{cases} \quad (2)$$

where $y \in (c, d)$;

The equation

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = (b_1(x)y + h_1(x, y)) \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (3)$$

has a characteristic equation

$$\frac{dy}{dx} = -b_1(x)y - h_1(x, y) \quad (4)$$

(4) we consider under the initial condition $y(x_0) = \bar{y}_0$, $(x_0, \bar{y}_0) \in S$, and we assume that the solution $y = y(x, x_0, \bar{y}_0)$ is defined on the set I . The equation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(b_2(x)y + h_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

consider under the initial condition

$$u(0, y) = \varphi(y) \quad (6)$$

where $\varphi(y) \in \mathbb{C}^2$, $(0, 0, \varphi(0), \varphi'(0)) \in E$; as known, problem (5), (6) for small x , $|y|$ has a unique solution $u(x, y)$ of class $\mathbb{C}^2(S)$. The equation

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = (b_3(x)y + h_3(x, y)) \frac{\partial \nu}{\partial y} \quad (7)$$

has a characteristic equation

$$\frac{dy}{dx} = -b_3(x)y - h_3(x, y) \quad (8)$$

Considering (8) under the initial condition $y(x_0) = \bar{y}_0(x_0, \bar{y}_0) \in S$ and assume that the solution $y = y(x, x_0, \bar{y}_0)$ is defined on the set I .

Theorem. *If in the diagonal system of first-order partial differential equations (1) the following conditions are satisfied:*

(A) $b_i(x) \in \mathbb{C}^2(I)$, $x \in I \equiv [0, +\infty)$, $h_i(x, y) \in \mathbb{C}^2(S)$, $h_i(x, 0) = 0$; $i = (\overline{1, 3})$;

(B) $h_2(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}) \in \mathbb{C}^2(E)$, $h_2(0, 0, u, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$ and satisfies the Lipschitz condition with respect to $(u, \frac{\partial u}{\partial y})$ in the domain E ; there is an inequality $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \neq 0$ and the solution $u(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}) > 0$ of equation (5), with the initial value (6), can be continued for $x > 0$, $(x, y) \in S$;

(C) The inequality holds $b_1(x) < b_2(x) < b_3(x)$, $x \in I$; $|b_i(x)| \leq K_i\psi(x)$, $x \in I$; $K_i > 0$, $i = (\overline{1, 3})$;

$\psi(x) \in \mathbb{C}(I)$, $\psi(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$, $\int_0^{+\infty} \psi(x)dx = +\infty$;

By definition, $q(x) = \int_0^x \psi(\tau)d\tau$;

There are limits $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_0^x \frac{(-b_i(\tau))}{\psi(\tau)} dq(\tau) = \beta_i$, $i = 1, 3$; $\beta_1 < 0$, $\beta_3 < 0$;

(D) Inequalities hold: $h_1(x, y) < h_2(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}) < h_2(x, y)$, $(x, y) \in S$;

(E) $|h_i(x, y)| = \delta(x)|y|$, $i = 1, 3$; $\delta(x) \in \mathbb{C}(I)$, $\delta(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\delta(x)}{\psi(x)} = 0$; $|\frac{\partial u}{\partial y}| < K$,

$|\frac{\partial h_2(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y}| = K\delta(x)|y|$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_0^x \frac{(-Kb_i(\tau))}{\psi(\tau)} dq(\tau) = \beta_2$, and the inequalities $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ are satisfied;

Then there exists a solution $\theta(x, y)$, $u(x, y)$, $\nu(x, y)$ of system (1), with initial value (2) such that

$\sqrt{\theta^2(x, y) + u^2(x, y) + \nu^2(x, y)} \rightarrow 0$ as $x_0 \rightarrow +\infty$.

Proof. Consider the solution $u(x, y)$ of equation (5) with the initial value $u(0, y) = \varphi(y)$. By condition $u(x, y)$, the solution is defined for $x \in I$ and $y \in (-\delta, \delta) \subset (c, d)$, where a sufficiently small number $\delta > 0$. Consider equation (4) and solutions $y = y(x, x_0, \bar{y}_0)$ of equation (4), where $(x_0, \bar{y}_0) \in S$. From conditions A) and E) It follows that the zero solution to equation (4) is asymptotically stable as $x \rightarrow +\infty$. In fact, in (4), the equation of the first approximation has the form

$$\frac{dy}{dx} = -b_1(x)y$$

From condition A), C) it follows that for solving the equation of the first approximation we have the estimate

$$|y(x)| \leq |y(x_0)|e^{\beta_1[q(x)-q(x_0)]}$$

Using this estimate to represent the solution of equation (4) in the form of an integral equation, found by varying an arbitrary constant, for any $\varepsilon \in \left(0, \frac{|\beta_1|}{2}\right)$ we obtain the estimate

$$|y(x)| \leq |y(x_0)|e^{(\beta_1+\varepsilon)[q(x)-q(x_0)]}$$

This implies the asymptotic stability of the zero solution to equation (4). We assume that asymptotic stability occurs for the initial values $|\bar{y}_0| < \delta$. Take $\omega_1(y)$ and the integral

$\bar{y}_0\theta(x, y, x_0)$ of equation (4) satisfying the conditions $\frac{\partial\theta}{\partial y} > 0$, $\theta(0, y, x_0) = \omega_1(y)$, $\omega_1(y) < \varphi(y)$ and $\bar{y}_0 \in (-\delta, \delta)$.

Then $\theta(x, y) = \theta(x, y, x_0)$ is a solution of equation (3) satisfying the condition $\theta(0, y) = \omega_1(y)$, $(x, y, \theta, \theta_y) \in E$, and $\theta(x, y, x_0) \rightarrow 0$, $x_0 \rightarrow +\infty$.

Consider equation (8) and solutions $y = y(x, x_0, \bar{y}_0)$ of equation (8), where $(x_0, \bar{y}_0) \in S$. Similarly to equation (4), it is established that condition A) and E) imply that the zero solution to equation (8) is asymptotically stable as $x \rightarrow +\infty$. We assume that asymptotic stability occurs for the initial values $|\bar{y}_0| < \delta$. Take $\omega_2(y)$ and the integral $\bar{y}_0 = \nu(x, y, x_0)$ of equation (8) satisfying the conditions $\frac{\partial\nu}{\partial y} > 0$ and $\nu(0, y, x_0) = \omega_2(y)$, $\varphi(y) < \omega_2(y)$ and $\bar{y}_0 \in (-\delta, \delta)$. Then $\nu(x, y) = \nu(x, y, x_0)$ a solution of equation (7) satisfying the condition $\nu(0, y_0) = \omega_2(y)$, $(x, y, \theta, \theta_y) \in E$, and $\nu(x, y, x_0) \rightarrow 0$, $x_0 \rightarrow +\infty$.

By virtue of conditions C) and D), the inequalities hold

$$(b_1(x)y + h_1(x, y)) \frac{\partial\theta}{\partial y} < \left(b_2(x)y + h_2(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}) \right) \frac{\partial u}{\partial y} < (b_3(x)y + h_3(x, y)) \frac{\partial\nu}{\partial y}$$

in the domain E . By the choice of $\omega_1(y)$, $\omega_2(y)$, the inequalities holds:

$$\omega_1(y) < \varphi(y) < \omega_2(y), y \in (c, d), (x, y) \in S;$$

Consequently,

$$\sqrt{\theta^2(x, y) + u^2(x, y) + \nu^2(x, y)} \rightarrow 0 \text{ as } x_0 \rightarrow +\infty.$$

The theorem is proved.

3 Results

The paper considers a diagonal nonlinear system of first-order partial differential equations. The equations in the system are interconnected by differential inequalities and have initial values, the set of which is the initial values of the system and the initial values of the associated equations are selected appropriately. It is proved that the diagonal system under certain conditions has an infinitesimal solution in a neighborhood of an infinitely distant point.

4 Acknowledgment

The work was carried out with the support of grant financing: - Fundamental and applied research in mathematics on the topic "The investigation of the asymptotic stability of the solution and the development of asymptotic characteristics of a system of first-order partial differential equation", No. AP05132615.

References

- [1] Kovalevskaya S., "Zusatze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung uber die Gestalt der Saturnsringe"[Additions and Remarks on Laplace's Investigation of the Shape of Saturn's Rings], *Astronomische Nachrichten*, CXI (1885): 18-21
- [2] Frobenius G., "Ueber das Pfaffsche Problem", *Journal for die reine und angewandte Mathematik*, (1877): 230-315
- [3] Bendixson I., "Demonstration de l'existence de l'integrale d'une equation aux derives partielles lineaire", [Demonstration of the existence of the integral of a linear partial differential equation], *Bull. Soc. Math. France*, 24 (1896): 220-225.

-
- [4] Picard E., *Traite d'analyse* [Treatise on analysis] (Paris: Gauthier-Villars. , 1896)
- [5] Goursat E., *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. 2ed.* [Lessons on integrating first order partial differential equations.] (Paris, 1921), 77-81
- [6] Caratheodory C., *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* [Variational calculus and partial differential equations of first order] (Leipzig und Berlin:B. G. Teubner, 1935), 7-9
- [7] Gunter N.M., *Integrirvaniye uravneniy pervogo poryadka v chastnykh proizvodnykh* [Integration of first order partial differential equations] (L.-M., 1934)
- [8] Kamke E., *Spravochnik po differentsialnym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [Reference book in first-order partial differential equations]. (M.: Nauka, 1966), 260
- [9] Wazewski T., "Sur l'unicité et la limitation des intégrals des équations aux dérivées partielles du premier ordre", [On the uniqueness and the limitation of integrals of first order partial differential equations], *Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci.Fis. Mat. Nat.*, 18 (6) (1933): 372-376
- [10] Wazewski T., "Ueber die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung" [On the conditions of existence of the integrals of partial differential equations of the first order], *Math. Zeit.*, VI.7-9 No.43. (1938): 522-532
- [11] Wazewski T., "Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrals de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre" [On the appreciation of the domain of existence of the integrals of the equation with partial derivatives of the first order], *Ann. Soc. Polon. Math.* VI.9, No.14 (1935): 149-177
- [12] Perron O., "Ueber diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten" [On the integrals of linear differential equations which are determined at an uncertainty point], *Math. Ann.*, VI.13, No 70 (1911): 1-32
- [13] Plis A., "Characteristics of nonlinear partial differential equation", *Bull.Acad. Polon. Sci.*, No 2. (1954): 419-422
- [14] Digel E., "Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung" [On the conditions of existence of the integrals of the first order partial differential equations], *Math Z.* (1938): 445-451
- [15] Haar A., "Zur Charakteristikentheorie", [Characteristic Theory], *Acta Sci. Math. Szeged*, V.4. №2 (1928): 103-114
- [16] Turski S., "Sur l'unicité et la limitation des intégrals des équations aux dérivées partielles du premier ordre", [On the uniqueness and the limitation of integrals of first order partial derivative equations], *Ann. Soc. Polon. Math.*, 120 (1933): 81-86;
- [17] Petrovsky I.G., "O probleme Koshi dlya sistem uravneniy s chastnymi proizvodnymi", [On the Cauchy problem for systems of partial differential equations], *Mat. Sbornik*, V.2. No. 5. (1937)
- [18] Nagumo M., "Ueber die Ungleichung $du/dy > f(x, y, u, du/dy)$ " [About the inequality $du/dy > f(x, y, u, du/dy)$], *Japan J. Math.*, 15 (1939): 51-56;
- [19] Nagumo M., "Ueber die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$ " [About the differential equation $y'' = f(x, y, y')$], *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, 19 (3) (1937): 861-866;
- [20] Nagumo M., "Ueber das Randwertproblem der nicht linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung" [On the boundary value problem of the non-linear ordinary differential equations of the second order], *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, 24 (1942): 845-851;
- [21] Hartman P., "On exterior derivatives and solutions of ordinary differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 91 (1959): 277-292.
- [22] Kamke E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen* [Differential Equations, Solution Methods and Solutions] (Leipzig: II. Akademische Verlagsgesellschaft, 1959)
- [23] Hartman P., *Obyknovennyye differentsialnye uravneniya* [Ordinary differential equations] (M.:Mir, 1970): 719
- [24] Courant R., *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial equations] (M: Mir, 1964), 845
- [25] Petrovsky I.G., *Lektsii ob uravneniyah s chastnymi proizvodnymi* [Lectures in partial equations] 3rd ed. (M., 1961), 400
- [26] Rashevsky P.K., *Geometricheskaya teoriya s chastnymi proizvodnymi* [Partial geometric theory] (M.-L., 1947)

-
- [27] Smirnov V., *Kurs vysshei matematiki* [Higher math course] V.4, 2nd part, (M.: Nauka, 1981), 551
- [28] Stepanov V.V., *The course of differential equations, 6-th ed.* [Kurs differentsial'nykh uravneniy] (Nauka. Fizmatgiz, 1959)
- [29] Yanenko N.N. and Rojdestvensky B.L., *Sistemy kvazilineinyh uravneenii i ih prilozhenie k gazovoi dinamike* [Systems of quazilinear differential equations and their application to gas dynamics] VI.7-9, (M., 1978), 676

¹U.R. Kusherbaeva , ²G.E. Abduakhitova , ³A. Assadi

¹Cand. Sc. (Phys.-Math.), senior lecturer, E-mail: ulbi-70@mail.ru

²Cand. Sc. (Phys.-Math.), associate professor, E-mail: gulzhanae@gmail.com

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³Professor, E-mail: amirassadi@gmail.com, University of Wisconsin, Madison, USA

ON CONTINUOUS SOLUTIONS OF THE MODEL HOMOGENEOUS BELTRAMI EQUATION WITH A POLAR SINGULARITY

This paper consists of two parts. The first part is devoted to the study of the Beltrami model equation with a polar singularity in a circle centered at the origin, with a cut along the positive semi-axis. The coefficients of the equation have a first-order pole at the origin and do not even belong to the class $L_2(G)$. For this reason, despite its specific form, this equation is not covered by the analytical apparatus of I.N. Vekua [1] and needs to be independently studied. Using the technique developed by A.B. Tungatarov [2] in combination with the methods of the theory of functions of a complex variable [3] and functional analysis [4], manifolds of continuous solutions of the Beltrami model equation with a polar singularity are obtained. The theory of these equations has numerous applications in mechanics and physics. In the second part of the article, the coefficients of the equation are chosen so that the resulting solutions are continuous in a circle without a cut [5]. These results can be used in the theory of infinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with a flat point and in constructing a conjugate isometric coordinate system on a surface of positive curvature with a planar point [6].

Key words: Beltrami equation, equation with a polar singularity.

¹Ү.Р. Көшербаева, ²Г.Е. Абдуахитова, ³А. Асади

¹физ.-мат.ғ.к., аға оқытушы, E-mail: ulbi-70@mail.ru

²физ.-мат.ғ.к., доцент, E-mail: gulzhanae@gmail.com

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан

³профессор, E-mail: amirassadi@gmail.com, Висконсин университеті, Мэдисон, АҚШ

Полярлық ерекшелігі бар модельді Бельтрами теңдеуінің үзіліссіз шешімдері

Қарастырып отырған еңбек екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімі центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан оң жақ жарты осьсіз дөңгелекте берілген полярлық ерекшелігі бар модельді Бельтрами теңдеуін зерттеуге арналған. Қарастырылған теңдеудің коэффициенттерінің координаталар бас нүктесінде бірінші ретті полюстері бар және олар $L_2(G)$ класында жатпайды. Сондықтан И.Н.Векуаның [1] аналитикалық аппаратымен қамтылмаған және жеке зерттеуді қажет етеді. А.Б. Тунгатаров [2] жасаған күрделі әдісті [3] және функционалдық талдаудың [4] теориясы әдістерімен үйлестіре отырып, Белтрами моделді теңдеуінің полярлық ерекшелігі бар үздіксіз шешімдерінің түрлері алынды. Бұл теңдеулер теориясының механика мен физикада көптеген қолданыстары бар. Жұмыстың екінші бөлімінде теңдеудің шешімі қарастырылған дөңгелекте үзіліссіз болатындай етіп коэффициенттер таңдалады [5]. Бұл нәтижелерді тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң ақырсыз аз илетін беттер теориясында және тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң беттерде изометриялы түйіндес координаттарды құрастыру үшін қолдануға болады [6].

Түйін сөздер: Бельтрами теңдеуі, полярлық ерекшелігі бар теңдеу.

¹У.Р. Кушербаева, ²Г.Е. Абдуахитова, ³А. Асади

¹канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель, E-mail: ulbi-70@mail.ru

²канд. физ.-мат. наук, доцент, E-mail: gulzhanae@gmail.com

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

³профессор, E-mail: amirassadi@gmail.com, Висконсинский университет, Мэдисон, США

О непрерывных решениях модельного однородного уравнения Бельтрами с полярной особенностью

Настоящая работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена исследованию модельного уравнения Бельтрами с полярной особенностью в круге с центром в начале координат, с разрезом вдоль положительной полуоси. Коэффициенты рассматриваемого уравнения имеют полюс первого порядка в начальной точке координат и не принадлежат даже классу $L_2(G)$. По этой причине, несмотря на свой специфический вид это уравнение не охватывается аналитическим аппаратом И.Н. Векуа [1] и нуждается в самостоятельном исследовании. Используя методику разработанной А.Б.Тунгатаровым [2] в сочетании с методами теории функций комплексного переменного [3] и функционального анализа [4] получены многообразия непрерывных решений модельного уравнения Бельтрами с полярной особенностью. Теория этих уравнений имеет многочисленные приложения в механике и физике. Во второй части статьи возникшие произвольные постоянные подобраны так, чтобы построенные решения были непрерывны в круге без разреза [5]. Эти результаты могут быть использованы в теории бесконечно малых изгибов поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения и при построении сопряженно изометрической системы координат на поверхности положительной кривизны с точкой уплощения [6].

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, уравнение с полярной особенностью.

1 Introduction and review of literature

The fundamentals of the theory of generalized analytic functions (representations of the first and second kind, a generalized Cauchy formula, expansions into generalized Taylor, Laurent, and other series, as well as the theory of corresponding boundary value problems), with which the present work is closely related, were constructed by the famous mathematician I.N. Vekua [7] - [9] in the case when the coefficients of elliptic systems are summable to a power of more than two. N.K. Blied [10, 11] extended the theory of generalized analytic functions to cases where the coefficients and free terms belong to the fractional spaces of O.V. Besov. In the work of M.O. Otelbaev and K.N. Ospanov [12], the generalized Cauchy-Riemann system from the space obtained by the completion of infinitely smooth functions is investigated. A.B. Tungatarov [13] found in explicit form the right inverse operator for the Beltrami differential operator $\bar{\partial} - \mu\partial$ (an analog of the well-known operator T from [1]) for the case $\mu(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, $0 \leq \beta < 1$. The solutions of the corresponding Beltrami equation are called β -analytic functions. Ricardo Abreu-Blya, Juan Bori-Reyes, Dixan Peña-Peña and Jean-Maria Villiers [14]-[16] investigated the solvability of analogues of the Riemann boundary value problem and a number of related questions for such functions.

Let $R > 0$ and $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. In the area G we consider equation of the form

$$\partial_{\bar{z}}V - \beta e^{2i\varphi} \partial_z V + \frac{a(\varphi)}{2\bar{z}}V + \frac{b(\varphi)}{2\bar{z}}\bar{V} = 0, \quad (1)$$

where $0 \leq \beta < 1$ is a ellipticity condition,

$$a(\varphi), b(\varphi) \in C[0, 2\pi], \quad a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi), \quad b(\varphi + 2\pi) = b(\varphi).$$

The equation (1) if $\beta = 0$, $a(\varphi) = 0$ will be used in the study of infinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with a flattening point, in the neighborhood of which the surface has a special structure [6], [17]. The coefficients of the equation (1) do not even belong to the class $L_2(G)$. Therefore, using the known methods of the theory of generalized analytic functions [1], [18], it is not possible to prove the existence of continuous solutions to this

equation. The theory of the equation (1) for $\beta = 0$, $a(\varphi) = 0$, $b(\varphi) = \lambda \exp(ik\varphi)$, where λ is an arbitrary complex number and k is an integer number, is constructed in [19], [20]. A variety of continuous solutions of the equation (1) was obtained in [21], [22]; the boundary value problem for the jump for one particular case of the Beltrami equation was considered in [23].

2 Material and methods

2.1 Beltrami model homogeneous equation with a polar singularity

We proceed to solve the equation (1).

Equation (1) in the polar coordinate system is written as

$$(1 - \beta) \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{i}{r} (1 + \beta) \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (a(\varphi)V + b(\varphi)\bar{V}) = 0$$

Finding continuous solutions of the last equation by the method of separation of variables

$$V(r, \varphi) = T(r) \cdot \Psi(\varphi), \quad (2)$$

where $\overline{T(r)} = T(r)$, $T(r) \in C[0, R] \cap C^1(0, R]$, $\Psi(\varphi) \in C^1[0, 2\pi]$, we get the following system:

$$(1 - \beta)rT'(r) - \lambda T(r) = 0, \quad (3)$$

$$\Psi'(\varphi) - \frac{i}{1 + \beta} (a(\varphi) + \lambda)\Psi(\varphi) - \frac{i}{1 + \beta} b(\varphi)\overline{\Psi(\varphi)} = 0, \quad (4)$$

where $\lambda > 0$ is a real parameter.

The solution of the equation (3) is the function $T(r) = A \cdot r^{\frac{\lambda}{1 - \beta}}$, where A is a real number.

We seek the solution of the equation (4) in the form

$$\Psi(\varphi) = P_\lambda(\varphi) \exp\left(\frac{i}{1 + \beta} \left(\lambda \cdot \varphi + \int_0^\varphi a(\gamma) d\gamma\right)\right)$$

Substituting the function $\Psi(\varphi)$ into (4), we obtain the equation for $P_\lambda(\varphi)$:

$$P'_\lambda(\varphi) - A_\lambda(\varphi)\overline{P_\lambda(\varphi)} = 0, \quad (5)$$

where

$$A_\lambda(\varphi) = \frac{i}{1 + \beta} b(\varphi) \exp\left(-\frac{2i}{1 + \beta} (\lambda\varphi + \operatorname{Re}B(\varphi))\right), \quad B(\varphi) = \int_0^\varphi a(\gamma) d\gamma.$$

Thus, the solution of the equation (1) has the following form

$$V_\lambda(r, \varphi) = r^{\frac{\lambda}{1-\beta}} P_\lambda(\varphi) \exp\left(\frac{i}{1+\beta}(\lambda\varphi + B(\varphi))\right), \quad (6)$$

where $P_\lambda(\varphi)$ is the solution of the equation (5).

Now let's start solving the equation (5).

Integrating the equation (5) we obtain

$$P_\lambda(\varphi) = \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) \overline{P_\lambda(\gamma)} d\gamma + c_\lambda, \quad (7)$$

where c_λ is an arbitrary complex number.

Hence

$$\int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) \overline{P_\lambda(\gamma)} d\gamma = \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) \int_0^\gamma \overline{A_\lambda(\gamma_1)} P_\lambda(\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma + \overline{c_\lambda} \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) d\gamma \quad (8)$$

Using (8) and (7) we obtain the following equation

$$P_\lambda(\varphi) = (B_\lambda P_\lambda)(\varphi) + \overline{c_\lambda} I_{\lambda,1}(\varphi) + c_\lambda, \quad (9)$$

where

$$(B_\lambda f)(\varphi) = \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) \int_0^\gamma \overline{A_\lambda(\gamma_1)} f(\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma, \quad I_{\lambda,1}(\varphi) = \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) d\gamma.$$

Further we use operators of the form

$$(B_\lambda^2 f)(\varphi) = (B_\lambda(B_\lambda f)(\varphi))(\varphi), \quad (B_\lambda^k f)(\varphi) = (B_\lambda(B_\lambda^{k-1} f)(\varphi))(\varphi),$$

$$I_{\lambda,k}(\varphi) = \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) \overline{I_{\lambda,k-1}(\gamma)} d\gamma, \quad (k = \overline{2, \infty}).$$

The following easily verifiable relations hold for these operators

$$(B_\lambda I_{\lambda,k})(\varphi)(\varphi) = I_{\lambda,k+2}(\varphi), \quad (B_\lambda c_\lambda)(\varphi) = c_\lambda I_{\lambda,2}(\varphi), \quad (10)$$

$$|B_\lambda^n P_\lambda(\varphi)| \leq \frac{(|A_\lambda|_0 \cdot \varphi)^{2n}}{(2n)!} |P_\lambda(\varphi)|_0, \quad |I_{\lambda,k}(\varphi)| \leq \frac{(|A_\lambda|_0 \cdot \varphi)^k}{k!}, \quad (11)$$

where $|f|_0 = \|f\|_{C[0,2\pi]}$.

Applying the operator $(B_\lambda f)(\varphi)$ to both sides of equality (9) and using (10), we obtain

$$(B_\lambda P_\lambda(\varphi))(\varphi) = (B_\lambda^2 P_\lambda)(\varphi) + \overline{c_\lambda} I_{\lambda,3}(\varphi) + c_\lambda I_{\lambda,2}(\varphi) \quad (12)$$

From (9) and (12) the following equation follows

$$P_\lambda(\varphi) = (B_\lambda^2 P_\lambda)(\varphi) + \overline{c_\lambda}(I_{\lambda,1}(\varphi) + I_{\lambda,3}(\varphi)) + c_\lambda(1 + I_{\lambda,2}(\varphi)) \quad (13)$$

Applying the operator $(B_\lambda f)(\varphi)$ to both sides of equality (13) we obtain

$$(B_\lambda P_\lambda)(\varphi) = (B_\lambda^3 P_\lambda)(\varphi) + \overline{c_\lambda}(I_{\lambda,3}(\varphi) + I_{\lambda,5}(\varphi)) + c_\lambda(I_{\lambda,2}(\varphi) + I_{\lambda,4}(\varphi)) \quad (14)$$

From (9) and (14) we get

$$P_\lambda(\varphi) = (B_\lambda^3 P_\lambda)(\varphi) + \overline{c_\lambda}(I_{\lambda,1}(\varphi) + I_{\lambda,3}(\varphi) + I_{\lambda,5}(\varphi)) + c_\lambda(1 + I_{\lambda,2}(\varphi) + I_{\lambda,4}(\varphi))$$

Repeating this process, we have

$$P_\lambda(\varphi) = (B_\lambda^n P_\lambda)(\varphi) + \overline{c_\lambda} \sum_{k=1}^n I_{\lambda,2k-1}(\varphi) + c_\lambda \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} I_{\lambda,2k}(\varphi)\right) \quad (15)$$

Passing to the limit in (15) as $n \rightarrow \infty$, and by (11) we obtain

$$P_\lambda(\varphi) = \overline{c_\lambda} P_{\lambda,1}(\varphi) + c_\lambda P_{\lambda,2}(\varphi), \quad (16)$$

where $P_{\lambda,1}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\lambda,2k-1}(\varphi)$, $P_{\lambda,2}(\varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\lambda,2k}(\varphi)$.

Using inequalities (11) $P_{\lambda,1}(\varphi)$, $P_{\lambda,2}(\varphi)$ we obtain the following expressions:

$$P'_{\lambda,1}(\varphi) - A_\lambda(\varphi) \overline{P_{\lambda,2}(\varphi)} = 0, \quad P'_{\lambda,2}(\varphi) - A_\lambda(\varphi) \overline{P_{\lambda,1}(\varphi)} = 0, \quad (17)$$

$$|P_{\lambda,1}(\varphi)| \leq \text{sh}(|A_\lambda|_0 \varphi), \quad |P_{\lambda,2}(\varphi)| \leq \text{ch}(|A_\lambda|_0 \varphi), \quad (18)$$

$$P_{\lambda,2}(\varphi) - 1 = \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) \overline{P_{\lambda,1}(\gamma)} d\gamma, \quad P_{\lambda,1}(\varphi) = \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) \overline{P_{\lambda,2}(\gamma)} d\gamma \quad (19)$$

From the second equation (19) and (17) it follows

$$P_{\lambda,2}(\varphi) - 1 = \overline{P_{\lambda,1}(\varphi)} \sum_{k=1}^n I_{\lambda,2k-1}(\varphi) -$$

$$-P_{\lambda,2}(\varphi) \sum_{k=1}^n \overline{I_{\lambda,2k}(\varphi)} + \int_0^\varphi A_\lambda(\gamma) I_{\lambda,2k-1}(\gamma) \overline{P_{\lambda,1}(\gamma)} d\gamma$$

where $n \geq 1$ is a whole number.

Passing to the limit in (15) as $n \rightarrow \infty$ and using the inequalities (11), (18), we get the identity

$$|P_{\lambda,2}(\varphi)|^2 - |P_{\lambda,1}(\varphi)|^2 = 1 \quad (20)$$

It follows from (6) and (16) that any solutions of equation (1) can be found by the formula

$$V_\lambda(r, \varphi) = r^{\frac{\lambda}{1-\beta}} (\overline{c_\lambda} P_{\lambda,1}(\varphi) + c_\lambda P_{\lambda,2}(\varphi)) \times \exp\left(\frac{i}{1+\beta}(\lambda\varphi + B(\varphi))\right) \quad (21)$$

Using the formula (17), we find

$$\partial_{\bar{z}} V = r^{\frac{\lambda}{1-\beta}-1} \exp\left(i\varphi + i\frac{\lambda\varphi + B(\varphi)}{1+\beta}\right) \left(\left(1 + \frac{i}{1+\beta}(\lambda\varphi + a(\varphi))\right) \times\right.$$

$$\left. \times (\overline{c_k} P_{\lambda,1}(\varphi) + c_k P_{\lambda,2}(\varphi))\right) + iA_\lambda(\varphi) \left(c_k \overline{P_{\lambda,1}(\varphi)} + \overline{c_k} P_{\lambda,2}(\varphi)\right)$$

Obviously, the following relation holds $\partial_{\bar{z}} V \in L_p$, $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\lambda-\beta}$, $0 < \lambda + \beta < 1$.

Similarly, the following relation holds $\partial_z V \in L_p$, $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\lambda-\beta}$, $0 < \lambda + \beta < 1$.

We use the theorem of I.N. Vekua from [1] : if $\partial_{\bar{z}} V \in L_p$, $p >$, then there is $\partial_z V$ and also belongs to L_p .

Therefore, by definition we get $V \in W_p^1(G)$, $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\lambda-\beta}$, $0 < \lambda + \beta < 1$. So the function $V_\lambda(r, \varphi)$ will be a solution of the equation (1) from the class $C(G_0) \cap W_p^1(G)$, $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\lambda-\beta}$, $0 < \lambda + \beta < 1$ where $W_p^1(G)$ is the space of S.L. Sobolev from [1] and G_0 is a region of G with a cut along the semiaxis $\{z = re^{i\varphi} : r > 0, \varphi = 0\}$.

Thus, we have obtained the lemma.

Лемма 1 Equation (1) has the solutions from the class $C(G_0) \cap W_p^1(G)$, where $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\lambda-\beta}$, $0 < \lambda + \beta < 1$. Any such solutions can be found by formula (21).

2.2 Construction of continuous solutions of the Beltrami model equation with a polar singularity

Now we proceed to the construction of continuous solutions of the equation (1) in G . It follows from (21) that in general case we have that $V_\lambda(r, 0) \neq V_\lambda(r, 2\pi)$. Therefore, we choose the numbers c_λ and λ from (21) so that the following equality holds

$$V_\lambda(r, 0) = V_\lambda(r, 2\pi). \quad (22)$$

For this purpose, substituting (21) in (22), we obtain

$$\Delta_1(\lambda)\bar{c}_\lambda + \Delta_2(\lambda)c_\lambda = 0, \quad (23)$$

where $\Delta_1(\lambda) = P_{\lambda,1}(2\pi)$,

$$\Delta_2(\lambda) = P_{\lambda,2}(2\pi) - \exp\left(\frac{-2\pi i}{1+\beta}(\lambda+d)\right), d = \frac{B(2\pi)}{2\pi}.$$

Expanding on the real and imaginary parts of a complex number c_λ and expressions $\Delta_1(\lambda)$, $\Delta_2(\lambda)$ and then substituting them in (23), we obtain the following system of homogeneous equations with respect to unknowns c'_λ and c''_λ , where c'_λ and c''_λ are real and imaginary parts of the complex number c_λ respectively.

$$\begin{aligned} & c'_\lambda \left(\operatorname{Re}P_{\lambda,1}(2\pi) + \operatorname{Re} \left(P_{\lambda,1}(2\pi) - \exp\left(\frac{-2\pi i}{1+\beta}(\lambda+d)\right) \right) \right) + \\ & + c''_\lambda \left(\operatorname{Im}P_{\lambda,1}(2\pi) - \operatorname{Im} \left(P_{\lambda,2}(2\pi) - \exp\left(-\frac{2\pi i}{1+\beta}(\lambda+d)\right) \right) \right) = 0, \\ & c'_\lambda \left(\operatorname{Im}P_{\lambda,1}(2\pi) + \operatorname{Im} \left(P_{\lambda,2}(2\pi) - \exp\left(-\frac{2\pi i}{1+\beta}(\lambda+d)\right) \right) \right) - \\ & - c''_\lambda \left(\operatorname{Re}P_{\lambda,1}(2\pi) - \operatorname{Re} \left(P_{\lambda,2}(2\pi) - \exp\left(-\frac{2\pi i}{1+\beta}(\lambda+d)\right) \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

This system is linear and homogeneous with respect to c'_λ and c''_λ . Therefore, it has a nonzero solution if $|\Delta_2(\lambda)|^2 - |\Delta_1(\lambda)|^2 = 0$. Thus, equation (23) has a nonzero solution only when $|\Delta_2(\lambda)| = |\Delta_1(\lambda)|$. This equality is equivalent to the equation for λ :

$$\operatorname{Re}P_{\lambda,2}(2\pi) \cos\left(\frac{2\pi}{1+\beta}(\lambda+d)\right) - \operatorname{Im}P_{\lambda,2}(2\pi) \sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}(\lambda+d)\right) = 1 \quad (24)$$

Since, by virtue of (20) $|P_{\lambda,2}(2\pi)| \geq 1$, then for each integer $k \geq 0$ there exists a solution of the equation (24) $\lambda = \lambda_k$ belonging to the segment $[k, k+1]$. Let k be an integer, $k \leq \lambda_k \leq k+1$ and λ_k be a solution to equation (24). Then $|\Delta_1(\lambda_k)| = |\Delta_2(\lambda_k)|$ and the equation $\Delta_1(\lambda_k)\bar{c}_k + \Delta_2(\lambda_k)c_k = 0$ has a nonzero solution c_k , which is found by the formula

$$c_k = \begin{cases} \alpha_k, & \text{if } \Delta_1(\lambda_k) = 0, \\ \Delta_1(\lambda_k)\alpha_k - \overline{\Delta_2(\lambda_k)\alpha_k}, & \text{if } \Delta_1(\lambda_k) \neq 0 \end{cases} \quad (25)$$

Here α_k is an arbitrary complex number. Therefore, for each integer k the function

$$V_{\lambda_k}(r, \varphi) = r^{\frac{\lambda_k}{1-\beta}} (\overline{c_k} P_{\lambda_k,1}(\varphi) + c_k P_{\lambda_k,2}(\varphi)) \times \exp\left(\frac{i}{1+\beta}(\lambda_k \varphi + B(\varphi))\right) \quad (26)$$

will be a solution of the equation (1) from the class $C(G_0) \cap W_p^1(G)$, $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\lambda-\beta}$ and satisfies the condition (22). Thus, we have obtained the theorem.

Теорема 1 *If $\lambda_k + \beta \geq 1$, then for any integer $k \geq 0$ the equation (1) has solutions from the class $C^1(\overline{G})$. These solutions can be found by formulas (26) and (25), where λ_k is the solution of the equation (24) from the interval $[k, k+1]$.*

Теорема 2 *If $\lambda_0 + \beta < 1$, then the equation (1) always has solutions from the class $C(\overline{G}) \cap W_p^1(G)$, where $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\lambda_0-\beta}$. These solutions can be found by formulas (26) and (25), where λ_0 is the solution of the equation (24) from the interval $(0; 1)$.*

3 Conclusion

In conclusion, we note that in the article we construct varieties of continuous solutions of the Beltrami equation with a polar singularity in a circle centered at the origin, with a cut along the positive semiaxis. In the second part of the article, the arising arbitrary constants are chosen so that the constructed solutions are continuous in a circle without a cut.

References

- [1] Vekua I.N., *Generalized analytic functions* (M.: Science, 1988): 512.
- [2] Tungatarov A.B., "On a method for constructing continuous solutions of the Carleman-Vekua equation with a singular point", *Differential Equations* Vol. 28, No 8 (1992): 1427-1434.
- [3] Titchmarsh E. (Titchmarsh E.C.), *Theory of functions* (M.: Science, 1980): 464.
- [4] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elements of function theory and functional analysis* (M.: Science, 1976): 544.
- [5] Usmanov Z.D., "On infinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with an isolated flat point", *Mat. collection* Vol. 83(125):4(12) (1970): 596-615.
- [6] Usmanov Z.D., "On a class of generalized Cauchy-Riemann systems with a singular point", *Sib. math. journal* Vol. 14, No 5 (1973): 1076-1087.
- [7] Vekua I.N., "Systems of differential equations of an elliptic type and boundary problems with application to the theory of shells", *Matem.sb.* Vol. 31 (73), No 2 (1952): 234-314.
- [8] Vekua I.N., "Fixed points of generalized analytic functions", *DAN SSSR* Vol. 145, No 1 (1962): 24-26.
- [9] Vekua I.N., *Fundamentals of tensor analysis and covariant theory* (M.: Science, 1978): 296.
- [10] Bliev N.K., *Generalized analytic functions in fractional spaces* [In Russian] (Alma-Ata. Science, 1985): 159.
- [11] Bliev N.K., *Generalized analytic functions in the fractional space* (USA. Addison Wesley Longman Inc. Pitman Monographs, 1997): 160.

- [12] Otelbaev M.O. Ospanov K.N., "On a generalized Cauchy-Riemann system with nonsmooth coefficients", *Izv. vuzov. Matematika* No 3 (1989).
- [13] Tungatarov A.B., "Properties of an integral operator in classes of summable functions", *Izv. SSR. Ser. Phys.-Math.* 132 (5) (1985): 58-62.
- [14] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., and Peña-Peña D., "On the jump problem for β -analytic functions", *Complex Variables and elliptic equat.* 51 (2006): 763-775.
- [15] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., and Vilaire J.-M., "A jump problem for β -analytic functions in domains with fractal boundaries", *Revista Matem. Complutense* 23 (2010): 105-111.
- [16] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., and Vilaire J.-M., "The Riemann boundary value problem for β -analytic functions over D -summable closed curves", *International J. of Pure and Appl. Math.* 75 (4) (2012): 441-453.
- [17] Usmanov Z.D., "Infinitesimal bending of surfaces of positive curvature with a flat point", *Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw* Vol. 12 (1984): 241-272.
- [18] Tungatarov A.B., "On a Carleman-Vekua equation with a polar singularity", *Bulletin of KazGU. Ser. Mat.* No 3 (1995): 145-159.
- [19] Blev N.K., Tungatarov A.B., "On a generalized Cauchy-Riemann system with a singular point", *Differential equations and their applications. Alma-Ata. Science* (1975).
- [20] Kasymova D.E., "The study of solutions of elliptic systems in the plane with a singular point", *Abstract of thesis. ... candidate of physical and mathematical sciences. Almaty* (1999).
- [21] Markushevich A.I., *Selected chapters of the theory of analytic functions* (M.: Science, 1976).
- [22] Bitsadze A.V., *Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable* (M.: Science, 1984): 320.
- [23] Katz D.B., "Marcinkiewicz exponents and the jump problem for the Beltrami equation", *News of Universities. Maths.* No 6 (2017): 44-51. <http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/>.
- [24] Katz B.A., "The Riemann problem on a closed Jordan curve", *Izv. universities. Mat.* No 3 (1984): 68-80.
- [25] Drozhzhinov Yu.N., Zavalov B.I., "Introduction to the theory of generalized functions", *M.: RAS, Mat. inst. them. Steklova V.A.* (2006).

IRSTI 27.39.15

<https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.03>¹R. Oinarov, ²B.K. Omarbayeva, ³A.M. Temirkhanova¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, E-mail: o_ryskul@mail.ru²PhD student, E-mail: gaziza.omarbaeva@mail.ru³PhD, E-mail: ainura-t@yandex.kz

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

DISCRETE ITERATED HARDY-TYPE INEQUALITIES WITH THREE WEIGHTS

Discrete, continuous Hardy-type inequalities are of great importance and have numerous applications in harmonic analysis, in the theory of integral, differential and difference operators, in the theory of embeddings of function spaces and in other branches of mathematics. In recent years, weighted estimates for multidimensional Hardy-type operators have been intensively studied, which have an important application in the study of boundedness properties of operators from a Lebesgue weighted space to a local Morrey-type space, as well as in the study of bilinear operators in Lebesgue weighted spaces. The discrete case of Hardy type inequalities with three weights is an open problem. An inequality involving an iteration of the discrete Hardy operator is traditionally considered difficult to estimate because it contains three independent weight sequences and three parameters at their different ratios. In this paper we prove some new discrete iterated Hardy-type inequality involving three weights for the case $0 < p \leq \min\{q, \theta\}$.

Key words: inequalities, Hardy-type operator, weight, sequences, discrete Lebesgue spaces.

¹Р. Ойнаров, ²Б.Қ. Омарбаева, ³А.М. Темірханова¹Ф.-м.ғ.д., E-mail: o_ryskul@mail.ru²Докторант, E-mail: gaziza.omarbaeva@mail.ru³PhD, E-mail: ainura-t@yandex.kz

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

Үш салмақты дискретті итерацияланған Харди типті теңсіздіктер

Дискретті, үзіліссіз Харди типті теңсіздіктері гармоникалық анализде, интегралдық, дифференциалдық және айырымдық операторлар теориясында, функционалдық кеңістіктердегі енгізу теориясында және басқада математиканың бөлімдерінде көптеген қолданыстары бар. Соңғы жылдары көп өлшемді Харди типті операторлардың салмақты бағалаулары қарқынды түрде зерттелуде, яғни олар Лебег салмақты кеңістігінен Морри типті локальді кеңістігіне шенелімділік қасиеттерін зерттеуде, сонымен қатар Лебег салмақты кеңістігіндегі бисызықты операторларды зерттеуде қолданылады. Үш салмақты Харди типті теңсіздігінің дискретті жағдайы ашық мәселе болып табылады. Әдетте, дискретті Харди операторының итерациясымен болатын теңсіздіктерді бағалау қиын деп саналады, өйткені оның құрамында үш тәуелсіз салмақты тізбек және әр түрлі қатынастағы үш параметр бар. Бұл мақалада біз кейбір жаңа үш салмақты дискретті итерацияланған Харди типті теңсіздікті $0 < p \leq \min\{q, \theta\}$ жағдайы үшін дәлелдейміз.

Түйін сөздер: теңсіздік, Харди типті оператор, салмақ, тізбектер, дискретті Лебег кеңістігі.

¹Р. Ойнаров, ²Б.К. Омарбаева, ³А.М. Темирханова¹Д.ф.-м.н., E-mail: o_ryskul@mail.ru²Докторант, E-mail: gaziza.omarbaeva@mail.ru³PhD, E-mail: ainura-t@yandex.kz

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

Дискретные итерационные неравенства типа Харди с тремя весами

Дискретные, непрерывные неравенства типа Харди имеют большое значение и многочисленные приложения в гармоническом анализе, в теориях интегральных, дифференциальных и разностных операторов, в теории вложений функциональных пространств и в других разделах математики. В последние годы интенсивно исследуются весовые оценки для многомерных операторов типа Харди, которые имеют важное приложение в исследовании свойств ограниченности операторов из весового пространства Лебега в локальное пространство типа Морри, а также в исследовании билинейных операторов в весовых пространствах Лебега. Дискретный случай неравенств типа Харди с тремя весами является открытой проблемой. Неравенство, включающее итерацию дискретного оператора Харди, традиционно считается трудным для оценки, поскольку оно содержит три независимых весовых последовательностей и три параметра, при их различных соотношениях. В этой статье мы доказываем некоторое новое дискретное итерационное неравенство типа Харди с тремя весами для случая $0 < p \leq \min\{q, \theta\}$.

Ключевые слова: неравенство, оператор типа Харди, вес, последовательности, дискретное пространство Лебега.

1 Introduction

Let $0 < p, q, \theta < \infty$ and $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a non-negative sequence, $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ be positive sequences of real numbers, which will be referred to as weight sequences. We denote by $l_{p,u}$ the space of sequences $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ of real numbers such that

$$\|f\|_{p,u} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j f_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

In this paper we characterize the following discrete Hardy-type inequalities:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{\theta} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \varphi_k \sum_{i=k}^{\infty} f_i \right|^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j f_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,u}, \quad (1)$$

for the following cases:

- a) $1 < p \leq \min\{q, \theta\} < \infty$,
- b) $p \in (0, 1]$ and $p \leq \min\{q, \theta\} < \infty$,

where C is a positive constant independent of f .

Note that our result in case b) is especially interesting, since a continuous analogue of inequality (1) doesn't exist in this case.

2 Literature review

Since last century, one-dimensional discrete, continuous weighted Hardy inequalities have been investigated intensively in various functional spaces. The results of these works can be seen in the books of such authors, as for example B. Opic, A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson and N. Samko ([1]-[3]). In recent years, the general cases of the discrete, continuous weighted Hardy inequalities are investigated. For example the papers [4]-[15] have been devoted to the continuous analogue of discrete Hardy-type inequalities (1). An interest

in this type of inequalities are caused by their applicability to spaces of the Morrey type ([16], [17]). Moreover, the characterizations of these inequalities can be applied to research weighted inequalities for Hardy's bilinear inequalities ([18]-[20]). However, the discrete Hardy-type inequality (1) is study very little. For example, see the papers [21] and [22], where in particular, in [22] a criterion for the fulfilment of inequality (1) was obtained for the case $0 < q < \theta < p < \infty$, $p > 1$.

3 Material and research methods

The research methods are as follows: in this paper a method of partition of the sequence of elements of the Hardy operator on the part in each point is developed, which allows us to effectively estimate the sum on the parts. Note that such "blocking technic" was developed in [4]. During the estimate, various classical inequalities are used, such as Minkowski inequality, Holder inequality and the following elementary inequalities:

If $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, then

$$\left(\sum_{m=1}^k a_i \right)^\alpha \leq \sum_{m=1}^k a_i^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2)$$

and

$$\left(\sum_{m=1}^k a_i \right)^\alpha \geq \sum_{m=1}^k a_i^\alpha, \quad \alpha \geq 1. \quad (3)$$

In the proofs of our main results we will need the following well-known version of the discrete Minkowski inequality:

Lemma. Let $\{a_{i,j}\}$, $i = 1, 2, \dots, n \leq +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, be a positive matrix. Then the inequalities

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m a_{i,j} \right|^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (4)$$

and

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^i a_{i,j} \right|^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n |a_{i,j}|^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (5)$$

hold, where $\sigma \geq 1$.

Convention: The symbol $M \ll K$ means that $M \leq cK$, where $c > 0$ is a constant depending only on unessential parameters. If $M \ll K \ll M$, then we write $M \approx K$.

4 Results and discussion

4.1 Main result

Our main result reads as follows.

Theorem. (i) If $1 < p \leq \min\{q, \theta\} < \infty$, then the inequality (1) holds, if and only if $A_1 < \infty$, where

$$A_1 := \sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{k=n}^r \varphi_k^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Moreover, $C \approx A_1$, where C is the best constant in (1).

(ii) If $p \in (0, 1]$ and $p \leq \min\{q, \theta\} < \infty$, then the inequality (1) holds, if and only if $A_2 < \infty$, where

$$A_2 := \sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{r \leq k} u_k^{-1}.$$

Moreover, $C \approx A_2$, where C is the best constant in (1).

Proof. *Necessity:* Suppose that the inequality (1) holds with best constant $C > 0$.

(i) Let us show that $A_1 < \infty$. Let $1 \leq r < N < \infty$ and take a test sequence $\tilde{f} = \{\tilde{f}_s\}_{s=1}^{\infty}$ such that $\tilde{f}_s = 0$ for $1 \leq s < r$ and $s > N$ and $\tilde{f}_s = u_s^{-p'}$ for $r \leq s \leq N < \infty$.

Then

$$\|\tilde{f}\|_{l_{p,u}} = \left(\sum_{s=1}^{\infty} |\tilde{f}_s \cdot u_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=r}^N |u_s^{-p'} \cdot u_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=r}^N u_s^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6)$$

By substituting \tilde{f} in the left hand side of inequality (1), we can deduce that

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}) &:= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^\theta \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \varphi_k \sum_{i=k}^{\infty} \tilde{f}_i \right|^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \geq \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{k=n}^N \left| \varphi_k \sum_{i=k}^N \tilde{f}_i \right|^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \geq \\ &\geq \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{k=n}^r \left| \varphi_k \sum_{i=r}^N u_i^{-p'} \right|^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \geq \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{k=n}^r \varphi_k^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=r}^N u_i^{-p'} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

From (1), (6) and (7), it follows that

$$C \geq \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{k=n}^r \varphi_k^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=r}^N u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \text{for all } 1 \leq r < N.$$

Since $r \geq 1$ is arbitrary, passing to the limit as $N \rightarrow \infty$, we have that

$$A_1 = \sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{k=n}^r \varphi_k^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C. \quad (8)$$

(ii) Let us show that $A_2 < \infty$. Now for $1 < r \leq k < \infty$ we assume that $\tilde{g} = \{\tilde{g}_s\}_{s=1}^{\infty}$, where $\tilde{g}_s = 0$ for $s \neq k$ and $\tilde{g}_s = u_k^{-1}$ for $s = k$, where $u_k \neq 0$. Then

$$\|\tilde{g}\|_{l_{p,u}} = u_k^{-1} \cdot u_k = 1. \quad (9)$$

Substituting \tilde{g} in the left hand side of inequality (1), we find that

$$I(\tilde{g}) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{\infty} \left| \varphi_s \sum_{i=s}^{\infty} \tilde{g}_i \right|^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \geq \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} u_k^{-1}, \quad \forall k \geq r,$$

$$I(\tilde{g}) \geq \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{r \leq k} u_k^{-1}, \quad \forall r \geq 1.$$

Therefore

$$I(\tilde{g}) \geq \sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{r \leq k} u_k^{-1} = A_2. \quad (10)$$

From (1), (9) and (10), we have that

$$A_2 = \sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{r \leq k} u_k^{-1} \leq C. \quad (11)$$

Sufficiency: Now, we prove that the inequality (1) holds. Let $0 \leq f \in l_{p,u}$ be such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i < \infty. \quad (12)$$

Let

$$k_1 := \inf \left\{ k \in \mathbb{Z} : \sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq 2^k \right\},$$

then

$$2^{k_1-1} \leq \sum_{i=1}^{\infty} f_i < 2^{k_1}.$$

We consider the sequence $\{j_k\}$, where j_k are defined by

$$j_k := \min \left\{ j \geq 1 : \sum_{i=j}^{\infty} f_i \leq 2^{k_1-k+1} \right\}.$$

We note that

$$j_1 = \min \left\{ j \geq 1 : \sum_{i=j}^{\infty} f_i \leq 2^{k_1} \right\} = 1.$$

For all $k \geq 1$ it yields that

$$\sum_{i=j_k}^{\infty} f_i \leq 2^{k_1-k+1} < \sum_{i=j_k-1}^{\infty} f_i. \quad (13)$$

Therefore the set of natural numbers \mathbb{N} can be written

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k \geq 1} [j_k, j_{k+1} - 1].$$

Moreover,

$$2^{k_1-m+1} < \sum_{i=j_{m-1}}^{\infty} f_i = \sum_{i=j_{m-1}}^{j_m-1} f_i + \sum_{i=j_m}^{\infty} f_i < \sum_{i=j_{m-1}}^{j_m-1} f_i + 2^{k_1-(m+1)+1}, \quad m \geq 2.$$

Hence,

$$2^{k_1-m} < \sum_{i=j_m-1}^{j_{m+1}-1} f_i, \quad m \geq 2.$$

$$2^{k_1-m} = 2^{k_1-(m+1)+1} = 2 \cdot 2^{k_1-(m+1)} < 2 \sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i, \quad m \geq 2.$$

We have that

$$2^{k_1-1+1} = 2^{k_1} = 4 \cdot 2^{k_1-2} < 4 \sum_{i=j_2-1}^{j_3-1} f_i.$$

Then we obtain that

$$2^{k_1-m+1} < 4 \sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i, \quad m \geq 1. \quad (14)$$

Therefore, in view of (13),

$$\begin{aligned} I^\theta(f) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{\infty} \left| \varphi_s \sum_{i=s}^{\infty} f_i \right|^q \right)^{\frac{\theta}{q}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{\infty} \left| \varphi_s \sum_{i=s}^{\infty} f_i \right|^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{m=k}^{\infty} \sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \left(\sum_{i=j_m}^{\infty} f_i \right)^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{m=k}^{\infty} \sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \left(2^{k_1-m+1} \right)^q \right)^{\frac{\theta}{q}}. \end{aligned}$$

Hence, by applying (14) we have that

$$I^\theta(f) \leq 4^\theta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{m=k}^{\infty} \sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^q \right)^{\frac{\theta}{q}}. \quad (15)$$

We must now consider the cases $\theta \leq q$ and $\theta > q$ separately.

4.2 The case $\theta \leq q$

(i) Let $1 < p \leq \theta \leq q$. By applying (2) in (15), we find that

$$I^\theta(f) \leq 4^\theta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \sum_{m=k}^{\infty} \left(\sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta.$$

Now, by changing the orders of sums, we get that

$$\begin{aligned}
I^\theta(f) &\leq 4^\theta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \sum_{k=1}^m \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \leq \\
&\leq 4^\theta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \left(\sum_{n=j_1}^{j_2-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} + \sum_{k=2}^m \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=j_m}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right) \leq \\
&\leq 4^\theta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \left(\sum_{n=j_1}^{j_2-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} + \sum_{n=j_2}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=j_m}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right) \leq \\
&\leq 4^\theta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \left(\sum_{n=j_1}^{j_2-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} + \sum_{n=j_2}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right) \leq \\
&\leq 4^\theta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}},
\end{aligned}$$

so that

$$I^\theta(f) \ll \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}}. \quad (16)$$

Therefore, by using Holder's inequality and (3) in (16), we obtain that

$$\begin{aligned}
I^\theta(f) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} u_i^{-p'} \right)^{\frac{\theta}{p'}} \leq \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\sup_{m \geq 1} \left(\sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{\infty} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^\theta \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i u_i|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^\theta = (A_1 \|f\|_{p,u})^\theta.
\end{aligned}$$

Hence,

$$I(f) \ll A_1 \|f\|_{p,u}, \quad \text{if } 1 < p \leq \theta \leq q. \quad (17)$$

(ii) Let $0 < p \leq 1$. We start with the inequality (16):

$$I^\theta(f) \ll \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \cdot u_i \cdot u_i^{-1} \right)^{p \cdot \frac{\theta}{p}} \sum_{n=1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}}.$$

By applying (2) with $0 < p \leq 1$, we obtain that

$$\begin{aligned} I^\theta(f) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\max_{j_{m+1}-1 \leq i \leq j_{m+2}-1} u_i^{-1} \right)^{\theta j_{m+1}-1} \sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\sup_{j_{m+1}-1 \leq k} u_k^{-1} \right)^{\theta j_{m+1}-1} \sum_{n=1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}}. \end{aligned}$$

By using (3), we get

$$\begin{aligned} I^\theta(f) &\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \left[\sup_{m \geq 1} \left(\sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{j_{m+1}-1 \leq k} u_k^{-1} \right]^\theta \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \left[\sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{r \leq k} u_k^{-1} \right]^\theta = (A_2 \|f\|_{p,u})^\theta, \end{aligned}$$

so that

$$I(f) \ll A_2 \|f\|_{p,u}, \quad \text{if } p \leq \theta \leq q, \quad (18)$$

where $p \in (0, 1]$.

4.3 The case $\theta > q$

(i) Let $1 < p \leq q < \theta$. We start with the inequality (15). First we raise both sides in (15) to the power $\frac{q}{\theta} \leq 1$, i.e.,

$$I^q(f) \leq 4^q \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{m=k}^{\infty} \sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right]^{\frac{q}{\theta}}.$$

Next we apply (4) in the inner sum with $\sigma = \frac{\theta}{q}$ and obtain that

$$I^q(f) \leq 4^q \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=k}^{\infty} \left(\sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \right)^{\frac{q}{\theta}} \right\} \right]^{\frac{q}{\theta}},$$

Using (5), we get that

$$\begin{aligned} I^q(f) &\leq 4^q \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^\theta \right]^{\frac{q}{\theta}} \leq \\ &\leq 4^q \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^q \left[\sum_{k=1}^m \sum_{n=j_k}^{j_{k+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=\max(n, j_m)}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right]^{\frac{q}{\theta}} \leq \\ &\leq 4^q \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^q \left[\sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right]^{\frac{q}{\theta}}, \end{aligned}$$

so that

$$I^q(f) \ll \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \right)^q \left[\sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right]^{\frac{q}{\theta}}. \quad (19)$$

Hence, by using Holder's inequality,

$$I^q(f) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} u_i^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left[\sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right]^{\frac{q}{\theta}}.$$

Therefore, by applying (3) with $\alpha = \frac{q}{p}$, we obtain that

$$\begin{aligned} I^q(f) &\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left[\sup_{m \geq 1} \left(\sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{\infty} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^q \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i u_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^q = (A_1 \|f\|_{p,u})^q, \end{aligned}$$

so that

$$I(f) \ll A_1 \|f\|_{p,u}, \quad \text{when } 1 < p \leq q < \theta. \quad (20)$$

(ii) Let $0 < p \leq 1$. We start with the inequality (19):

$$I^q(f) \ll \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} f_i \cdot u_i \cdot u_i^{-1} \right)^{p \cdot \frac{q}{p}} \left(\sum_{n=1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{q}{\theta}}.$$

By applying (2) with $0 < p \leq 1$, we obtain that

$$I^q(f) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left[\sup_{j_{m+1}-1 \leq k} u_k^{-1} \left(\sum_{n=1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]^q.$$

By using (3), we get that

$$\begin{aligned} I^q(f) &\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=j_{m+1}-1}^{j_{m+2}-1} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left[\sup_{m \geq 1} \left(\sum_{n=j_1}^{j_{m+1}-1} \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^{j_{m+1}-1} \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{j_{m+1}-1 \leq k} u_k^{-1} \right]^q \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i \cdot u_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left[\sup_{r \geq 1} \left(\sum_{n=1}^r \omega_n^\theta \left(\sum_{s=n}^r \varphi_s^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{r \leq k} u_k^{-1} \right]^q = (A_2 \|f\|_{p,u})^q, \end{aligned}$$

so that

$$I(f) \ll A_2 \|f\|_{p,u}, \quad \text{if } p \leq q < \theta, \quad (21)$$

where $p \in (0, 1]$.

The estimates (17), (20) and (18), (21) were obtained under the condition (12). Let $M = \{f \in l_{p,u} : \exists N = N(f) > 0 \text{ and } f_i = 0, i \geq N\}$. Since f from M satisfy the condition (12) and the set M is everywhere dense in $l_{p,u}$, then the estimates (17), (20) and (18), (21) are satisfied for all $f \in l_{p,u}$. Therefore from the inequalities (8), (17) and (20), we get $C \approx A_1$ and from the inequalities (8) and (18), (21), we get $C \approx A_2$, where C is the best constant in (1). The proof of Theorem is complete.

5 Conclusion

In conclusion, we have established necessary and sufficient conditions on functions u and ω are ensuring boundedness of a discrete Hardy-type operator from a weighted sequence space $l_{p,u}$ to a weighted sequence space for a wide range of the numerical parameters p, u and θ .

6 Acknowledgement

We thank Professor Lars-Erik Persson for several suggestions, which have improved final version of this paper.

References

- [1] Opic B. and Kufner A., "Hardy-Type Inequalities", *Pitman Research Notes in Mathematics Series* Longman Scientific and Technical, Harlow (1990): 344
- [2] Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E., "The Prehistory of the Hardy Inequality", *Amer. Math. Monthly.* vol. 113(8)(2006): 715-732.

-
- [3] Kufner A., Persson L-E. and Samko N., "Weighted inequalities of Hardy type, Second Edition", World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd., New Jersey. (2017):459+XX.
- [4] Goldman M. L., "Hardy type inequalities on the cone of quasimonotone functions", *Khabarovsk Computer Center Part Eastern Branch Russian Academy of Science*, Research report no 98/31 (1998): 1-69.
- [5] Oinarov R., Kalybay A.A., "Three-parameter weighted Hardy type inequalities", *Banach Journal Math.* vol. 2, no 2 (2008): 85-93.
- [6] Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.-E., "Some new iterated Hardy-type inequalities", *J. Func. Spaces Appl.* vol. 2012 (2012): 30.
- [7] Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.-E., "Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$ ", *J. Inequal. Appl.* vol. 2013, no 515 (2013): 29.
- [8] Gogatishvili A., Mustafayev R., "Weighted iterated Hardy-type inequalities", *Math. Inequal. Appl.* vol. 20, no 3 (2017): 683-728.
- [9] Prohorov D.V., Stepanov V.D., "Vesovye ocenki klassa sublinejnyh operatorov [Weighted estimates for a class of sublinear operators]", *DAN* vol. 453, no 5 (2013): 486-488.
- [10] Prohorov D.V., Stepanov V.D., "O vesovyh neravenstvah Hardi v smeshannyh normah [On weighted Hardy inequalities in mixed norms]", *Tr. MIAN* 283(2013): 155-170.
- [11] Prohorov D.V., Stepanov V.D., "Ocenki odnogo klassa sublinejnyh integral'nyh operatorov [Estimates for a class of sublinear integral operators]", *DAN* vol. 456, no 6 (2014): 645-649.
- [12] Prohorov D.V., Stepanov V.D., "Vesovye neravenstva dlja kvazilinejnyh integral'nyh operatorov na poluosi i prilozhenija k prostranstvam Lorentza [Weighted inequalities for quasilinear integral operators on the semi-axis and applications to Lorentz spaces]", *Matem.sb.* vol. 207, no 8 (2016): 135-162.
- [13] Prohorov D. V., "Ob odnom klasse vesovyh neravenstv, sodержashih kvazilinejnye operatory [On a class of weighted inequalities containing quasilinear operators]", *Tr. MIAN* 289(2016): 280-295.
- [14] Krepela M., Pick L., "Weighted inequalities for iterated Copson Integral operators [electronic resource]", (2019). URL: <https://www.researchgate.net/publication/332962081> (date of the application: 21.10.2019).
- [15] Stepanov V.D., Shambilova G.E., "On weighted iterated Hardy-type operators", *Analysis Math.* vol. 44, no 2 (2018): 273-283.
- [16] Burenkov V.I. and Oinarov R., "Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space", *Math. Inequal. Appl.* vol. 16, no 1 (2013): 1-19.
- [17] Oinarov R. and Kalybay A., "On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space", *Int. J. Math. Anal.* vol. 8, no 11 (2014): 539-553.
- [18] Bernardis A.L. and Salvador P.O., "Some new iterated Hardy-type inequalities and applications", *J. Math. Ineq.* vol. 11, no 2 (2017): 577-594.
- [19] Canestro M.I.A., Salvador P.O., Torreblanca C.R., "Weighted bilinear Hardy inequalities", *J. Math. Anal. and Appl.* 387 (2012): 320-334.
- [20] Krepela M., "Iterating bilinear Hardy inequalities", *J. Math. Ineq.* vol. 60, no 4 (2017): 955-971.
- [21] Gogatishvili A., Krepela M., Rastislav O., Pick L., "Weighted inequalities for discrete iterated Hardy operators [electronic resource]", (2019). URL: <https://arxiv.org/abs/1903.04313> (Submitted on 11 March 2019).
- [22] Temirhanova A.M., Omarbaeva B.K., "Vesovaja ocenka odnogo klassa kvazilinejnyh diskretnyh operatorov: sluchaj $0 < q < \theta < p < \infty$, $p > 1$ [Weighted estimate of a class of quasilinear discrete operators: the case $0 < q < \theta < p < \infty$, $p > 1$]", *Vestnik KazNPU im. Abaja* vol. 67, no 3 (2019): 109-116.

¹A.N. Stanzhitskii , ²S.G. Karakenova , ³S.S. Zhumatov 

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, E-mail: ostanzh@gmail.com,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

²PhD student, E-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com,
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³Doctor of Physical and Mathematical Sciences, E-mail: sailau.math@gmail.com,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

ON A COMPARISON THEOREM FOR STOCHASTIC INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE

In this paper, we will discuss a comparison result for solutions to the Cauchy problems for two stochastic differential equations with delay. On this subject number of authors have obtained their comparison results. We deal with the Cauchy problems for two integro-differential equations. Except transient- (or drift-) and diffusion coefficients our equations include also one integro-differential term. Basic difference of our case from the case of all earlier investigated problems is presence of this term. We introduce a concept of solutions to our problems and prove the comparison theorem for them. According to our result under certain assumptions on coefficients of equations under consideration, their solutions depend on the transient-coefficients in a monotone way.

Key words: stochastic differential equation, comparison theorem, Hilbert space.

¹А.Н. Станжицкий, ²С.Г. Каракенова, ³С.С. Жуматов

¹ф.-м.ғ.д., Т. Шевченко атындағы Киев ұлттық университеті,
Киев қ., Украина, E-mail: ostanzh@gmail.com

²докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

³ф.-м.ғ.д., Математика және математикалық моделдеу институты
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: sailau.math@gmail.com

Бейтарап типтегі стохастикалық интегралдық-функционалдық теңдеулер үшін салыстыру теоремасы

Бұл мақалада кідіріс әсерлі екі стохастикалық дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі шешімдерін салыстыру есебі қарастырылған. Осы сияқты есептердің шешімдерін салыстыруға қатысты көптеген авторлар өз нәтижелерін алды. Мақалада бейтарап типті екі стохастикалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі қарастырылған. Қарастырылатын есептің тасымалдау және диффузия коэффициенттерінен басқа бір интегралдық-дифференциалдық бөліктен тұрады. Бұрын зерттелген жұмыстардан негізгі айырмашылығы интегралдық бөліктің бар болуы болып табылады. Алынған нәтижелерге сәйкес, олардың шешімі тасымалдау коэффициентіне монотонды тәуелді болады.

Түйін сөздер: стохастикалық дифференциалдық теңдеу, салыстыру теоремасы, гильберт кеңістігі.

¹А.Н. Станжицкий, ²С.Г. Каракенова, ³С.С. Жуматов

¹д.ф.-м.н., Киевский национальный университет имени Т. Шевченко,
г. Киев, Украина, E-mail: ostanzh@gmail.com

²докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

³д.ф.-м.н., Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: sailau.math@gmail.com

Об одной теореме сравнения для стохастических интегро-функциональных уравнений нейтрального типа

В данной статье рассматривается задача сравнения решений задач Коши для двух стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием. В этой области множество авторов получили свои результаты, касающиеся сравнения решений подобных задач. В данной работе рассматриваются задачи Коши для двух стохастических интегродифференциальных уравнений нейтрального типа. Помимо коэффициента сноса (переноса) и коэффициента диффузии, рассматриваемые уравнения содержат также один интегродифференциальный член. Наличие этого интегрального члена является основным отличием этой задачи от всех ранее исследуемых задач. Для наших задач вводятся понятия решений, для которых доказана теорема сравнения. Согласно полученному результату, при некоторых предположениях на коэффициенты рассматриваемых уравнений, их решения монотонно зависят от коэффициентов переноса

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, теорема сравнения, гильбертово пространство.

1 Introduction

In the given paper the following Cauchy problems for two neutral stochastic integro-differential equations

$$d\left(u_i(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} b_i(t, x, u_i(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi\right) = f_i(t, u_i(\alpha(t), x), x) dt + \sigma(t, x) d\beta(t), \quad 0 < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (1)$$

$$u_i(t, x) = \phi_i(t, x), \quad -r \leq t \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad r > 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (1^*)$$

are studied, where $T > 0$ is fixed, β is one-dimensional Brownian motion, $f_i: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, $\sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ and $b_i: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, are some given functions to be specified later, $\phi_i: [-r, 0] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, are initial-datum functions, $\alpha: [0, T] \rightarrow [-r, +\infty)$ is a delay function. For solutions u_1 and u_2 of these problems a comparison theorem is proved. According to the obtained result, if $f_1 \geq f_2$, then $u_1 \geq u_2$ with probability one. A comparison problem for solutions to stochastic differential equations in finite-dimensional case has firstly arised in [14]. A comparison theorem for equation of the form $d\xi(t) = f(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))d\beta(t)$ has been proved in this work by A. V. Skorokhod. According to this theorem, under certain assumptions, a solution of the equation above is monotonously non-decreasing function, depending on drift-coefficient f . A more general presentation of the comparison theorem is given in [11], [13]. Variations of these results have been proposed in [2] – [10]. The aim of the given work was to prove the comparison theorem for solutions of problem (1) – (1*).

2 Literature review

For the first time, the problem of the comparison of solutions of stochastic equations in the finite-dimensional case arose in [14]. It is proved in it that, under certain assumptions, the solution of the equation is a monotone non-decreasing function of the transfer coefficient. A more general form of the comparison theorem is given in [10] [13]. Variations of these results were proposed in [1], [2], [3], [5], [7]–[9], [11]–[25]. Comparison theorems for solutions of stochastic partial differential equations with a multidimensional Wiener process are presented

in [3]. In [6], a proof is presented of a comparison theorem for solutions of the Cauchy problem for stochastic differential equations with a multidimensional Wiener process in a Hilbert space. The aim of this paper was to prove a comparison theorem for solutions of problem (1) using ideas from [6] and [14]. This result plays an important role in studying the existence and uniqueness of a solution to this problem under non-Lipschitz conditions on drift coefficients.

The structure of the article is as follows: Section 2 contains the statement of the problem, 3 — preliminary facts and auxiliary results, 4 — proof of the main theorem.

3 Material and methods

3.1 Comparison theorem for stochastic differential equations in the finite-dimensional case

We consider the Cauchy problem of the form

$$d\left(u_i(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} b_i(t, x, u_i(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi\right) = f_i(t, u_i(\alpha(t), x), x) dt + \sigma(t, x) d\beta(t),$$

$$0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, i \in \{1, 2\},$$

$$u_i(t, x) = \phi_i(t, x), \quad -r \leq t \leq 0, i \in \{1, 2\},$$

where β one-dimensional Brownian motion. We regard the following conditions to be fulfilled:

1. $\alpha: [0, T] \rightarrow [-r, +\infty)$ belongs to $C^1([0, T])$ with $0 < \alpha' < 1$.
2. $f_i: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}, \sigma: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty], b: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ are measurable functions.
3. The initial-datum functions $\phi(t, x, \omega): [-r, 0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d), i \in \{1, 2\},$ are \mathcal{F}_0 -measurable random variables and such that

$$\mathbf{E} \sup_{-r \leq t \leq 0} \|\phi_i(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 < \infty, i \in \{1, 2\}, \quad \mathbf{E} \sup_{-r \leq t \leq 0} \phi^2(t, x) < \infty;$$

4. $b,$ satisfy the Lipschitz condition in the third argument of the form

$$\begin{aligned} |b(t, x, u, \xi) - b(t, x, v, \xi)| &\leq l(t, x, \xi) |u - v|, \\ 0 \leq t \leq T, \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^d, \{u, v\} \subset \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2)$$

where the conditions are valid for the function l

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(t, x, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi \right) \rho(x) dx < \frac{1}{4}, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(t, x, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi < \infty, x \in \mathbb{R}^d. \quad (3)$$

5. There exists a function $b_1: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, such that

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} b_1(x, \xi) d\xi \right)^2 \rho(x) dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^d} b_1(x, \xi) d\xi < \infty, x \in \mathbb{R}^d;$$

such that

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |b(t, x, 0, \xi)| \leq b_1(x, \xi), x \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (4)$$

6. The function $f_i, \sigma, i \in 1, 2$, satisfy the conditions of linear growth and Lipschitz in the second argument, that is, there are $L > 0$ such that

$$|f_i(t, u, x)| + |\sigma(t, u, x)| \leq L(1 + |u|), 0 \leq t \leq T, u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \quad (5)$$

$$|f_i(t, u, x) - f_i(t, \nu, x)| + |\sigma(t, u, x) - \sigma(t, \nu, x)| \leq L|u - \nu|, 0 \leq t \leq T, \{u, \nu\} \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, i \in 1, 2. \quad (6)$$

Let $u \equiv u_i, \phi \equiv \phi_i, b \equiv b_i, f \equiv f_i, i \in \{1, 2\}$.

Definition. A continuous random process $u_i(t, \cdot, \omega) : [-r, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ is called a **solution** to (1) – (1*) provided

1. It is \mathcal{F}_t -measurable for almost all $-r \leq t \leq T$.
2. It satisfies the following integral equation

$$\begin{aligned} u_i(t, \cdot) = & \phi(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b(0, \cdot, \phi(-r, \xi), \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} b(t, \cdot, u_i(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \\ & + \int_0^t f_i(s, u_i(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, u_i(\alpha(s), \cdot), \cdot) d\beta(s), 0 \leq t \leq T, i \in \{1, 2\}, \\ u_i(t, \cdot) = & \phi(t, \cdot), -r \leq t \leq 0, i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. It satisfies the condition

$$\mathbf{E} \int_0^T \|u_i(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt < \infty, \quad \mathbf{E} \int_0^T u_i^2(t, \cdot) dt < \infty, i \in \{1, 2\}.$$

The following theorems are true.

Theorem 1. Denote by $u = u_i, f = f_i, i \in 1, 2$. Assume that the conditions (1)–(6) are satisfied. Then (7) has a solution continuous with probability one, unique in the sense that if

$u(t, \cdot), \nu(t, \cdot), 0 < t < T$ are two continuous solutions to (7), then $\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |u(t, \cdot) - \nu(t, \cdot)| > 0\right\} = 0$.

Theorem 2. Suppose that conditions (1)–(6) are satisfied. Suppose further that $u_i(t, x), 0 < t < T, i \in \{1, 2\}$ are continuous (with probability one) solutions to problem (7). That, if $f_1(t, u, \cdot) \leq f_2(t, u, \cdot)$ for all $0 \leq t \leq T$ the condition $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$ are satisfied.

Proof of the theorem 1. In order to prove existence and uniqueness of solution to (7) we use the method of successive approximations. The idea of the proof is to construct a sequence of approximations, which converges to the solution u . From now on x is supposed to be fixed. Let

$$u^{(0)}(t, \cdot) = \phi(0, \cdot), 0 < t \leq T, \quad (8)$$

$$u^{(0)}(t, \cdot) = \phi(t, \cdot), -r \leq t \leq 0, \quad (8^*)$$

and for $n \in \{1, 2, \dots\}$ define $u^{(n)}$ as

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t, \cdot) &= \phi(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b(0, \cdot, \phi(-r, \xi), \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} b(t, \cdot, u^{(n-1)}(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \\ &+ \int_0^t f(s, u^{(n-1)}(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s), 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (9)$$

$$u^{(n)}(t, \cdot) = \phi(t, \cdot), -r \leq t \leq 0. \quad (9^*)$$

1.1 Firstly let us choose a small $0 \leq T_1 \leq T$ and prove that $\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$ has a bound, independent of n . We obtain

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq 8\mathbf{E} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} |b(0, \cdot, \phi(-r, \xi), \xi)| d\xi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &+ 2 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} |b(t, \cdot, u^{(n-1)}(\alpha(t), \xi), \xi)| d\xi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &+ 8 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \left\| \int_0^t |f(s, u^{(n-1)}(\alpha(s), \cdot), \cdot)| ds \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 8 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \left\| \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= 8\mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sum_{j=1}^4 S_j, 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (10)$$

From (2) and (4) we have

$$\begin{aligned} |b(t, \cdot, u, \xi)| &\leq |b(t, \cdot, u, \xi) - b(t, \cdot, 0, \xi)| + |b(t, \cdot, 0, \xi)| \leq l(t, \cdot, \xi)|u| + \chi(\cdot, \xi), \\ 0 \leq t \leq T, u \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Then we obtain

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 8\mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |b(0, x, \phi(-r, \xi), \xi)| d\xi \right)^2 dx \leq 16\mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} l(0, x, \xi) \phi(-r, \xi) d\xi \right)^2 dx \\
 &\quad + 16 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x, \xi) d\xi \right)^2 dx \leq 16 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(0, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(-r, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 &\quad + 16 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x, \xi) d\xi \right)^2 dx, \\
 S_2 &= 2 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |b(t, x, u^{(n-1)}(\alpha(t), \xi), \xi)| d\xi \right)^2 dx \leq 4 \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \\
 &\quad \times \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(\alpha(t), \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 4 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x, \xi) d\xi \right)^2 dx. \tag{11}
 \end{aligned}$$

According to properties of α , there exists a point $0 \leq t^* \leq T_1$, $\alpha(t^*) = 0$. Then

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(\alpha(t), \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \sup_{0 \leq t \leq t^*} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(\alpha(t), \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 + \sup_{t^* \leq t \leq \alpha(T_1)} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(\alpha(t), \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \sup_{-r \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2
 \end{aligned}$$

and we get from (11)

$$\begin{aligned}
 S_2 &\leq 4 \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \left(\sup_{-r \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) \\
 &\quad + 4 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x, \xi) d\xi \right)^2 dx.
 \end{aligned}$$

If t^* does not exist, then $\alpha(t) < 0$ for all t and further conclusions are obvious, because

$$\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(\alpha(t), \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sup_{-r \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

In order to estimate S_3 , we take (5) into account and obtain

$$S_3 = 8 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t |f(s, u^{(n-1)}(\alpha(s), x), x)| ds \right)^2 dx \leq 16T_1 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(\eta^2(s, x) \right)$$

$$\begin{aligned}
& +L^2(u^{(n-1)}(\alpha(s), x))^2 dx ds \leq 16T_1 \left(T_1 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2(t, x) dx + L^2 \int_{-r}^{\alpha(T_1)} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right) \\
& \leq 16T_1^2 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2(t, x) dx + 16L^2T_1 \left(r \sup_{-r \leq s \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right).
\end{aligned}$$

For S_4 we conclude

$$S_4 = 8 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \left(\sigma^2(s, x) ds \right) dx \leq 8 \int_0^{T_1} \|\sigma(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds.$$

Let denote

$$\begin{aligned}
S(T_1) &= 8\mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 16 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(0, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(-r, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&+ 20 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x, \xi) d\xi \right)^2 dx + 4 \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \sup_{-r \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&+ 16T_1^2 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2(t, x) dx + 16rL^2T_1 \sup_{-r \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 8 \int_0^{T_1} \|\sigma(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt < \infty.
\end{aligned}$$

Then from (10) we obtain

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq S(T_1) + 4 \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \\
&\times \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 16L^2T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt. \tag{12}
\end{aligned}$$

If $n = 1$, then from (12) we have

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(1)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq S(T_1) + 4 \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&+ 16L^2T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt.
\end{aligned}$$

For an arbitrary $n \in \{2, 3, \dots\}$ we obtain

$$\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq S(T_1) \left[1 + 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-1} \Big] + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} S(T_1) \left[1 + 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right. \\
& + \dots + \left. \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-2} \right] ds + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} (16L^2 T_1 (T_1 - s)) S(T_1) \\
& \quad \times \left[1 + \dots + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-3} \right] ds \\
& + \dots + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^{n-3}}{(n-3)!} S(T_1) \left[1 + 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right] ds \\
& + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-1} \left[\left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right. \\
& \quad \left. + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right] + 16L^2 T_1 \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-2} \\
& \times \int_0^{T_1} \left[\left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right] d\tau \\
& \quad (16L^2 T_1)^2 \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-3} \int_0^{T_1} (T_1 - \tau) \\
& \times \left[\left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right] d\tau \\
& \quad + \dots + (16L^2 T_1)^{n-3} \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^2 \int_0^{T_1} \frac{(T_1 - \tau)^{n-4}}{(n-4)!} \\
& \times \left[\left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right] d\tau \\
& \quad + (16L^2 T_1)^{n-2} \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \int_0^{T_1} \frac{(T_1 - \tau)^{n-3}}{(n-3)!} \\
& \times \left[\left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-2} 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} C(T_1) ds + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-3} \\
& \quad \times 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} (16L^2 T_1 (T_1 - s)) C(T_1) ds + \dots + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^2 16L^2 T_1 \\
& \quad \times \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^{n-4}}{(n-4)!} C(T_1) ds + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) 16L^2 T_1 \\
& \quad \times \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^{n-3}}{(n-3)!} C(T_1) ds + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^{n-2}}{(n-2)!} C(T_1) ds \\
& \quad + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-2} 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} (16L^2 T_1 (T_1 - s)) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \\
& \quad + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{n-3} 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^2}{2} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \\
& \quad + \dots + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right)^2 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^{n-3}}{(n-3)!} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \\
& \quad + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^{n-2}}{(n-2)!} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \\
& \quad + 16L^2 T_1 \int_0^{T_1} \frac{(16L^2 T_1 (T_1 - s))^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds, \tag{13}
\end{aligned}$$

where $C(T_1) = S(T_1) + \left(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$. It is easy to see that if T_1 is small enough and assumption (3) is true, then the the right-hand of (13) is not more

than

$$\begin{aligned}
 & \frac{S(T_1)}{1 - 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx} + \frac{16L^2 T_1 \cdot S(T_1) \cdot \int_0^{T_1} \exp\{16L^2 T_1 (T_1 - s)\} ds}{1 - 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx} \\
 & + \frac{C(T_1) \cdot \exp\{16L^2 T_1^2\}}{1 - 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx} + \frac{16L^2 T_1 \cdot \int_0^{T_1} \exp\{16L^2 T_1 (T_1 - s)\} ds}{1 - 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx} \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 & = \frac{(S(T_1) + C(T_1)) \cdot \exp\{16L^2 T_1^2\} + (\exp\{16L^2 T_1^2\} - 1) \mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2}{1 - 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx} > 0.
 \end{aligned}$$

Thus there exists $c(T_1) > 0$ such that for an arbitrary $n \in \{1, 2, \dots\}$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c(T_1). \quad (14)$$

1.2 Second let us prove that $(u^{(n)}(t, \cdot), n \in \{1, 2, \dots\})$, $0 < t \leq T_1$, is convergent. In order to do it we estimate $\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n+1)}(t, \cdot) - u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$, $n \in \{0, 1, \dots\}$.

If $n = 0$, then we obtain, taking into account estimate (14),

$$\begin{aligned}
 & \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(1)}(t, \cdot) - u^{(0)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(1)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 & + 2\mathbf{E} \|\phi(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 < \infty.
 \end{aligned}$$

If $n \in \{1, 2, \dots\}$, then we obtain, taking into account estimates from **1.1**,

$$\begin{aligned}
 & \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n+1)}(t, \cdot) - u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2 \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \\
 & \times \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot) - u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 2L^2 T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(s, \cdot) - u^{(n)}(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \\
 & \leq \left(2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx + 2L^2 T_1^2 \right) \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot) - u^{(n)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \dots \\
 & \leq \left(2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx + 2L^2 T_1^2 \right)^n \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(0)}(t, \cdot) - u^{(1)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2.
 \end{aligned}$$

Due to assumption (3) and choose of small T_1 , $\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx + L^2 T_1^2 < \frac{1}{2}$,

therefore $\left(2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx + 2L^2T_1^2\right)^n < 1$ and we conclude

$$\begin{aligned} & \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \sqrt{\mathbf{E} \|u^{(n)}(t, \cdot) - u^{(m)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2} \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \sqrt{\mathbf{E} \left\| \sum_{i=m-1}^{n-1} (u^{(i+1)}(t, \cdot) - u^{(i)}(t, \cdot)) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2} \\ &\leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=m-1}^{n-1} \sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(i+1)}(t, \cdot) - u^{(i)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2} \\ &\leq \sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(1)}(t, \cdot) - u^{(0)}(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2} \\ &\times \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=m-1}^{n-1} \sqrt{\left(2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx + 2L^2T_1^2\right)^i} = 0. \end{aligned}$$

Thus, $(u^{(n)}(t, \cdot), n \in \{1, 2, \dots\})$, $0 < t \leq T_1$, is a Cauchy sequence. Consequently, there is a limiting function $u(t, \cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $0 < t \leq T_1$, such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n)}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = 0. \quad (15)$$

From (14), it follows from Fatou's Lemma that

$$\sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c(T_1).$$

The function u is \mathcal{F}_t -measurable as a limit of \mathcal{F}_t -measurable functions.

1.3 Next we show that $u(t, \cdot)$, $0 < t \leq T_1$, solves the equation (7). To this end, we need to pass to the limit in the identity (9). Taking into account (15), we have

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} (b(t, \cdot, u^{(n-1)}(\alpha(t), \xi), \xi) - b(t, \cdot, u(\alpha(t), \xi), \xi)) d\xi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = 0, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \left\| \int_0^t (f(s, u^{(n-1)}(\alpha(s), \cdot), \cdot) - f(s, u(\alpha(s), \cdot), \cdot)) ds \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq L^2T_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-r}^{\alpha(T_1)} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(s, \cdot) - u(s, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \\ &\leq L^2T_1^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mathbf{E} \|u^{(n-1)}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Therefore, passing to the limit in (9), we have

$$u(t, \cdot) = \phi(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b(0, \cdot, \phi(-r, \xi), \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} b(t, \cdot, u(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \\ + \int_0^t f(s, u(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s), \quad 0 < t \leq T_1,$$

— the solution to (7) on $[0, T_1]$. This procedure can be repeated in order to extend the solution to the entire interval $[0, T]$ in finitely many steps, thereby completing the proof.

Proof of the theorem 2. Let prove the desired result under the hypothesis *M1*. From now on, suppose that x is fixed.

2.1 Let u_2 solve the problem

$$d\left(u_2(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_2(t, \cdot, u_2(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi\right) = f_2(t, u_2(\alpha(t), \cdot), \cdot) dt + \sigma(t, \cdot) d\beta(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u_2(t, \cdot) = \phi_2(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0,$$

i.e. satisfy the following identities

$$\left(u_2(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_2(t, \cdot, u_2(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi\right) - \left(u_2(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_2(0, \cdot, u_2(\alpha(0), \xi), \xi) d\xi\right) \\ = \int_0^t f_2(s, u_2(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s), \quad 0 < t \leq T, \quad (16)$$

$$u_2(t, \cdot) = \phi_2(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0. \quad (16^*)$$

Let u_3 solve the problem

$$d\left(u_3(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(t, \cdot, u_2(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi\right) = f_1(t, u_2(\alpha(t), \cdot), \cdot) dt + \sigma(t, \cdot) d\beta(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u_3(t, \cdot) = \phi_1(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0,$$

i.e. satisfy the following identities

$$\left(u_3(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(t, \cdot, u_2(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi\right) - \left(u_3(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(0, \cdot, u_2(\alpha(0), \xi), \xi) d\xi\right) \\ = \int_0^t f_1(s, u_2(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s), \quad 0 < t \leq T, \quad (17)$$

$$u_3(t, \cdot) = \phi_1(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0. \quad (17^*)$$

Subtracting (17) – (17*) from (16) – (16*), we obtain

$$\begin{aligned} & (u_2(t, \cdot) - u_3(t, \cdot)) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (b_2(t, \cdot, u_2(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi - b_1(t, \cdot, u_2(\alpha(t), \xi), \xi)) d\xi}_{\geq 0} \\ & + \underbrace{(u_3(0, \cdot) - u_2(0, \cdot))}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (b_1(0, \cdot, u_2(\alpha(0), \xi), \xi) d\xi - b_2(0, \cdot, u_2(\alpha(0), \xi), \xi)) d\xi}_{=0} \\ & = \underbrace{\int_0^t (f_2(s, u_2(\alpha(s), \cdot), \cdot) - f_1(s, u_2(\alpha(s), \cdot), \cdot)) ds}_{\leq 0}, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

$$u_2(t, \cdot) - u_3(t, \cdot) = \underbrace{\phi_2(t, \cdot) - \phi_1(t, \cdot)}_{\leq 0}, \quad -r \leq t \leq 0,$$

therefore $u_2 \leq u_3$ with probability one.

Now let consider u_4 – a solution to

$$\begin{aligned} d \left(u_4(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(t, \cdot, u_3(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \right) &= f_1(t, u_3(\alpha(t), \cdot), \cdot) dt + \sigma(t, \cdot) d\beta(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u_3(t, \cdot) &= \phi_1(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

i.e. is defined from

$$\begin{aligned} & \left(u_4(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(t, \cdot, u_3(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \right) - \left(u_4(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(0, \cdot, u_3(\alpha(0), \xi), \xi) d\xi \right) \\ &= \int_0^t f_1(s, u_3(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s), \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (18)$$

$$u_4(t, \cdot) = \phi_1(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0. \quad (18^*)$$

Subtracting (18) – (18*) from (17) – (17*), we conclude

$$\begin{aligned}
 & (u_3(t, \cdot) - u_4(t, \cdot)) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (b_1(t, \cdot, u_2(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi - b_1(t, \cdot, u_3(\alpha(t), \xi), \xi)) d\xi}_{\geq 0} \\
 & + \underbrace{(u_4(0, \cdot) - u_3(0, \cdot))}_{=0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (b_1(0, \cdot, u_3(\alpha(0), \xi), \xi) d\xi - b_1(0, \cdot, u_2(\alpha(0), \xi), \xi)) d\xi}_{=0} \\
 & = \underbrace{\int_0^t (f_1(s, u_2(\alpha(s), \cdot), \cdot) - f_1(s, u_3(\alpha(s), \cdot), \cdot)) ds}_{\leq 0}, \quad 0 < t \leq T,
 \end{aligned}$$

$$u_3(t, \cdot) - u_4(t, \cdot) = \phi_1(t, \cdot) - \phi_1(t, \cdot) = 0, \quad -r \leq t \leq 0,$$

therefore $u_3 \leq u_4$ with probability one. Continuing in a similar way, one obtain a sequence $(u_n, n \in \{2, 3, \dots\})$, fulfilling

$$u_2 \leq u_3 \leq u_4 \leq \dots \leq u_n \leq \dots,$$

where $u_n, n \in \{5, 6, \dots\}$, is defined as

$$\begin{aligned}
 & \left(u_n(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(t, \cdot, u_{n-1}(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \right) - \left(u_n(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(0, \cdot, u_{n-1}(\alpha(0), \xi), \xi) d\xi \right) \\
 & = \int_0^t f_1(s, u_{n-1}(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s), \quad 0 < t \leq T, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$u_n(t, \cdot) = \phi_1(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0. \quad (19^*)$$

2.2 Hereafter we argue in a similar way as in the proof of theorem 1. We establish that $(u_n, n \in \{2, 3, \dots\})$ is convergent. In order to do it, we prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|u_n(t, \cdot) - u_1(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = 0,$$

where u_1 is defined from

$$\begin{aligned}
 & \left(u_1(t, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(t, \cdot, u_1(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \right) - \left(u_1(0, \cdot) + \int_{\mathbb{R}^d} b_1(0, \cdot, u_1(\alpha(0), \xi), \xi) d\xi \right) \\
 & = \int_0^t f_1(s, u_1(\alpha(s), \cdot), \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) d\beta(s), \quad 0 < t \leq T, \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$u_1(t, \cdot) = \phi_1(t, \cdot), \quad -r \leq t \leq 0. \quad (20^*)$$

It follows from the proof of theorem 1 that there exists a constant $c(T) > 0$ such that $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|u_2(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c(T)$ and $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|u_n(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c(T)$ for $n \in \{3, 4, \dots\}$. The rest of the proof is similar to the case of theorem 1.

4 Results and discussion

As mentioned in the introduction, comparison theorems play an important role in the study of solutions with non-Lipschitz coefficients, in the study of the behavior of solutions at infinity, for optimal control of stochastic systems ([1],[2],[4],[5], [7]–[9], [11]–[25]). However, for equations with a delay of the neutral type, such studies have not been carried out before. This is due to the fact that lag is among the stochastic derivative, and therefore it is impossible to apply the classical Ito formula of differentiated functioning. Namely, on the application of Ito's formula, the proof of the classical comparison theorems is constructed.

5 Conclusion

Thus, the paper considers the existence, uniqueness and comparison theorems for stochastic functional-differential equations of neutral type with variable delay. When obtaining these results, the methods of stochastic and functional analysis were used, namely, the principle of compressed mappings, monotonicity methods, coupling method and others. Using these methods, we obtain local and global theorems on the existence and uniqueness of initial problems for stochastic functional differential equations with variable delay of a neutral type, as well as theorems for comparing two solutions. In the future, this method will allow us to obtain similar results for equations with unbounded operators, in particular for stochastic functional differential equations of the neutral type of partial differential equations.

References

- [1] Curtain R. F., and A. J. Pritchard. "Infinite dimension linear theory systems." *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag: Now York 8 (1978): 12.
- [2] Gal'Chuk L. I., and M. H. A. Davis. "A note on a comparison theorem for equations with different diffusions." *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 6, no. 2 (1982): 147-149.
- [3] Geib C. and Manthey R. "Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions." *Stochastic processes and their applications* 53, no. 1 (1994): 23-35.
- [4] Huang Zhi Yuan. "A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications." *Proceedings of the American Mathematical Society* 91, no. 4 (1984): 611-617.
- [5] Kotelenez P. "Comparison methods for a class of function valued stochastic partial differential equations." *Probability Theory and related fields* 93, no. 1 (1992): 1-19.
- [6] Manthey R. and Zausinger T. "Stochastic evolution equations in $L^{2\nu}\rho$." *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 66, no. 1-2 (1999): 37-85.
- [7] O'Brien, G. L. "A new comparison theorem for solutions of stochastic differential equations." *Stochastics* 3, no. 1-4 (1980): 245-249.
- [8] Ouknine Y. "Comparaison et non-confluence des solutions d'equations differentielles stochastiques unidimensionnelles." *Probab. Math. Statist* 11 (1990): 37-46.

-
- [9] Tanaka H. "Stochastic differential equations"Seminar on Probability (in Japanese) 19 (1964)
- [10] Yamada T. "On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications."Journal of Mathematics of Kyoto University 13, no. 3 (1973): 497-512.
- [11] Yamada T. and Yukio O. "On the strong comparison theorems for solutions of stochastic differential equations."Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits theorie und Verwandte Gebiete 56, no. 1 (1981): 3-19.
- [12] Da Prato Giuseppe and Jerzy Zabczyk. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Vol. 152. Cambridge University Press, 2014.
- [13] Watanabe, S. and Ikeda, N. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i diffuzionnye processy* [Stochastic differential equations and diffusional processes].(M.:1986): Nauka, 445.
- [14] Skorokhod, A. V. *Issledovaniya po teorii sluchainykh processov* [Research on the theory of random processes] .(Kiev: Kiev University, 1961):216
- [15] Stanzhitskii A.N. and Tsukanova A.O. *Sushestvovanie i edinstvennost' resheniya zadachi Koshi dlya stokhasticheskogo differentsialnogo uravneniya reakcii-diffuzii neutralnogo tipa* [Existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem for a stochastic differential reaction-diffusion equation of neutral type]. Nelineinoe kolebanie. 19, №3 (2016): 408-430.
- [16] Butkovsky O. "Subgeometric rates of convergence of Markov processes in the Wasserstein metric."The Annals of Applied Probability 24, no. 2 (2014): 526-552.
- [17] Butkovsky O. and Michael S.. "Invariant measures for stochastic functional differential equations."Electronic Journal of Probability 22 (2017).
- [18] Butkovsky O., Kulik A. and Scheutzow M.. "Generalized couplings and ergodic rates for SPDEs and other Markov models."arXiv preprint arXiv:1806.00395 (2018).
- [19] Doblin W.. "Elements d'une theorie generale des chaones simples constantes de Markoff."In Annales Scientifiques de l'ENS, vol. 57, pp. 61-111. 1940.
- [20] Es-Sarhir, A., van Gaans, O. and Scheutzow, M. "Invariant measures for stochastic functional differential equations with superlinear drift term."Differential and Integral Equations 23, no. 1/2 (2010): 189-200.
- [21] Es-Sarhir, A., Von Renesse, M.K. and Scheutzow, M.,. "Harnack inequality for functional SDEs with bounded memory."Electronic communications in probability 14 (2009): 560-565.
- [22] Es-Sarhir, A., Scheutzow, M., Tolle, J.M. and van Gaans, O. "Invariant measures for monotone SPDEs with multiplicative noise term."Applied Mathematics and Optimization 68, no. 2 (2013): 275-287.
- [23] Hairer M. and Mattingly J.C. "Yet another look at Harris' ergodic theorem for Markov chains."In Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI, pp. 109-117. Springer, Basel, 2011.
- [24] Hairer, M., Mattingly, J.C. and Scheutzow, M. "Asymptotic coupling and a general form of Harris' theorem with applications to stochastic delay equations."Probability theory and related fields 149, no. 1-2 (2011): 223-259.
- [25] Has'minskii R. Z. "Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems."Theory of Probability and Its Applications 12 (1967): 144-147.

¹ А.Ж. Адиева, ² А.О. Байарыстанов

¹ докторант, E-mail: a.aina70@mail.ru

² к.ф.-м.н., E-mail: oskar_62@mail.ru

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

ОБ ОДНОМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОМ ВЕСОВОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХАРДИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Классическое одномерное интегральное неравенство Харди, несмотря на одномерность, имеет многочисленные приложения во многих разделах математики. Начиная с 1930-х годов стали интенсивно исследоваться весовые варианты неравенства Харди, однако первые успехи, были получены в 1969-1970 годы. В настоящее время одномерное интегральное весовое неравенство Харди, почти при всех значениях параметров достаточно хорошо исследовано. Наряду с интегральным неравенством не менее важное место занимает дифференциальное весовое неравенство Харди. Дифференциальное весовое неравенство Харди изучается при различных граничных условиях на границе заданного интервала. Однако, задаваемые граничные условия зависят от поведения весовых функций на концах интервала. Кроме того, исследование зависит от того, является ли интервал конечным или бесконечным, поскольку интегральное поведение весовых функций зависит от случая. Существуют различные проблемы, особенно в переопределенном случае, т.е. когда число граничных условий выше, чем порядок дифференцирования. В данной статье задача исследуется на конечном отрезке и считается, что особенности весовых функций сосредоточены на одном конце интервала и граничные условия являются переопределенными.

Ключевые слова: весовое дифференциальное неравенство Харди, весовые функции, граничное значение функции, переопределенные граничные задачи, локально абсолютно непрерывная функция.

¹ А.Ж. Адиева, ² А.О. Байарыстанов

¹ докторант, E-mail: a.aina70@mail.ru

² ф.-м.г.к., E-mail: oskar_62@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

Екінші ретті көп шартты Харди типтес салмақты дифференциалдық теңсіздік туралы

Классикалық бір өлшемді Харди интегралдық теңсіздігі бір өлшемділігіне қарамастан, математиканың көптеген бөлімдерінде әртүрлі қолданыстары бар. 1930 жылдан бастап Харди теңсіздігінің салмақты нұсқалары қарқынды зерттеле бастады, бірақ алғашқы жетістіктері, яғни орындалу критерийлері 1969-1970 жылдары алынды. Қазіргі уақытта бір өлшемді Харди салмақты теңсіздігі параметрлердің барлық мәндерінде дерлік жеткілікті түрде жақсы зерттелген. Харди интегралдық теңсіздігімен қатар Харди дифференциалдық салмақты теңсіздігі де маңызды орын алады. Хардидің салмақты дифференциалдық теңсіздігі берілген интервалдың шекарасында әртүрлі шекаралық шарттарда зерттеледі. Алайда, берілген шекаралық шарттар салмақты функциялардың интервалдың шеткі нүктелеріндегі тәртіптеріне байланысты. Сонымен қатар, есеп интервалдың шеткі нүктелерінің ақырлы немесе ақырсыздығына байланысты, өйткені салмақты функциялардың интегралдық тәртіптері әртүрлі болады. Бұл жағдайда әртүрлі мәселелер туындайды, әсіресе көп шартты жағдайда, яғни берілген шекаралық шарттар саны дифференциалдау ретінен көп болған кезде. Бұл мақалада есеп ақырлы интервалда зерттеліп, салмақты функциялардың ерекшеліктері интервалдың бір жақ шекарасында шоғырланады және шекаралық шарттар көпшартты болып табылады.

Түйін сөздер: Харди салмақты дифференциалдық теңсіздігі, салмақты теңсіздіктер, функцияның шекаралық мәні, көп шартты шекаралық есептер, локалді абсолютті үзіліссіз функция.

¹A.Zh. Adiyeva, ²A.O. Baiarystanov

¹PhD student, E-mail: a.aina70@mail.ru

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, E-mail: oskar_62@mail.ru

L. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

On an overdetermined weighted differential inequality of Hardy-type of second order

It is well known that the classical one-dimensional Hardy integral inequality has various applications. Since the 1930s, weighted versions of Hardy’s inequality are intensively studied, but the first results of the criterion-type were obtained in 1969-1970. The one-dimensional weighted Hardy inequality is rather well studied for various parameter values. Hardy’s weighted differential inequality has the same level of importance as the integral one. Hardy’s weighted differential inequality is studied under various boundary conditions at the ends of a given interval. Meanwhile, the boundary conditions depend on the behaviour of the weight functions at the ends of the interval. Moreover, the study depends on whether the interval is finite or infinite, since the integral behaviour of weight functions depends on the case. There are various problems, especially in the overdetermined case, i.e. when the number of boundary conditions is higher than the order of differentiation. Our study relates to the case of a finite interval, when the singularities of the weight functions are concentrated at the same end of the interval and the boundary conditions are overdetermined.

Key words: weighted differential Hardy inequality, weighted functions, the boundary value of a function, overdetermined boundary value problems, a locally absolutely continuous function.

1 Введение

Пусть $I = (0, 1)$, u - непрерывная и неотрицательная функция, а положительные функции v и r , соответственно непрерывная и непрерывно дифференцируемая на интервале I , $v^{1-p'} \in L_1(I)$ и для любого $a : 1 > a > 0$ функция $r^{-1} = \frac{1}{r}$ интегрируема на интервале $(a, 1)$, где $1 < p' < \infty$.

Положим $D_r^2 f(t) = \frac{d}{dt} r(t) \frac{df(t)}{dt}$ и $D_r^1 f(t) = r(t) \frac{df(t)}{dt}$.

Пусть $1 \geq T > 0$, $1 < p < \infty$, $I_T = (0, T)$ и $L_{p,v}^2(r) \equiv L_{p,v}^2(r; I_T)$ множество функции $f : I_T \rightarrow R$ локально абсолютно непрерывных на I_T вместе с функцией $D_r^1 f$ и для которых $\|D_r^2 f\|_{p,v} < \infty$, где $\|g\|_{p,v} = \left(\int_T^\infty v(t) |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ - норма весового пространства $L_{p,v}(I) \equiv L_{p,v}$. В силу наложенных условий на функций $v^{1-p'}, r^{-1}$ для любого $f \in L_{p,v}^2(r)$ существуют конечные следы $\lim_{t \rightarrow 0} D_r^1 f(t) \equiv D_r^1 f(T)$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \equiv f(T)$.

Положим

$$L'RL_{p,v}^2(r) = \{ f \in L_{p,v}^2(r) : f(T) = 0, D_r^1 f(T) = D_r^1 f(0) = 0 \}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\int_0^T u(t) |f(t)|^p dt \leq C_T \int_0^T v(t) |D_r^2 f(t)|^p dt, \quad f \in L'RL_{p,v}^2(r). \tag{1}$$

Неравенство при $r \equiv 1$ имеет вид

$$\int_0^T u(t) |f(t)|^p dt \leq C_T \int_0^T v(t) |f''(t)|^p dt, \quad f \in L'RL_{p,v}^2(1). \tag{2}$$

Неравенство вида (2) рассматривалось во многих работах (см. нижеприведенный литературный обзор). Неравенство (1) отличается от неравенства (2) наличием функции $r^{-1} = \frac{1}{r}$. Если функция r^{-1} не интегрируема в окрестности нуля, то из результата по неравенству (1) не следует как следствие результат по неравенству (2). В работе [1] неравенство (1) рассматривалось в бесконечном промежутке с применением результатов к вопросу осцилляции дифференциального уравнения четвертого порядка, когда функция r^{-1} может иметь неинтегрируемые особенности. В данной статье рассматривается случай, когда функция r^{-1} может иметь особенности в окрестности нуля. Основной целью работы является получение необходимого и достаточного условия выполнения неравенства (1).

2 Обзор литературы

Исследование весовых дифференциальных неравенств Харди высокого порядка вида (2) при различных граничных условиях начались в начале 80-х годов прошлого века. Граничные условия называются переопределенными, если количество независимых граничных условий больше порядка дифференцирования в неравенстве. Сначала рассматривалось весовое дифференциальное неравенство первого порядка. В этом случае, задача с определенными граничными условиями была эквивалентна известному весовому неравенству Харди, а переопределенный случай оказался открытой проблемой. Эту задачу впервые решил чешский математик P.Gurka и полученный им результат, и другие его обобщения опубликованы в книге [2]. И в связи с важностью этой задачи в теории дифференциальных операторов, в работах [3], [4] получены различные эквивалентные критерии выполнения весового дифференциального неравенства Харди в переопределенном случае. В работах [5], [6], [7], [8],[9], [10], [11] получены критерии выполнения неравенства вида (2) высокого порядка на конечном отрезке с определенными граничными значениями. Более общая ситуация рассмотрена в работах [12], [13]. Неравенство вида (1) для второго и более высокого порядков на конечном отрезке в переопределенном случае исследованы в серии работ [14],[15],[16], [17]. Хотя в этих работах получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства, однако там не даны оценки для наилучшей константы неравенства вида (2). Глава 4 книги [18], [19] посвящена исследованию неравенства вида (2) для производных высокого порядка в определенном и в переопределенном случае и в конце дан краткий анализ полученных результатов. Переопределенный случай на отрезке $I = (0, \infty)$ исследован в работах [20], [21]. В работе [20] неравенство (2) исследовано при различных соотношениях граничных значений функции $f: f(0), f'(0), f(\infty), f'(\infty)$, а в работе [21] исследовались неравенства высокого порядка при некоторых переопределенных граничных значениях. В работах [20],[21] найдены критерии выполнения неравенства (2), но при оценке наилучшей постоянной в (2) не указаны значения констант эквивалентности. Мы, используя методы работы [20], вычисляем все константы эквивалентности. История вопроса по неравенствам Харди и полученные результаты можно найти в книгах [2], [18], [19], [22]. Как видно из $L'RL_{p,v}^2(r)$ мы будем исследовать неравенство (1) только при следующих граничных значениях $f(T) = D_r^1 f(T) = 0, D_r^1 f(0) = 0$ функции $f \in L_{p,v}^2(r)$. В работе [1] неравенство (1) рассматривалось на бесконечном промежутке.

3 Материал и методы

Методы исследования следующие: используя заданные граничные значения, функцию f из $L'RL_{p,v}^2(r)$ представляем в виде некоторых интегральных соотношений, а затем используя известные результаты по весовым неравенствам Харди и по весовой оценке интегральных операторов получаем необходимые оценки. Приведем известные утверждения, необходимые нам при доказательстве выполнения неравенства (1).

Пусть $0 \leq a < b \leq \infty$. Из результатов работы [23], [стр.42-45] следует

Теорема А. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда

(i) неравенство

$$\left(\int_a^b u(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_a^b v(t) f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \geq 0 \quad (3)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A^+ = \sup_{a < r < b} \left(\int_r^b u(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^r v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

при этом $A^+ \leq C \leq p^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}} A^+$, где C -наилучшая постоянная в (3).

(ii) неравенство

$$\left(\int_a^b u(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_a^b v(t) f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \geq 0 \quad (4)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A^- = \sup_{a < r < b} \left(\int_a^r u(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^b v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

при этом $A^- \leq C \leq p^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}} A^-$, где C -наилучшая постоянная в (4).

Пусть

$$A_1 = \sup_{a < y < b} \left(\int_a^y u(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_y^b v^{1-p'}(t) \left(\int_y^t r^{-1}(x) dx \right)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_2 = \sup_{a < y < b} \left(\int_a^y u(z) \left(\int_z^y r^{-1}(x) dx \right)^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_y^b v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Следующее утверждение следует из результатов работы [24] .

Теорема В. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда неравенство

$$\left(\int_a^b u(z) \left(\int_z^b f(t) \int_z^t r^{-1}(x) dx dt \right)^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_a^b v(t) f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \geq 0 \quad (5)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\max\{A_1, A_2\} < \infty$, при этом

$$\max\{A_1, A_2\} \leq C \leq 8p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}} \max\{A_1, A_2\}, \quad (6)$$

где C - наилучшая постоянная в (5).

4 Основные результаты

По условию $v^{1-p'} \in L_1(I)$. Поэтому существует единственная точка $\sigma_T \in (0, T)$ такая, что и

$$\int_{\sigma_T}^T v^{1-p'}(t) dt = \int_0^{\sigma_T} v^{1-p'}(t) dt.$$

Пусть функция $\rho_T(\cdot)$ такова, что

$$\int_s^T v^{1-p'}(t) dt = \int_0^{\rho_T(s)} v^{1-p'}(t) dt, \quad 0 < s < T. \quad (7)$$

Очевидно, что функция ρ_T локально абсолютно непрерывная, невозрастающая и $\lim_{t \rightarrow T^-} \rho_T(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \rho_T(t) = T$. Очевидно, что $\sigma_T = \rho_T(\sigma_T)$.

Дифференцируя обе части (7) имеем

$$-v^{1-p'}(s) = v^{1-p'}(\rho(s))\rho'_T(s), \quad v^{1-p'}(s) = v^{1-p'}(\rho(s))|\rho'_T(s)| \quad (8)$$

почти для всех $s \in (0, T)$.

Введем обозначения

$$A_{1,1}(p, T, \sigma) = \sup_{T > y > \sigma_T} \int_{\sigma_T}^y u(z) dz \left(\int_y^T v^{1-p'}(t) \left(\int_y^t r^{-1}(x) dx \right)^{p'} dt \right)^{p-1},$$

$$A_{1,2}(p, T, \sigma) = \sup_{T > y > \sigma_T} \int_{\sigma_T}^y u(z) \left(\int_z^y r^{-1}(x) dx \right)^p dz \left(\int_y^T v^{1-p'}(t) dt \right)^{p-1},$$

$$A_{2,1}(p, T, \sigma) = \left(\int_{\sigma_T}^T v^{1-p'}(t) \left(\int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx \right)^{p'} dt \right)^{p-1} \int_0^{\sigma_T} u(z) dz,$$

$$A_{2,2}(p, T, \sigma) = \sup_{0 < y < \sigma_T} \int_0^y u(z) dz \left(\int_y^{\sigma_T} v^{1-p'}(t) \left(\int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right)^{p'} dt \right)^{p-1},$$

$$A_{2,3}(p, T, \sigma) = \sup_{0 < y < \sigma_T} \int_y^{\sigma_T} u(z) \left(\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right)^p dz \left(\int_0^z v^{1-p'}(t) dt \right)^{p-1},$$

$$A(p, T, \sigma) = \max \{ A_{1,1}(p, T, \sigma), A_{1,2}(p, T, \sigma), A_{2,1}(p, T, \sigma), A_{2,2}(p, T, \sigma), A_{2,3}(p, T, \sigma) \}.$$

Теорема 1. Пусть $1 \geq T > 0, 1 < p < \infty$. Тогда неравенство (1) выполнено тогда и только тогда, когда $A(p, T, \sigma) < \infty$ и при этом имеет место оценка

$$\frac{1}{2} A(p, T, \sigma) \leq C_T \leq 2 \cdot 8^p p (p')^{p-1} \cdot A(p, T, \sigma), \quad (9)$$

где C_T - наилучшая постоянная в (1).

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть $A(p, T, \sigma) < \infty$. Покажем выполнение неравенства (1). Так как $f(T) = D_r^1 f(T) = D_r^1 f(0) = 0$ для $f \in L'RL_{p,v}^2(r, T)$, то интегрируя $D_r^2 f(t) = g(t), t \leq T$, имеем $D_r^1 f(x) = - \int_x^T g(t) dt$ или $D_r^1 f(x) = \int_0^x g(t) dt$ для всех $0 < x \leq T$ и $\int_0^T g(t) dt = 0$. Далее представление $D_r^1 f(x) = - \int_x^T g(t) dt$ используем при $T > x \geq \sigma_T$ и $D_r^1 f(x) = \int_0^x g(t) dt$ при $0 < x < \sigma_T$. Тогда

$$f(z) = \int_z^T r^{-1}(x) \int_x^T g(t) dt dx = \int_z^T g(t) \int_z^t r^{-1}(x) dx dt, \quad (10)$$

при $T > z \geq \sigma_T$ и

$$f(z) = \int_{\sigma_T}^T g(t) \int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx dt - \int_z^{\sigma_T} g(t) \int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx dt - \int_0^z g(t) dt \int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx, \quad (11)$$

при $z < \sigma_T$.

Используя (10), (11), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T u(z) |f(z)|^p dz &= \int_{\sigma_T}^T u(z) \left| \int_z^T g(t) \int_z^t r^{-1}(x) dx dt \right|^p dz + \int_0^{\sigma_T} u(z) \left| \int_{\sigma_T}^T g(t) \int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_z^{\sigma_T} g(t) \int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx dt - \int_0^z g(t) dt \int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right|^p dz = F_1 + F_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя теорему В, как в теореме 3.1, получаем

$$F_1 = \int_{\sigma_T}^T u(z) \left| \int_z^T g(t) \int_z^t r^{-1}(x) dx dt \right|^p dz \leq 8^p p(p')^{p-1} \times \\ \times \max \{ A_{1,1}(p, T, \sigma), A_{1,2}(p, T, \sigma) \} \int_{\sigma_T}^T v(t) |g(t)|^p dt. \quad (13)$$

Теперь, оценим F_2 :

$$F_2 \leq 3^{p-1} \left[\int_0^{\sigma_T} u(z) \left| \int_{\sigma_T}^T g(t) \int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx dt \right|^p dz + \int_0^{\sigma_T} u(z) \left| \int_z^{\sigma_T} g(t) \int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx dt \right|^p dz + \right. \\ \left. + \int_0^{\sigma_T} u(z) \left(\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right)^p \left| \int_0^z g(t) dt \right|^p dz \right] = 3^{p-1} (F_{2,1} + F_{2,2} + F_{2,3}). \quad (14)$$

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$F_{2,1} = \int_0^{\sigma_T} u(z) dz \left| \int_{\sigma_T}^T g(t) \int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx dt \right|^p \leq \\ \leq \int_0^{\sigma_T} u(z) dz \left[\int_{\sigma_T}^T v^{1-p'}(t) \left(\int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx \right)^{p'} dt \right]^{p-1} \int_{\sigma_T}^T v(t) |g(t)|^p dt = \\ = A_{2,1}(p, T, \sigma) \int_{\sigma_T}^T v(t) |g(t)|^p dt. \quad (15)$$

Для оценки $F_{2,2}$, $F_{2,3}$ применяем теорему А.

$$F_{2,2} = \int_0^{\sigma_T} u(z) \left| \int_z^{\sigma_T} g(t) \int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx dt \right|^p dz \leq p(p')^{p-1} A_{2,2}(p, T, \sigma) \int_0^{\sigma_T} v(t) |g(t)|^p dt, \quad (16)$$

$$F_{2,3} = \int_0^{\sigma_T} u(z) \left(\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right)^p \left| \int_0^z g(t) dt \right|^p dz \leq p(p')^{p-1} A_{2,3}(p, T, \sigma) \int_0^{\sigma_T} v(t) |g(t)|^p dt. \quad (17)$$

Подставляя (15), (16) и (17) в (14) имеем

$$F_2 \leq 3^{p-1} \left[A_{2,1}(p, T, \sigma) \int_{\sigma_T}^T v(t) |g(t)|^p dt + \right. \\ \left. + p(p')^{p-1} (A_{2,2}(p, T, \sigma) + A_{2,3}(p, T, \sigma)) \int_0^{\sigma_T} v(t) |g(t)|^p dt \right]. \quad (18)$$

Эту оценку и оценку (13), подставляя в (12), получим

$$\int_0^T u(z)|f(z)|^p dz \leq 2 \cdot 8^p p(p')^{p-1} \cdot A(p, T, \sigma) \int_0^T v(t)|D_r^2 f(t)|^p dt, \quad f \in W_{p,v}^2(r, T). \quad (19)$$

Так как $L'RL_{p,v}^2(r, T) \subset W_{p,v}^2(r, T)$, то из (19) следует, что неравенство (1) выполнено с оценкой

$$C_T \leq 2 \cdot 8^p p(p')^{p-1} \cdot A(p, T, \sigma) \quad (20)$$

для наилучшей постоянной C_T в (1).

Необходимость. Пусть неравенство (1) выполнено с наилучшей постоянной $C_T > 0$. Пусть

$$K_{1,p}^+(\sigma_T, T) = \{f \in L_1(\sigma_T, T) \cap L_{p,v}(\sigma_T, T) : f \geq 0, f \neq 0\},$$

$$K_{1,p}^-(0, \sigma_T) = \{f \in L_1(0, \sigma_T) \cap L_{p,v}(0, \sigma_T) : f \leq 0, f \neq 0\}.$$

Покажем, что каждому $f_1 \in K_{1,p}^+(\sigma_T, T)$ найдется $f_2 \in K_{1,p}^-(0, \sigma_T)$, обратно для $f_2 \in K_{1,p}^-(0, \sigma_T)$ найдется $f_1 \in K_{1,p}^+(\sigma_T, T)$ такие, что для $f(t) = f_1(t), t \in (\sigma_T, T)$ и $f(t) = f_2(t), t \in (0, \sigma_T)$ выполняется соотношение $\int_0^T f(t)dt = 0$ и

$$\int_0^T v(t)|f(t)|^p dt = 2 \int_{\sigma_T}^T v(t)|f_1(t)|^p dt = 2 \int_0^{\sigma_T} v(t)|f_2(t)|^p dt. \quad (21)$$

Для $f_1 \in K_{1,p}^+(\sigma_T, T)$ положим $f_2(x) = -f_1(\rho^{-1}(x)) \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))}, \quad x \in (0, \sigma_T)$. Тогда $f_2 \leq 0$ и произведя замену $\rho^{-1}(x) = t$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma_T} f_2(x)dx &= - \int_0^{\sigma_T} f_1(\rho^{-1}(x)) \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))} dx = \int_{\sigma_T}^T f_1(t) \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} \rho'(t) dt = \\ &= - \int_{\sigma_T}^T f_1(t) \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} |\rho'(t)| dt = - \int_{\sigma_T}^T f_1(t) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь в последнем равенстве использовали (8). Из (22) следует $\int_0^{\sigma_T} |f_2(x)|dx < \infty$ и $\int_{\sigma_T}^T f_1(t)dt + \int_0^{\sigma_T} f_2(t)dt = \int_0^T f(t)dt = 0$. Опять, с помощью замены $\rho^{-1}(x) = t$ и используя соотношения (8), имеем

$$\int_0^{\sigma_T} |f_2(t)|^p v(t) dt = \int_0^{\sigma_T} \left| f_1(\rho^{-1}(x)) \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))} \right|^p v(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\sigma_T}^T |f_1(t)|^p \frac{v^{-p'}(\rho(t))}{v^{-p'}(t)} v(\rho(t)) \rho'(t) dt = \int_{\sigma_T}^T |f_1(t)|^p v(t) \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} |\rho'(t)| dt \\
&= \int_{\sigma_T}^T |f_1(t)|^p v(t) dt.
\end{aligned}$$

Откуда следует (21). Обратнo, для $f_2 \in K_{1,p}^-(0, \sigma_T)$ положим

$$f_1(x) = -f_2(\rho^{-1}(x)) \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_T}^T f_1(x) dx &= \int_{\sigma_T}^T |f_2(\rho^{-1}(x))| \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))} dx = - \int_0^{\sigma_T} |f_2(t)| \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} \rho'(t) dt = \\
&= \int_0^{\sigma_T} |f_2(t)| \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} |\rho'(t)| dt = \int_0^{\sigma_T} |f_2(t)| dt < \infty.
\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \int_{\sigma_T}^T f_1(t) dt - \int_0^{\sigma_T} |f_2(t)| dt = \int_{\sigma_T}^T f_1(t) dt + \int_0^{\sigma_T} f_2(t) dt = \int_0^T f(t) dt = 0.$$

Аналогичным образом выполняется и (21).

Совокупность функций $f(t) = f_1(t)$ при $t \in (\sigma_T, T)$ и $f(t) = f_2(t)$ при $t \in (0, \sigma_T)$, где $f_1 \in K_{1,p}^+(\sigma_T, T)$, $f_2 \in K_{1,p}^-(0, \sigma_T)$ и для которых выполняется $\int_0^T f(t) dt = \int_{\sigma_T}^T f_1(t) dt + \int_0^{\sigma_T} f_2(t) dt = 0$ и соотношение (21), обозначим через $K_{1,p}(0, T)$.

По условию неравенство (1) выполняется. Так как условие $f \in LR'W_{p,v}^2(r, T)$ эквивалентно условию $D_r^2 f = g \in \tilde{L}_{p,v}(0, T) = \left\{ g \in L_{p,v}(0, T), \int_0^T g(t) dt = 0 \right\}$.

То из (1) и (12) следует, что неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma_T}^T u(z) \left| \int_z^T g(t) \int_z^t r^{-1}(x) dx dt \right|^p dz + \int_0^{\sigma_T} u(z) \left| \int_{\sigma_T}^T g(t) \int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx dt - \int_z^{\sigma_T} g(t) \int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx dt - \right. \\
&\left. - \int_0^z g(t) dt \int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right|^p dz \leq C_T \int_0^T v(t) |g(t)|^p dt, \quad g \in \tilde{L}_{p,v}(0, T) \quad (23)
\end{aligned}$$

Причем, наилучшие постоянные в (1) и в (23) совпадают.

Очевидно, что $K_{1,p}(0, T) \subset \tilde{L}_{p,v}(0, T)$. Поэтому неравенство (23) выполнено для всех $g \in K_{1,p}(0, T)$. Так как для $g \in K_{1,p}(0, T)$ $g(t) = g_1(t)$ при $t \in (\sigma_T, T)$ и $g(t) = g_2(t)$ при

$t \in (0, \sigma_T)$, где $g_1 \in K_{1,p}^+(\sigma_T, T)$, $g_2 \in K_{1,p}^-(0, \sigma_T)$, то, подставляя $g \in K_{1,p}(0, T)$ в (23), получим

$$\int_{\sigma_T}^T u(z) \left(\int_z^T g_1(t) \int_z^t r^{-1}(x) dx dt \right)^p + \int_0^{\sigma_T} u(z) \left(\int_{\sigma_T}^T g_1(t) \int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx dt + \int_z^{\sigma_T} |g_2(t)| \int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx dt + \right. \quad (24)$$

$$\left. + \int_0^z |g_2(t)| dt \int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right)^p dz \leq C_T \int_0^T v(t) |g(t)|^p dt, \quad g \in K_{1,p}(0, T). \quad (25)$$

Так как все слагаемые в левой части (25) неотрицательные, то с учетом (21), выполнены неравенства

$$\int_{\sigma_T}^T u(z) \left(\int_z^T g_1(t) \int_z^t r^{-1}(x) dx dt \right)^p dz \leq 2C_T \int_{\sigma_T}^T v(t) |g_1(t)|^p dt, \quad g_1 \in K_{1,p}^+(\sigma_T, T),$$

$$\int_0^{\sigma_T} u(z) dz \left(\int_{\sigma_T}^T g_1(t) \int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x) dx dt \right)^p \leq 2C_T \int_{\sigma_T}^T v(t) |g_1(t)|^p dt, \quad g_1 \in K_{1,p}^+(\sigma_T, T),$$

$$\int_0^{\sigma_T} u(z) \left(\int_z^{\sigma_T} |g_2(t)| \int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx dt \right)^p dz \leq 2C_T \int_0^{\sigma_T} v(t) |g_2(t)|^p dt, \quad g_2 \in K_{1,p}^-(0, \sigma_T),$$

$$\int_0^{\sigma_T} u(z) \left(\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x) dx \right)^p \left(\int_0^z |g_2(t)| dt \right)^p dz \leq 2C_T \int_0^{\sigma_T} v(t) |g_2(t)|^p dt, \quad g_2 \in K_{1,p}^-(0, \sigma_T).$$

Из первого неравенства на основании теоремы В, со второго неравенства в силу неравенства Гельдера, а с третьего и четвертого неравенств на основании теоремы А получаем нижнюю оценку постоянной C_T , объединяя эти оценки и с учетом (21), в итоге получаем оценку

$$\frac{1}{2} A(p, T, \sigma) \leq C_T,$$

которая вместе с (20) дает (9). Теорема 1 доказана.

5 Заключение

Целью работы является получение необходимых и достаточных условий выполнения неравенства (1). Для достижения поставленной цели использовались весовые неравенства Харди и типа Харди с ядром и полученные результаты могут быть применены для установления осцилляционных свойств дифференциального уравнения четвертого порядка в окрестности конечной особой точки и, связанные с ними, спектральных характеристик некоторых дифференциальных операторов.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05130975, 2018-2020 годы).

Список литературы

- [1] Adiyeva A., Oinarov R. Weighted inequality and oscillatory properties of a class of fourth order differential equations// *Nonlinear Studies*. - 2019. - Vol. 26, No. 4. -P. 741-753.
- [2] Opic B. and Kufner A. *Hardy-Type Inequalities*. - Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific and Technical, Harlow. -1990. -344p.
- [3] Абылаева А.М., Байарыстанов А.О., Ойнаров Р. Весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве $AC(I)$ // *Сиб.Мат.Журнал*. -2014. -Т.55, №3. -P.477-493.
- [4] Kalybay A. A. One-dimensional differential Hardy inequality// *J.Ineq.Appl*, (2017) 2017:21 DOI 10.1186/s13660-017-1293-3.
- [5] Степанов В. Д. Об одном весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков// *Тр. МИАН СССР*. -1989. -Т.187. -С.178–190.
- [6] Kufner A. Higher order Hardy inequalities// *Bayreuth. Math. Schr.* - 1993. -Vol.44. -P.105-146.
- [7] Куйфнер А., Хейниг Г.П. Неравенство Харди для производных высших порядков// *Тр. МИАН СССР*. -1990. -Т.192. -P.105–113 (Kufner A. and Heinig H.P. Hardy's inequality for higher order derivatives // *Proc. Steklov Inst. Math.* -1992. -Vol.192. -P.113-121.)
- [8] Kufner A, Wannebo A. Some remarks to the Hardy inequality for higher order derivatives// in: *General Inequalities (Oberwolfach, -1990)*, Birkhauser, Basel. -1992. -P. 33–48.
- [9] Kufner A., Kuliev K. and Persson L.-E. Some higher order Hardy inequalities// *J. Inequal. Appl.* -2012. 2012:69. -P.14.
- [10] Sinnamon G. Kufner's conjecture for higher order Hardy inequalities// *Real. Anal. Exchange*. -1995. -Vol.21(2). -P.590-603.
- [11] Sinnamon G. A weighted gradient inequality // *Proc.Royal.Soc. Edinburg A.* -1989. -Vol.111. -P.329-335.
- [12] Kalybay, A. A., Persson, L.-E. Three weights higher order Hardy inequalities// *Function Spaces and Applications*.-2006. -Vol. 4(2). -P. 63-191.
- [13] Kalybay, A. A. A Generalization of the weighted Hardy inequality for one class of integral operators// *Siberian Math. J.* -2004. -Vol.45, No.4. -P.100-111.
- [14] Kufner A., Simader C.G. Hardy inequalities for overdetermined classes of functions// *Z. Anal.Anwendungen*. -1997. No 16(2). -P.387-403.
- [15] Kufner A., Sinnamon G. Overdetermined Hardy inequalities// *J.Math.Anal. Appl.* -1997. -Vol.213. -P.468-486.
- [16] Kufner A., Lienfelder H. On overdetermined Hardy inequalities// *Math. Bohem.* -1998. -Vol.123(3), -P.279-293.
- [17] Nasyrova M. and Stepanov V. D. On maximal overdetermined Hardy's inequality of second order on a finite interval// *Math. Bohem.* -1999. -Vol.124. -P.293–302.
- [18] Kufner A., Persson L.-E. *Weighted inequalities of Hardy type*. - World Scientific., New Jersey-London-Singapore-Hong Kong. - 2003.
- [19] Kufner A., Persson L.-E., Samko N. *Weighted inequalities of Hardy type*. - World Scientific. Second Edition. - 2017.
- [20] Nasyrova M., Stepanov V.D. On weighted Hardy on semiaxis for functions vanishing at the endpoints// *J. Ineq. Appl.* - 1997, -Vol.1, No.3. -P.223-238.
- [21] Nassyrova M. *Weighted inequalities involving Hardy-type and limiting Geometric Mean Operators*. Doctorol thesis. Department of Mathematics, Lulea University of Technology, Sweeden. - 2002.

- [22] Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E. The Prehistory of the Hardy Inequality// Amer. Math. Monthly. -2006. -Vol.113(8). -P.715–732.
- [23] Мазья В.Г. Пространства С.Л.Соболева.- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. -1985. - 416 с.
- [24] Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов// Труды мат.института им.В.Стеклова. -1993. -Т. 204. -С.240-250.

References

- [1] Adiyeva A., Oinarov R. Weighted inequality and oscillatory properties of a class of fourth order differential equations, Nonlinear Studies vol. 26, no 4 (2019): 741-753.
- [2] Opic B. and Kufner A. Hardy-Type Inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, Harlow (1990): 344
- [3] Abylaeva A.M., Bajarystanov A.O., Ojnarov R. Vesovoe differencial'noe neravenstvo Hardi na mnozhestve $\overset{\circ}{AC}(I)$ [A weighted differential hardy inequality on $\overset{\circ}{AC}(I)$] Sib.Mat.Zhurnal vol.55, no 3 (2014): 477-493.
- [4] Kalybay A. A. One-dimensional differential Hardy inequality, J.Ineq.Appl (2017) 2017:21 DOI 10.1186/s13660-017-1293-3.
- [5] Stepanov V. D. Ob odnom vesovom neravenstve tipa Hardi dlja proizvodnyh vysshih porjadkov [On a weighted inequality of Hardy type for derivatives of higher order] Tr. MIAN SSSR. vol.187 : 178–190.
- [6] Kufner A. Higher order Hardy inequalities, Bayreuth. Math. Schr. vol.44 (1993): 105-146.
- [7] Kufner A., Hejnig G.P. Neravenstvo Hardi dlja proizvodnyh vysshih porjadkov [Hardy's inequality for higher order derivatives] Tr. MIAN SSSR vol.192 (1990): 105–113 [Kufner A. and Heinig H.P. Hardy inequality for higher order derivatives, Proc. Steklov Inst. Math. vol.192 (1992):113-121.]
- [8] Kufner A, Wannebo A. Some remarks to the Hardy inequality for higher order derivatives, in: General Inequalities (Oberwolfach, -1990), Birkhauser, Basel (1992): 33–48.
- [9] Kufner A., Kuliev K. and Persson L.-E. Some higher order Hardy inequalities, J. Inequal. Appl. 2012:69 (2012): 14.
- [10] Sinnamon G. Kufner's conjecture for higher order Hardy inequalities, Real. Anal. Exchange vol.21(2) (1995): 590-603.
- [11] Sinnamon G. A weighted gradient inequality, Proc.Royal.Soc. Edinburg A. vol.111 (1989): 329-335.
- [12] Kalybay, A. A., Persson, L.-E. Three weights higher order Hardy inequalities, Function Spaces and Applications vol. 4(2) (2006): 63-191.
- [13] Kalybay, A. A. A Generalization of the weighted Hardy inequality for one class of integral operators, Siberian Math. J. vol.45, no 4 (2004): 100-111.
- [14] Kufner A., Simader C.G. Hardy inequalities for overdetermined classes of functions, Z. Anal.Anwendungen no 16(2)(1997): 387-403.
- [15] Kufner A., Sinnamon G. Overdetermined Hardy inequalities, J.Math.Anal. Appl. vol.213(1997): 468-486.
- [16] Kufner A., Lienfelder H. On overdetermined Hardy inequalities, Math. Bohem. vol.123(3)(1998): 279-293.
- [17] Nasyrova M. and Stepanov V. D. On maximal overdetermined Hardy's inequality of second order on a finite interval, Math. Bohem. vol.124 (1999): 293–302.
- [18] Kufner A., Persson L.-E. Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific., New Jersey-London-Singapore-Hong Kong (2003).
- [19] Kufner A., Persson L.-E., Samko N. Weighted inequalities of Hardy type. Second Edition, World Scientific (2017).
- [20] Nasyrova M., Stepanov V.D. On weighted Hardy on semiaxis for functions vanishing at the endpoints, J. Ineq. Appl. vol.1, no 3 (1997): 223-238.
- [21] Nasyrova M. Weighted inequalities involving Hardy-type and limiting Geometric Mean Operators, Doctorol thesis. Department of Mathematics, Lulea University of Technology, Sweeden (2002).

- [22] Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E. The Prehistory of the Hardy Inequality, Amer. Math. Monthly. vol.113(8)(2006): 715–732.
- [23] Maz'ja V.G. Prostranstva S.L.Soboleva [Sobolev spaces] (L.: Izd-vo Leningr. un-ta, 1985): 416
- [24] Ojnarov R. Dvustoronnii ocenki normy nekotorykh klassov integral'nykh operatorov [Two-sided norm estimates for certain classes of integral operators], Trudy mat.instituta im.V.Steklova vol. 204(1993): 240-250.

MPHTI 27.29.17, 27.29.23

<https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.06>¹С.А. Айсағалиев , ²Г.Т. Корпебай ¹д.т.н., профессор, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz²магистрант, E-mail: Guldana.Korpebay@kaznu.kz

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Предлагается метод решения задачи оптимального быстродействия для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями из заданных множеств при наличии фазовых и интегральных ограничений, а также голономных связей. В отличие от известных методов решения задачи оптимального быстродействия разработан новый подход к проблеме быстродействия в виде принципа погружения. Принцип погружения создан на основе исследования разрешимости и построение общего решения интегрального уравнения.

Основными результатами являются:

- необходимое и достаточное условия существования решения одного класса интегрального уравнения и построение его общего решения;
- выделение всех множеств управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в любое желаемое конечное состояние для линейных систем;
- предлагаемый принцип погружения позволяющий свести исходную краевую задачу оптимального быстродействия с ограничениями к специальной начальной задаче оптимального управления;
- необходимое и достаточное условия существования допустимого управления;
- разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия с ограничениями для линейных систем любого порядка.

Полученные результаты являются решениями актуальных проблем теории оптимального быстродействия с ограничениями имеющие многочисленные приложения.

Разработан новый метод решения задачи оптимального быстродействия линейных систем с краевыми условиями, при наличии фазовых, интегральных ограничений и голономных связей. Создана общая теория краевых задач оптимального быстродействия имеющая многочисленные приложения в естественных науках, технике, экономике.

Принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов состоит в том, что исходная задача погружается в задачу управляемости с управлениями из функциональных пространств с последующим сведением к начальной задаче оптимального управления.

Ключевые слова: Оптимальное быстродействие, фазовые и интегральные ограничения, голономные связи, принцип погружения, интегральное уравнение.

¹С.Ә. Айсағалиев, ²Г.Т. Корпебай¹т.ғ.д., профессор, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz²магистрант, E-mail: Guldana.Korpebay@kaznu.kz

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Шенелген сызықты жүйелердің тиімді тез әсер ету теориясындағы интегралдық теңдеу

Фазалық және интегралдық шектеулері, сондай-ақ голондық байланыстары бар болатын берілген жиындардан шекаралық шарттары бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін тиімді тез әрекет ету есебін шешу әдісі ұсынылады. Тиімді тез әрекет ету есебін шешудің белгілі әдістеріне қарағанда, батыру қағидасы түрінде тиімді тез әрекет ету проблемасына жаңа көзқарас әзірлені. Батыру қағидасы интегралдық теңдеудің жалпы шешімін құру және шешімділігін зерттеу негізінде құрылған.

Алынатын негізгі нәтижелер:

- бір классты интегралдық теңдеулердің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары және оның жалпы шешімін құру;
- әрбір элементі сызықты жүйенің траекториясын кез келген бастапқы күйден кез келген қалаған соңғы күйге ауыстыратын басәрудың барлық жиындарын таңдау;
- ұсынылған батыру қағидасы шектеулері бар тиімді тез әсер етудің бастапқы шекаралық есебін тиімді басқарудың арнайы бастапқы есебіне келтіруге мүмкіндік береді;
- мүмкін болатын басқарудың қажетті және жеткілікті шарттары;
- кез келген ретті сызықтық жүйелер үшін шектеулері бар тиімді тез әсер ету есебін шешу алгоритмі әзірленді.

Алынған нәтижелер көптеген қосымшалары бар болатын шектеулері бар тиімді тез әсер ету теориясының өзекті мәселелерінің шешімі болып табылады.

Фазалық және интегралдық шектеулері, сондай-ақ голондық байланыстары бар болатын берілген жиындардан шекаралық шарттары бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін тиімді тез әрекет ету есебін шешудің жаңа әдісі құрылған. Жаратылыстану ғылымдарда, техникада, экономикада көптеген қосымшалары бар тиімді тез әсер ету шекаралық есептерінің жалпы теориясы құрылды.

Ұсынылған әдісін белгілі әдістерден принципиалды айырмашылығы бастапқы есеп тиімді басқарудың бастапқы есебіне келтірілетін функционалдық жиында анықталған басқарулары бар басқарымдылық есебіне келтіріледі.

Түйін сөздер: Тиімді тез әсер ету, фазалық шектеулер, голономдық байланыстар, батыру қағидасы, интегралдық теңдеу.

¹S.A. Aisagaliev, ²G.T. Korpebai

¹Dr.Sci., professor, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

²Master Student, E-mail: Guldana.Korpebay@kaznu.kz

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Integral equation in the theory of optimal speed of linear systems with constraints

We propose a method for solving the optimal speed problem for linear ordinary differential equations with curve conditions from given sets in the presence of phase and integral constraints, as well as holonomic connections. In contrast to the known methods of solving the problem of optimal performance, a new approach to the problem of performance in the form of the principle of immersion is developed. The immersion principle is based on the study of solvability and the construction of a General solution of the integral equation.

The main results are:

- necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of one class of integral equation and the construction of its General solution;
- selection of all sets of controls, each element of which translates the trajectory of the system from any initial state to any desired final state for linear systems;
- the proposed immersion principle allows reducing the initial boundary value problem of optimal performance with restrictions to a special initial problem of optimal control;
- necessary and sufficient conditions for the existence of acceptable management;
- an algorithm for solving the optimal performance problem with constraints for linear systems of any order has been developed.

The results obtained are solutions to current problems in the theory of optimal performance with restrictions that have numerous applications.

A new method is developed for solving the problem of optimal performance of linear systems with boundary conditions, in the presence of phase, integral constraints and holonomic connections. A General theory of boundary value problems of optimal performance has been developed that has numerous applications in the natural Sciences, technology, and Economics.

The principal difference between the proposed method and the known methods is that the initial problem is immersed in the manageability problem with controls from functional spaces, and then reduced to the initial optimal control problem.

Key words: Optimal performance, phase and integral constraints, holonomic relations, immersion principle, integral equation.

1 Введение

Рассматривается следующая задача оптимального быстродействия: минимизировать функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \rightarrow \inf \quad (1)$$

на множестве решений уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1] \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1, \quad S_0 \subset R^n, S_1 \subset R^n, \quad (3)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : \quad G(t) = \{x \in R^n \mid \omega(t) \leq L(t)x \leq \varphi(t), \quad t \in I\} \quad (4)$$

интегральных ограничений

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad (5)$$

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2} \quad (6)$$

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [a_j^*(t) x(t) + b_j^*(t) u(t)] dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \quad (7)$$

а также с учетом голономных связей

$$\Gamma_j(x(t), u(t), t) = e_j^*(t)x(t) + r_j(t) = 0, \quad t \in I, \quad j = \overline{1, p}, \quad (8)$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t) \in U(t) \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) \mid u(t) \in V(t) \subset R^m \text{ п.в. } t \in I, \} \quad (9)$$

где (*) – знак транспонирования, t_0 – фиксированный момент времени, t_1 – не фиксирован, $t_1 > t_0$. Здесь $A(t), B(t)$ – матрицы порядков $n \times n, n \times m$ соответственно, с кусочно непрерывными элементами, $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ – заданная функция. При указанных условиях дифференциальное уравнение (2) имеет единственное решение для любого фиксированного $u(t) \in U(t)$ и для любой начальной точки $x_0 \in S_0$, функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, u)$, $t \in I$ абсолютно непрерывна.

В краевом условии, S_0, S_1 заданные ограниченные выпуклые замкнутые множества из R^n . В фазовом ограничении, $L(t), t \in I$ – заданная матрица порядка $s \times n$ с непрерывными элементами, $\omega(t), \varphi(t), t \in I$ заданные непрерывные вектор функции $s \times 1$. В интегральных ограничениях, $a_j(t), b_j(t), j = \overline{1, m_2}$ – заданные кусочно – непрерывные вектор функции $n \times 1, m \times 1$ соответственно. В голономных связях $e_j(t), r_j(t), j = \overline{1, p}$ – непрерывные вектор функции $n \times 1, 1 \times 1$, соответственно. В ограничении на значения управления, $V(t), t \in I$ – заданные ограниченные выпуклые замкнутое множество из R^m .

Следует отметить, что интегральные ограничения в виде (5), путем введения дополнительных переменных $d_j \geq 0, j = \overline{1, m_1}$, могут быть записаны в виде $g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, \cdot) = c_j - d_j, j = \overline{1, m_1}$. Обозначим через $\bar{c}_j = c_j - d_j, j = \overline{1, m_1}$. Пусть вектор $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m_2})$ где $\bar{c}_j = c_j - d_j, j = \overline{1, m_1}, \bar{c}_j = c_j, j = \overline{m_1 + 1, m_2}, d_j \geq 0, j = \overline{1, m_1}$. Пусть множество

$$Q = \{ \bar{c} \in R^{m_2} \mid \bar{c}_j = c_j - d_j, d_j \geq 0, j = \overline{1, m_1}, \bar{c}_j = c_j, j = \overline{m_1 + 1, m_2} \}$$

где $d_j \geq 0, j = \overline{1, m_1}$ – неизвестные числа.

Определение 1 Для любого фиксированного $t_1, t_1 > t_0$, тройка $(\bar{u}(t), \bar{x}_0, \bar{x}_1) \in U \times S_0 \times S_1$ называется допустимые управлением для задачи (1)-(9), если краевая задача (2)-(9) с ограничениями имеет решение. Множество всех допустимых управлений обозначим через $\sum_{t_1}, \sum_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$.

Задача 1 Найти необходимые и достаточные я существования решений краевой задачи (2)-(9) при фиксированном t_1 .

Заметим что если $\sum_{t_1} = \emptyset$, \emptyset - пустое множество, то краевая задача оптимального быстродействия (2)-(9) не имеет решения при фиксированном t_1 .

Задача 2 Найти допустимое управление $(\bar{u}(t), \bar{x}_0, \bar{x}_1) \in \sum_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$.

Краевая задача (2)-(9) называется задачей управляемости при фиксированном $t_1, t_1 > t_0$, где допустимое управление $(\bar{u}(t), \bar{x}_0, \bar{x}_1) \in \sum_{t_1}$, переводит траекторию системы (2) исходящую из точки $\bar{x}_0 \in S_0$ в момент времени t_0 , в точку $\bar{x}_1 \in S_1$ в момент времени t_1 , и выполнены: включение $\bar{x}(t; \bar{u}, \bar{x}_0, \bar{x}_1) \in G(t), t \in I$; равенства $g_j(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{x}_0, \bar{x}_1) = \bar{c}_j, j = \overline{1, m_2}, \Gamma_j(\bar{x}(\cdot), t) = 0, j = \overline{1, p}, t \in I$.

Определение 2 Допустимое управление $(u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in \sum_{t_{1*}}$, называется оптимальным управлением для задачи (1)-(9), если $t_{1*} - t_0 = \min_{t_1 > t_0} [t_1 - t_0]$.

Задача 3 Найти оптимальное управление $(u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in \sum_{t_{1*}}$, где $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1$, $x_*(t, u_*, x_0^*, x_1^*) \in G(t)$, $t \in I_1$, $g_j(x_*(\cdot), u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = \bar{c}_j$, $j = \overline{1, m_2}$, $\Gamma_j(x_*(t), t) = 0$, $t \in I_1$, $j = \overline{1, p}$, $I_1 = [t_0, t_{1*}]$.

Функция $x_*(t) = x_*(t, u_*, x_0^*, x_1^*)$, $t \in I_1 = [t_0, t_{1*}]$ называется оптимальной траекторией для задачи (1)-(9).

В статье предлагается метод решения указанных задач путем построения общего решения интегрального уравнения следующего вида

$$K\omega = \int_{t_0}^{t_1} K(t_*, t)w(t)dt = \beta, \quad t_* \in I = [t_0, t_1], \quad (10)$$

где $K(t_*, t) = K(t)$ – известная матрица порядка $n_1 \times \overline{m}$ с элементами из L_2 , $t_* \in [t_0, t_1]$ – фиксированная точка, $w(t) \in L_2(I, R^{\overline{m}})$ – искомая функции $\beta \in R^{n_1}$.

Задача 4 Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (10) для любых $\beta \in R^n$.

Задача 5 Найти общее решение интегрального уравнения (10) для любых $\beta \in R^n$.

Решения задач 4, 5 позволяют выделить все множества допустимых управлений \sum_{t_1} для задачи управляемости (2)-(9) и построить решения задачи (1)-(9), при фиксированном t_1 . Наименьшее значение t_{1*} , $t_{1*} - t_0 > 0$ определяется последовательным решением задачи управляемости (2)-(9) методом деления “попалам” значений t_1 .

2 Обзор литературы

Теория экстремальных задач в банаховом пространстве, решения задачи оптимального управления и оптимального быстродействия содержатся в [1, 2, 3]. Теоретическая основа решения задачи оптимального быстродействия в виде принципа максимума имеется в [3]. Принцип максимума сводит решение задачи оптимального быстродействия к решению краевой задачи системы дифференциальных уравнений порядка $2n$. Однако решение краевой задачи принципа максимума практически невозможно для системы порядка $n > 2$. В данной работе предлагается совершенно новый подход к решению задачи оптимального быстродействия путем сведения исходной задачи к начальной задаче специального вида.

Интегральное уравнение (10) относится к типу интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Разрешимость и построение решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относятся к типу сложных проблем математики. Известные результаты по разрешимости интегрального уравнения относятся к случаю, когда ядро симметрично [4, 5, 6]. Поэтому решения задач 4, 5 являются актуальным как для теории интегральных уравнений так и ее приложений.

Отдельные результаты по исследованию интегрального уравнения (10) и решения задачи управляемости (2)-(9) приведены в [7, 8, 9]. Некоторые результаты по решению задачи оптимального быстродействия (1)-(9) содержатся в работах [12, 11, 12, 13].

3 Материал и методы

Вводя обозначения

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \dots \\ a_{m_2}(t) \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_{m_2}(t) \end{pmatrix}, \quad a_j(t) = (a_{j1}(t), \dots, a_{jn}(t)), \quad b_j(t) = (b_{j1}(t), \dots, b_{jm}(t)),$$

функционал (7) запишем в виде

$$g(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t)] dt.$$

Пусть вектор функция $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$, где

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t [A_0(\tau)x(\tau) + B_0(\tau)u(\tau)] d\tau.$$

Тогда

$$\dot{\eta}(t) = A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t), \quad t \in I, \quad (11)$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \bar{c} \in Q, \quad (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad u(t) \in U(t), \quad (12)$$

где $A_0(t), B_0(t)$ матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $m_2 \times n, m_2 \times m$, соответственно. Теперь задача оптимального быстрогодействия (1)-(9) запишется в виде: минимизировать функционал

$$J(\xi(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, d, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \rightarrow \inf \quad (13)$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)u(t) + \bar{\mu}(t), \quad t \in I, \quad (14)$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad \xi(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) = x_0 \\ \eta(t_0) = 0 \end{pmatrix} = \xi_0, \quad \xi(t_1) = \begin{pmatrix} x(t_1) = x_1 \\ \eta(t_1) = \bar{c} \end{pmatrix} = \xi_1, \quad x(t) = P_1\xi(t),$$

$$P_1 = (I_n, O_{nm_2}), \quad P_1\xi(t) \in G(t), \quad u(t) \in U(t), \quad (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad (15)$$

$$\bar{c} \in Q, \quad \Gamma(P_1\xi) = DP_1\xi(t) + r(t) = 0,$$

где

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{nm_2} \\ A_0(t) & O_{m_2, m_2} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ B_0(t) \end{pmatrix}, \quad D = D(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \dots \\ e_p(t) \end{pmatrix},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_p(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ O_{m_2} \end{pmatrix}, \quad d \in \Pi = \{d \in R^{m_1} \mid d \geq 0\},$$

$A_1(t), B_1(t), D(t), r(t)$ - матрицы порядков $(n + m_2) \times (n + m_2)$, $(n + m_2) \times m$, $p \times n$, $p \times 1$ соответственно $\bar{\mu}(t) \in L_2(I, R^{m+m_2})$, $O_{k,q}$ – прямоугольная матрица порядка $k \times q$ с нулевыми элементами, I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Рассмотрим интегральное уравнение (10). Решения задач 4, 5 дают следующие теоремы.

Теорема 1 *Интегральное уравнение (10) при любом фиксированном $\beta \in R^{n_1}$ имеет решения тогда и только тогда когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_*, t)K^*(t_*, t)dt \tag{16}$$

порядка $n_1 \times n_1$ является положительно определенной, где $(*)$ – знак транспонирования.

Теорема 2 *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (10) определяется по формуле*

$$\omega(t) = v(t) + K^*(t_*, t)C^{-1}(t_0, t_1)\beta - K^*(t_*, t)C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_*, t)v(t)dt, \quad t \in I, \tag{17}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{\bar{m}})$ – произвольная функция, $\beta \in R^n$ – любой вектор.

Рассмотрим линейную управляемую систему (см. (14))

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + \bar{\mu}(t), \quad t \in I, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{18}$$

$$y(t_0) = \xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, 0) \in S_0 \times O_{m_2}, \quad y(t_1) = \xi(t_1) = (x, \bar{c}) \in S_1 \times Q. \tag{19}$$

Решения дифференциального уравнения (18) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B_1(\tau)w_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau, \quad t \in I, \tag{20}$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta_1(t)\theta_1^{-1}(\tau)$, $\theta_1(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\eta} = A_1(t)\eta$. Поскольку $y(t_1) = \xi_1$, то из (20) следует

$$\int_{t_0}^t \Phi(t_0, t)B_1(t)w_1(t)dt = a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int_{t_0}^t \Phi(t_0, t)\bar{\mu}(t)dt. \tag{21}$$

Таким образом, управление $w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ является решением интегрального уравнения (21). Как следует из (10) для решения интегрального уравнения (21) применимы теоремы 1,2, где $K(t_*, t) = \Phi(t_0, t)B_1(t)$, $\beta = a$, $w(t) = w_1(t)$, $t_* = t_0 \in I = [t_0, t_1]$, $n_1 = n + m_2$, $\bar{m} = m$.

Теорема 3 Пусть матрица

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B_1(t) B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt \quad (22)$$

порядка $(n + m_2) \times (n + m_2)$ положительно определенная. Тогда управление $w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию системы (18) из любой начальной точки $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ в любое конечное состояние $\xi_1 \in R^{n+m_2}$ тогда и только тогда, когда

$$w_1(t) \in U_1 = \{w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m) | w_1(t) = v(t) + T_1(t)\xi_0 + T_2(t)\xi_1 + \bar{\mu}_1(t) + M_1(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad \forall v(t), \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m)\}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(t) &= -B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1), \quad T_2(t) = B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1), \\ M_1(t) &= -B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t_1) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1), \\ \bar{\mu}_1(t) &= -B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \bar{\mu}(t) dt, \end{aligned} \quad (24)$$

Функция $z(t) = z(t, v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m). \quad (25)$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1,2. В самом деле, из (10) при $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t) B_1(t)$ имеем (21). Тогда (см.(16))

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) K^*(t_0, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B_1(t) B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt = W(t_0, t_1).$$

Следовательно, для существования решения интегрального уравнения (21) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Как следует из теоремы 2, управление $w_1(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (17). Тогда

$$\begin{aligned} w_1(t) &= v(t) + K^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) a - K^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) v(t) dt = \\ &= v(t) + B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) [\Phi(t_0, t_1) \xi_1 - \xi_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \bar{\mu}(t) dt] - \\ &\quad - B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B_1(t) v(t) dt = \\ &= v(t) + T_1(t) \xi_0 + T_2(t) \xi_1 + \bar{\mu}(t) + M_1(t) z(t_1, v), \quad t \in I, \quad \forall v, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \end{aligned}$$

где матрицы $T_1(t)$, $T_2(t)$, $M_1(t)$, $t \in I$ – определяются соотношениями (24),

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B_1(t) v(t) dt = \Phi(t_0, t_1) z(t_1, v), \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$$

$z(t, v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (25). Множество U_1 порождается, когда произвольная функция $v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ пробегает все элементы пространства $L_2(I, R^m)$. Теорема доказана.

Теорема 4 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Тогда решение дифференциального уравнения (18) соответствующее управлению $w_1(t) \in U_1$ определяется по формуле

$$y(t) = z(t, v) + E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \bar{\mu}_2(t) + M_2(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (26)$$

где

$$E_1(t) = \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1), \quad E_2(t) = \Phi(t_0, t)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1),$$

$$\bar{\mu}_2(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\bar{\mu}(t)dt,$$

$$M_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B_1(\tau)B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau,$$

$$W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t), \quad t \in I. \quad (27)$$

Доказательство. Как следует из (20) функция $y(t)$, $t \in I$ при $w_1(t) \in U_1$ равна

$$\begin{aligned} y(t) &= \Phi(t, t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B_1(\tau)w_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau = \\ &= \Phi(t, t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B_1(\tau)[v(\tau) + T_1(\tau)\xi_0 + T_2(\tau)\xi_1 + \bar{\mu}_1(\tau) + M_1(\tau)z(t_1, v)]d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau = \\ &= \Phi(t, t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B_1(\tau)T_1(\tau)d\tau\xi_0 + \\ &+ \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B_1(\tau)T_2(\tau)d\tau\xi_1 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B_1(\tau)\bar{\mu}_1(\tau)d\tau + \\ &+ \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B_1(\tau)M_1(\tau)d\tau z(t_1, v) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B_1(\tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом того, что:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B_1(\tau) v(\tau) d\tau = z(t, \tau), \quad \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B_1(\tau) T_1(\tau) d\tau = \\
& = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B_1(\tau) [-B_1^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) W^{-1}(t_0, t_1)] d\tau = -W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1), \\
& \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B_1(\tau) T_2(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B_1(\tau) [B_1^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1)] d\tau = \\
& = W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1), \\
& \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B_1(\tau) M_1(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B_1(\tau) [-B_1^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1)] d\tau = \\
& = -W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1), \\
& \Phi(t, t_0) \xi_0 - \Phi(t, t_0) W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \xi_0 = \Phi(t, t_0) [I_n - W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1)] \xi_0 = \\
& = \Phi(t, t_0) \{I_n - [W(t_0, t_1) - W(t_1, t_1)] W^{-1}(t_0, t_1)\} \xi_0 = \Phi(t, t_0) W(t, t_1) W^{-1}(t_0, t_1) \xi_0,
\end{aligned}$$

получим формулы (26), где $E_1(t), E_2(t), \bar{\mu}_2, M_2(t), t \in I$ определяются соотношениями (27). Теорема доказана.

Лемма 1 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Для того чтобы функция $y(t) = \xi(t)$, $t \in I$ необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$w_1(t) = U_1, \quad w_1(t) = u(t) \in U(t) \subset L_2(I, R^m), \quad U_1 \cap U \neq \emptyset, \quad (28)$$

$$p(t) = L(t) P_1 y(t) \in V = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^s) \mid w(t) \leq p(t) \leq \varphi(t), \quad t \in I\}, \quad (29)$$

$$\Gamma(P_1 y(t), t) = DP_1 y(t) + r(t) \equiv 0, \quad t \in I, \quad (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad d \in \Pi. \quad (30)$$

Лемма 2 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Тогда задача оптимального быстрого действия (1)-(9) эквивалентна следующей задаче: Минимизировать функционал

$$J(y(\cdot), u(\cdot)v(\cdot), p(\cdot), (x_0, x_1), d) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \rightarrow \inf \quad (31)$$

при условиях

$$\begin{aligned}
& J_1(y(\cdot), u(\cdot)v(\cdot), p(\cdot), x_0, x_1, d) = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t) P_1 y(t)|^2 + |DP_1 y(t) + r(t)|^2] dt = 0, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad (33)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad p(t) \in V(t), \quad u(t) \in U(t), \quad d \in \Pi, \quad (34)$$

где функции $w_1(t)$, $y(t)$, $t \in I$ определяются формулами (23), (26) соответственно.

3.1 Преобразование

Как следует из леммы 2 существование допустимого управления при фиксированном t_1 следует из решения задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_1(y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot), p(\cdot), x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t) dt \rightarrow inf \quad (35)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (36)$$

$$v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad p(t) \in V(t), \quad u(t) \in U(t), \quad d \in \Pi, \quad (37)$$

где

$$q(t) = (\theta(t), z(t, v), z(t_1, v)),$$

$$\theta(t) = (u(t), v(t), p(t), x_0, x_1, d),$$

$$F_1(q(t), t) = |w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t)P_1y(t)|^2 + |DP_1y(t) + r(t)|^2,$$

функции $y(t), w_1(t), t \in I$ определяются формулами (26), (23) соответственно, $\xi_0, \xi_1, V, \Gamma(P, y, t)$ из (15), (29), (15).

Введем следующие обозначения:

$$X = U \times L_2^\rho(I, R^m) \times V \times S_0 \times S_1 \times \Pi_\rho, \quad H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times R^n \times R^n \times R^{m_1},$$

$$L_2^\rho(I, R^m) = \{v(\cdot) \in L_2(I, R^m) \mid \|v\| \leq \rho, \rho > 0 - \text{достаточно большое число}\},$$

$$\Pi_\rho = \{d \in R^{m_1} \mid |d| \leq \rho\}, \quad \theta \in X, \quad X \subset H,$$

где X – ограниченное выпуклое замкнутое множество в H , H – гильбертово пространство. Оптимизационная задача (35)-(37) может быть представлена в виде

$$J_1(\theta(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t) dt \rightarrow inf, \quad \theta(\cdot) \in X \subset H.$$

Пусть множество $X_* = \{\theta_*(\cdot) \in X \mid J_1(\theta_*) = \inf_{\theta \in X} J_1(\theta(\cdot))\}$.

Лемма 3 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Для того чтобы краевая задача (2)-(9) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\theta_*(\cdot)) = 0$.

Доказательство следует из леммы 2.

Заметим что: 1) функционал $J_1(\theta)$, $\theta \in X$ – выпуклый и слабо полунепрерывен снизу в X , X – слабобикомпактное множество. Следовательно, $J_1(\theta)$, $\theta \in X$ достигает нижней грани на множестве X , множество $X_* \neq \emptyset$, \emptyset – пустое множество; 2) Поскольку значение $J_1(\theta) \geq 0$, $\theta \in X$, то возможны случаи: а) $J_1(\theta_*) = \inf_{\theta \in X} J_1(\theta) = \min_{\theta \in X} J_1(\theta) = 0$; б) $J_1(\theta_*) > 0$. В случае, $J_1(\theta_*) = 0$, $\theta_* = (\bar{u}_*, \bar{v}_*, \bar{p}_*, \bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \bar{d}) \in X_*$ – оптимальное решение задачи (35)-(37), тройка $(\bar{u}(t) = \bar{u}_*, \bar{x}_0 = \bar{x}_0^*, \bar{x}_1 = \bar{x}_1^*) \in \sum_{t_1}$ допустимое управление для задачи (1)-(9). Если $J_1(\theta_*) > 0$, $\theta_* \in X_*$, то $\sum_{t_1} = \emptyset$, \emptyset – пустое множество. Краевая задача (2)-(9) не имеет решение при фиксированном t_1 .

Теорема 5 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$, функция $F_1(q, t)$ определена и непрерывно по совокупности переменных (q, t) вместе с частичными производными по q .

Тогда функционал (35) при условиях (36), (37) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент

$$J'_1(\theta) = (J'_{1u}(\theta), J'_{1v}(\theta), J'_{1p}(\theta), J'_{1x_0}(\theta), J'_{1x_1}(\theta), J'_{1d}(\theta)) \in H$$

в любой точке $\theta \in X$ вычисляется по формуле

$$J'_{1u}(\theta) = F_{1u}(q(t), t), \quad J'_{1v}(\theta) = F_{1v}(q(t), t) - B_1^*(t)\psi(t), \quad J'_{1p}(\theta) = F_{1p}(q(t), t),$$

$$J'_{1x_0}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1x_0}(q(t), t)dt, \quad J'_{1x_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1x_1}(q(t), t)dt, \quad J'_{1d}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1d}(q(t), t)dt, \quad (38)$$

где $z(t)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (36), а функция $\psi(t)$, $t \in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = F_{1z}(q(t), t) - A_1^*(t)\psi(t), \quad \psi(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} F_{1z(t_1)}(q(t), t)dt. \quad (39)$$

Кроме того, градиент $J'_1(\theta)$, $\theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'_1(\theta_1) - J'_1(\theta_2)\| \leq K\|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \quad (40)$$

где $K = const > 0$.

Доказательство аналогичной теоремы можно найти в [10].

Строим последовательности $Q_n = \{u_n, v_n, p_n, x_0^n, x_1^n, d_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ по алгоритму

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P_u [u_n - \alpha_n J'_{1u}(\theta_n)], \quad v_{n+1} = P_{L_2^p} [u_n - \alpha_n J'_{1v}(\theta_n)], \\ P_{n+1} &= P_v [p_n - \alpha_n J'_{1p}(\theta_n)], \quad x_0^{n+1} = P_{S_0} [x_0^n - \alpha_n J'_{1x_0}(\theta_n)], \\ x_1^{n+1} &= P_{S_1} [x_1^n - \alpha_n J'_{1x_1}(\theta_n)], \quad d_{n+1} = P_p [d_n - \alpha_n J'_{1d}(\theta_n)], \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq 2/k + 2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где $P_\Omega [\cdot]$ – проекция точки на множестве Ω , $K = const > 0$ из (40).

Теорема 6 Пусть выполнены условия теоремы 5, последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ определяется по формуле (41). Тогда:

1. последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей, $\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(\theta_n) = J_{1*} = \inf_{\theta \in X} J_1(\theta)$;

2. $\theta_n \xrightarrow{c\lambda} \theta_*$, $\theta_* \in X_*$, $u_n \xrightarrow{c\lambda} u_*$, $p_n \xrightarrow{c\lambda} p_*$, $v_n \xrightarrow{c\lambda} v_*$, $x_0^n \rightarrow x_0^*$, $x_1^n \rightarrow x_1^*$,
 $d_n \rightarrow d_*$ $n \rightarrow \infty$, $\theta_* = (u_*, v_*, p_*, x_0^*, x_1^*, d_*) \in X_*$;

3. справедлива следующая скорость сходимости

$$0 \leq J_1(\theta_n) - J_{1*} \leq \frac{c_0}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad c_0 = \text{const} > 0; \quad (42)$$

4. для того, чтобы задача (2)-(9) при фиксированном $t_1, t_1 > t_0$ имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(\theta_n) = J_{1*} = J_1(\theta_*) = 0$.

3.2 Построение решения задачи оптимального быстродействия

Как следует из леммы 3, для того чтобы $t_{1*} - t_0 = \min_{t_1 > t_0} [t_1 - t_0]$ т.е. разность $t_{1*} - t_0$ была наименьшим значением функционал (1) при условиях (2)-(9) необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) матрица $W(t_0, t_{1*})$ порядка $(n + m_2) \times (n + m_2)$ была положительно определенной;
 2) значения $J_1(\theta_*(\cdot)) = 0$. Следовательно, необходимо чтобы значение $t_1 \geq t_{1*}$. Пусть $\bar{t}_1, \bar{t}_1 > 0$ наименьшее значение t_1 где $\min_{t_1 > t_0} W(t_0, t_1) = W(t_0, \bar{t}_1) > 0$. Заметим, что если матрица $W(t_0, \bar{t}_1) > 0$, то матрица $W(t_0, t_1) > 0$ при всех $t_1 \geq \bar{t}_1$. Из условий $W(t_0, t_{1*}) > 0$, $W(t_0, \bar{t}_1) > 0$ следует $t_{1*} \geq \bar{t}_1$. Из леммы 1-3 и теорем 1-6 следует следующий алгоритм решения задачи оптимального быстродействия.

Строится какое-либо допустимое управление по методу изложенному выше. Для этого достаточно выбрать некоторое значение $t_1 = t_1^0$, $t_1^0 > t_0$ найти решение оптимизационной задачи (35)-(37). Пусть найдена точка $\theta_* = \theta_*(t_1^0) \in X$, $J_1(\theta_*) = J_1(\theta_*(t_1^0)) = \inf_{\theta \in X} J_1(\theta)$. Здесь возможны два случая:

а) $J_1(\theta_*(t_1^0)) > 0$;
 б) $J_1(\theta_*(t_1^0)) = J_{1*} = 0$. Далее, рассматривается в отдельности, случаи а), б). В случае а) выбирается новое значение $t_1 = 2t_1^0$, а в случае б) новое значение $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$ и т.д. Ниже приведены два алгоритма нахождения значения t_{1*} , где $t_{1*} - t_0 = \min_{t_1 > t_0} (t_1 - t_0)$.

А. Пусть известно значение $\bar{t}_1, \bar{t}_1 > t_0$, где $\min_{t_1 > t_0} W(t_0, t_1) = W_0(t_0, \bar{t}_1) > 0$. В этом случае, целесообразно выбрать значение $t_1 = m\bar{t}_1$, $m = 1, 2, \dots$. Следует отметить, что если значения $J_1(\theta_*(m\bar{t}_1)) > 0$ для любых $m = 1, 2, \dots$ то задача оптимального быстродействия (1)-(9) не имеет решения. В случае когда при $m = m_*$, $J_1(\theta_*(m_*\bar{t}_1)) = 0$, необходимо выбрать $t_1 = \bar{t}_1(m_* - 1 + m_*)/2 = (m_* - \frac{1}{2})\bar{t}_1 = \bar{m}_*\bar{t}_1$, $\bar{m}_* = m_* - \frac{1}{2}$. Найти значения $J_1(\theta_*(\bar{m}_*\bar{t}_1))$ путем решения оптимальности задачи (35)-(37). Здесь возможны

случаи: 1) $J_1(\theta_*(\bar{m}_*t_1)) > 0$; 2) $J_1(\theta_*(\bar{m}_*t_1)) = 0$. В случае $J_1(\theta_*(m_*\bar{t}_1)) > 0$ необходимо выбрать $t_1 = \bar{t}_1(m_* - \frac{1}{2} + m_*)/2 = (m_* - \frac{1}{4})\bar{t}_1$, а в случае $J_1(\theta_*(\bar{m}_*t_1)) = 0$ необходимо выбрать $t_1 = \bar{t}_1(m_* - 1 + m_* - \frac{1}{2}) = (m_* - \frac{3}{4})\bar{t}_1$ и т.д. Повторяя данную процедуру можно найти со сколь угодно точностью значение $t_1 = t_1^*$, где t_1^* – оптимальный момент времени.

Б. Пусть значение $\bar{t}_1, \bar{t}_1 > t_0$, где $\min_{t_1 > t_0} W(t_0, t_1) = W(t_0, \bar{t}_1) > 0$, либо матрица $W(t_0, t_1) > 0$ для любого $t_1 > t_0$. В этом случае, выбираем значение $t_0 = t_1^0$, где $W(t_0, t_1^0) > 0$. Находим значение $J_1(\theta_*(t_1^0))$ путем решения оптимизационной задачи (35)-(37). Возможны случаи: а) $J_1(\theta_*(t_1^0)) > 0$; в) $J_1(\theta_*(t_1^0)) = 0$;

Рассмотрим случай а). В этом случае выберем значение $t_1 = 2t_1^0$, находим значение $J_1(\theta_*(2t_1^0))$. Если значение $J_1(\theta_*(mt_1^0)) > 0$, $m = 1, 2, \dots$, то задача оптимального быстродействия (1)-(9) не имеет решения. В случае, когда при $m = m_*$, $J(\theta_*(m_*t_1^0)) = 0$. Выберем $t_1 = t_1^0(m_* - 1 + m_*)/2 = (m_* - \frac{1}{2})t_1^0$.

Рассмотрим случай б). В этом случае $J_1(\theta_*(t_1^0)) = 0$, выберем $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$, проверим будет ли матрица $W(t_0, t_1) > 0$, $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$. Если $W(t_0, t_1) > 0$, то находим значение $J_1(\theta_*(t_1))$, где $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$. В случае $J_1(\theta_*(t_1)) = 0$, $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$, то выберем $t_1 = \frac{t_0 + t_1^0}{2} + t_1^0/2 = (t_0 + 3t_1^0)/4$ и так далее.

3.3 Решения модельной задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия: минимизировать функционал

$$J(u, t_1) = \int_0^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 \rightarrow \inf \quad (43)$$

при условиях

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad t \in I = [0, t_1], \quad (44)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 0, \quad (45)$$

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1) \mid -1 \leq u(t) \leq +1 \text{ п.в. } t \in I\}. \quad (46)$$

Для данного примера

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

отсутствуют фазовые и интегральные ограничения, голономные связи, множества $S_0 = \{(1, 0)\}$, $S_1 = \{(0, 0)\}$ содержат единственные точки. В векторной форме задача (44)-(46) запишется в виде

$$J(u, t_1) = t_1 \rightarrow \inf \\ \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad t \in I = [0, t_1], \quad u(t) \in U.$$

Поскольку $\eta(t) \equiv 0$, $t \in I$, то $\xi(t) = x(t)$, $t \in I$. Линейная управляемая система (18) для данного примера запишется так

$$\dot{y} = Ay + Bw_1(t), \quad y(0) = x_0, \quad y(t_1) = x_1, \quad t \in I, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I, R^1),$$

где $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_1$. Матрицы

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1(t) = e^{A\tau}.$$

Вычислим следующие векторы и матрицы (см.(21)-(27)):

$$a = \Phi(0, t_1)x_1 - x_0 = -x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt = \begin{pmatrix} \frac{t_1^3}{3} & \frac{-t_1^2}{2} \\ -\frac{t_1^2}{2} & t_1 \end{pmatrix} > 0, \quad t_1 > 0,$$

$$W^{-1}(0, t_1) = \begin{pmatrix} \frac{12}{t_1^3} & \frac{6}{t_1^2} \\ \frac{6}{t_1^2} & \frac{4}{t_1} \end{pmatrix},$$

$$T_1(t)\xi_0 = T_1(t)x_0 = -B^*\Phi^*(0, t)W^{-1}(0, t_1)x_0 = \frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2},$$

$$T_2(t)\xi_1 = T_2(t)x_1 = 0, \quad M_1(t) = -B^*\Phi^*(0, t)W^{-1}(0, t_1)\Phi(0, t_1) = \begin{pmatrix} \frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2} & -\frac{6}{t_1^2} + \frac{2}{t_1} \end{pmatrix},$$

$$E_1(t)\xi_0 = E_1(t)x_0 = \Phi(t, 0)W(t, t_1)W^{-1}(0, t_1) = \begin{pmatrix} \frac{t_1^3+2t^3-3t_1t^2}{t_1^3} \\ \frac{6t^2-6tt_1}{t_1^3} \end{pmatrix}, \quad E_2(t)\xi_1 = E_2(t)x_1 = 0,$$

$$M_2(t) = -\Phi(t, 0)W(t, t_1)W^{-1}(0, t_1)\Phi(0, t_1) = \begin{pmatrix} \frac{2t^3-3t^2t_1}{t_1^3} & \frac{-t^3+t_1t^2}{t_1^2} \\ \frac{6t^2-6tt_1}{t_1^3} & \frac{-3t^2+2tt_1}{t_1^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$w_1(t) = v(t) + \left(\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}\right)z_1(t_1, v) + \left(\frac{-6t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1}\right)z_2(t_1, v),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad y_1(t) = z_1(t, v) + \frac{t_1^3 + 2t^3 - 3t_1t^2}{t_1^3} + \left(\frac{2t^3 - 3t^2t_1}{t_1^3}\right)z_1(t, v) +$$

$$+\left(\frac{-t^3 + t_1t^2}{t_1^2}\right)z_2(t_1, v), \quad y_2(t) = z_2(t, v) + \frac{6t^2 - 6tt_1}{t_1^3} + \left(\frac{6t^2 - 6tt_1}{t_1^3}\right)z_1(t_1, v) +$$

$$+\left(\frac{-3t^2 + 2tt_1}{t_1^2}\right)z_2(t_1, v).$$

Задача оптимального управления (35)-(37) имеет вид

$$J_1(\theta) = \int_0^{t_1} F_1(q(t), t) dt = \int_0^{t_1} |w_1(t) - u(t)|^2 dt = \int_0^{t_1} |v(t) + (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}) + (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2})z_1(t_1, v) + (\frac{-6t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1})z_2(t_1, v) - u(t)|^2 dt \rightarrow \inf \quad (47)$$

$$\dot{z} = Az + Bv(t), \quad z(0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^1), u(t) \in U, \quad (48)$$

где $\theta = (u, v)$, $q = (u, v, z(t, v), z(t_1, v))$.

Градиент функционала. Частные производные

$$\frac{\partial F_1(q, t)}{\partial u} = -2(w_1, -u), \quad \frac{\partial F_1(q, t)}{\partial v} = 2(w_1, -u), \quad \frac{\partial F_1(q, t)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1(q, t)}{\partial z_1(t_1)} = 2(w_1 - u)(\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}), \quad \frac{\partial F_1(q, t)}{\partial z_2(t_1)} = 2(w_1 - u)(\frac{-6t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1}), \quad t \in I.$$

Градиент функционала $J'_1(\theta) = (J'_{1u}(\theta), J'_{1v}(\theta)) \in H$, где

$$J'_{1u}(\theta) = \frac{\partial F_1(q(t), t)}{\partial u}, \quad J'_{1v}(\theta) = \frac{\partial F_1(q(t), t)}{\partial v} - B^*\psi(t),$$

где $z(t, v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (47), а функция $\psi(t)$ решение сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A^*\psi, \quad \psi(t_1) = - \int_0^{t_1} \frac{\partial F_1(q(t), t)}{\partial z(t_1)} dt = \begin{pmatrix} \psi_1(t_1) \\ \psi_2(t_1) \end{pmatrix} \\ \psi_1(t_1) &= - \int_0^{t_1} \frac{dF_1(q(t), t)}{dz_1(t_1)} dt, \quad \psi_2(t_1) = - \int_0^{t_1} \frac{dF_1(q(t), t)}{dz_2(t_1)} dt. \end{aligned} \quad (49)$$

Минимизирующие последовательности

$$u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_{1u}(\theta_n)], \quad v_{n+1} = v_n - \alpha_n J'_{1v}(\theta_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (50)$$

где $\theta_n = (u_n, v_n) \in X$, $\alpha_n \leq \frac{2}{l_1 + 2\epsilon}$, $\epsilon > 0$, l_1 – постоянная Липшица (см. (40), $l_1 = k$)

Построение решения задачи оптимального быстрого действия. Заметим, что матрица

$$W(0, t_1) = \begin{pmatrix} t_1^3/3 & -t_1^2/2 \\ -t_1^2/2 & t_1 \end{pmatrix} > 0$$

для любого $t_1 > 0$. Определим $t_{1*} > t_0$ по алгоритму

В. Выберем значение $t_1 = 8$. Строим допустимые управления путем построения минимизирующих последовательностей (50) с учетом (49).

а). Для данного примера при $t_1 = 8$ оптимальное решение задачи (47), (48) следующее:

$$u_*(t) = v_*(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 17/8, \\ +1 & 17/8 \leq t < 49/8, \\ -1 & 49/8 \leq t \leq 8, \end{cases} \quad w_1(t) = v_*(t), \quad t \in [0, 8].$$

Значение $J_1(\theta_*) = 0$, $\theta_* = (u_*(t), v_*(t))$, $t \in I = [0, 8]$.

б). Выберем $t_1 = 8/2 = 4$. Для значений $t_1 = 4$, оптимальным решением задачи (47), (48) будет

$$u_{**}(t) = v_{**}(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 5/4, \\ +1 & 5/4 \leq t < 13/4, \\ -1 & 13/4 \leq t \leq 4, \end{cases} \quad w_1(t) = v_{**}(t), \quad t \in [0, 4].$$

Значение $J_1(\theta_{**}) = 0$, $\theta_{**} = (u_{**}(t), v_{**}(t))$, $t \in I[0, 4]$.

в). Выберем $t_1 = 4/2 = 2$. Для значения $t_1 = 2$. Оптимальным решением задачи (47), (48) является:

$$u_{***}(t) = v_{***}(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 1, \\ +1 & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad w_1(t) = v_{***}(t), \quad t \in [0, 2].$$

Значение $J_1(\theta_{***}) = 0$, $\theta_{***} = (u_{***}(t), v_{***}(t))$, $t \in I = [0, 2]$.

Оптимальная траектория для задачи (44)-(47):

$$x_{1*}(t) = y_{1*}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad x_{2*}(t) = y_{2*}(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t < 1, \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Эти результаты совпадают с результатами, полученными с помощью принципа максимума Л.Е. Понтрягина [3], для значений $n = 2$. В отличие от принципа максимума данный метод позволяет решать задачи оптимального быстрогодействия для системы любого порядка $n \geq 2$.

4 Результаты и обсуждение

Основными результатами являются:

- необходимое и достаточное условия существования решения одного класса интегрального уравнения и построение его общего решения;
- выделение всех множеств управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в любое желаемое конечное состояние для линейных систем;
- предлагаемый принцип погружения позволяющий свести исходную краевую задачу оптимального быстрогодействия с ограничениями к специальной начальной задаче оптимального управления;

– необходимое и достаточное условия существования допустимого управления;
– разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия с ограничениями для линейных систем любого порядка.

Полученные результаты являются решениями актуальных проблем теории оптимального быстродействия с ограничениями имеющие многочисленные приложения.

5 Заключение

Разработан новый метод решения задачи оптимального быстродействия линейных систем с краевыми условиями, при наличии фазовых, интегральных ограничений и голономных связей. Создана общая теория краевых задач оптимального быстродействия имеющая многочисленные приложения в естественных науках, технике, экономике.

Принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов состоит в том, что исходная задача погружается в задачу управляемости с управлениями из функциональных пространств с последующим сведением к начальной задаче оптимального управления.

Список литературы

- [1] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1985. – 480 с.
- [2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.
- [3] Понтрягин Л.С., Болтанский В.Г., Гамирелидзе Т.В., Мищенко Е. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1965. – 384 с.
- [4] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
- [5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
- [6] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1968. – 310 с.
- [7] Айсагалиев С.А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальное уравнение. – 1991. – Том 27, № 9. – С. 1037-1047.
- [8] Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Том 29, № 4. – С. 471-482.
- [9] Айсагалиев С.А., Белогуров А.П. Управляемость и быстродействие процессом, описываемого параболического уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. – Том 53, № 1. – С. 13-28.
- [10] Айсагалиев С.А. Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Том 30, № 5. – С. 748-757.
- [11] Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Том 48, № 6. – С. 826-836.
- [12] Айсагалиев С.А. Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений. – Қазақ университеті: Алматы, 2016. – 397 с.
- [13] Айсагалиев С.А. Лекции по оптимальному управлению. – Қазақ университеті: Алматы, 2007. – 278 с.
- [14] Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Севрюгин И.В. Управление тепловыми процессами // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2012. – № 1(72). – С. 14-26.
- [15] Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с ограничениями // Математический журнал. – 2013. – Т. 13, № 2(48). – С. 5-30.

- [16] Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого обыкновенными дифференциальными уравнениями с ограничениями // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2013. – Т. 14, № 3(78). – С. 3-20.
- [17] Айсагалиев С.А., Шангитова М.Е. К математической теории управляемых процессов // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2013. – № 2 (77). – С. 21-36.
- [18] Айсагалиев С.А. К решению Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2013. – № 1 (76). – С. 4-21.
- [19] Айсагалиев С.А., Аязбаева А.М. К построению оптимального фильтра для случайных процессов // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2012. – № 3(74). – С. 4-21.
- [20] Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 555-567.
- [21] Айсагалиев С. А. Управляемость и оптимальное управление в нелинейных системах. Журнал вычислительной техники и систем // Sciences International. – 1994. – № 32(5). – С. 73-80.
- [22] Айсагалиев С. А., Айсагалиева С. С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 471-482.
- [23] Айсагалиев С. А., Белогуров А. П. Управляемость и скорость процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 13-28.
- [24] Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.
- [25] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 480 с.

References

- [1] Ioffe A.D., Tihomirov V.M., *Teoriya ekstremal'nykh zadach* [Theory of extreme problems] (M.: Nauka, 1985): 480.
- [2] Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V., *Optimalnoe upravlenie* [Optimal control] (M.: Nauka, 1979): 430.
- [3] Pontryagin L.S., Boltanskiy V.G., Gamirelidze T.V., Mischenko E., *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1965): 384.
- [4] Krasnov M.L., *Integralnoe uravneniya* [Integral equation] (M.: Nauka, 1975): 303.
- [5] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of function and functional analysis] (M.: Nauka, 1989): 623.
- [6] Tihonov A.N., Arsenin V.Ya., *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of solving incorrect problems] (M.: Nauka, 1968): 310.
- [7] Aisagaliev S.A., "Upravlyaemost nekotorykh sistem differentsialnykh uravneniy [Controllability of some systems of differential equations]", *Differentsialnoe uravnenie* Vol. 27, No 9 (1991): 1037-1047.
- [8] Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S., "Konstruktivnyy metod resheniya zadachi upravlyaemosti dlya obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Constructive method for solving the controllability problem for ordinary differential equations]", *Differentsialnye uravneniya* Vol. 29, No 4 (1993): 471-482.
- [9] Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., "Upravlyaemost i bystrodeystvie protsessom, opisyvayemogo parabolicheskogo uravneniem s ogranichenным upravleniem [Controllability and speed of the process described parabolic equation with limited control]", *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* Vol. 53, No 1 (2012): 13-28.
- [10] Aisagaliev S.A., "Optimalnoe upravlenie lineynymi sistemami s zakreplennymi kontsami traektorii i ogranichenным upravleniem [Optimal control of linear systems with fixed trajectory ends and limited control]", *Differentsialnye uravneniya* Vol. 30, No 5 (1994): 748-757.
- [11] Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A., "Optimalnoe upravlenie lineynymi sistemami s lineynym kriteriem kachestva i ogranicheniyami [Optimal control of linear systems with linear quality criterion and constraints]", *Differentsialnye uravneniya* Vol. 48, No 6 (2012): 826-836.

- [12] Aisagaliev S.A., *Problemy kachestvennoy teorii differentsialnykh uravneniy* [Problems of the qualitative theory of differential equations] (Qazaq universiteti: Almaty, 2016): 397.
- [13] Aisagaliev S.A. *Lektsii po optimalnomu upravleniyu* [Lectures on optimal control] (Qazaq universiteti: Almaty, 2007): 278.
- [14] Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., Sevryugin I.V., "Upravlenie teplovyimi protsessami [Management of thermal processes]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 1 (72) (2012): 14-26.
- [15] Aisagaliev S.A., Sevryugin I.V., "Upravlyaemost i bystrodeystvie protsessa, opisyivaemogo lineynoy sistemoy obyiknovennykh differentsialnykh uravneniy s ogranicheniyami [Controllability and speed of the process described by a linear system of ordinary differential equations with restrictions]", *Matematicheskii zhurnal* Vol. 13, No 2(48) (2013): 5-30.
- [16] Aisagaliev S.A., Sevryugin I.V., "Upravlyaemost i bystrodeystvie protsessa, opisyivaemogo obyiknovennyimi differentsialnyimi uravneniyami s ogranicheniyami [Controllability and speed of the process described by ordinary differential equations with restrictions]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* Vol. 14, No 3(78) (2013): 3-20.
- [17] Aisagaliev S.A., Shangitova M.E., "K matematicheskoy teorii upravlyaemykh protsessov [On the mathematical theory of controlled processes]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 2 (77) (2013): 21-36.
- [18] Aisagaliev S.A., "K resheniyu Nave-Stoksa dlya vyazkoy neshhimaemoy zhidkosti v neogranichennoy oblasti [To the Navier-Stokes solution for a viscous incompressible fluid in an unbounded region]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 1 (76) (2013): 4-21.
- [19] Aisagaliev S.A., Ayazbaeva A.M., "K postroeniyu optimalnogo filtra dlya sluchaynykh protsessov [To construct an optimal filter for random processes]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 3(74) (2012) : 4-21.
- [20] Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S., "Konstruktivnyy metod resheniya zadachi upravlyaemosti dlya obyiknovennykh differentsialnykh uravneniy [Constructive method for solving the controllability problem for ordinary differential equations]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 29, No 4 (1993) 555-567.
- [21] Aisagaliev S.A., "Upravlyaemost i optimalnoe upravlenie v nelineynykh sistemah. Zhurnal vyichislitelnoy tekhniki i sistem [Controllability and optimal control in nonlinear systems. Journal of computer science and systems]", *Sciences International* No 32(5) (1994): 73-80.
- [22] Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S., "Konstruktivnyy metod resheniya zadachi upravlyaemosti dlya obyiknovennykh differentsialnykh uravneniy [Constructive method for solving the controllability problem for ordinary differential equations]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 29, No 4 (1993): 471-482.
- [23] Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., "Upravlyaemost i skorost protsessa, opisyivaemogo parabolicheskimi uravneniyami s ogranichennyim upravleniyem [Controllability and speed of the process described by the parabolic equation with limited control. Siberian mathematical journal]", *Sibirskiy matematicheskii zhurnal* Vol. 53, No 1 (2012): 13-28.
- [24] Zubov V.I., *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on control theory] (M.: Nauka, 1975): 495.
- [25] Gabasov R., Kiorillova F.M., *Kachestvennaya teoriya optimalnykh protsessov* [Qualitative theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1971): 480.

МРНТИ 27.29.19

¹Б.Е. Кангужин , ²А.А. Сеитова ¹профессор, E-mail: kanbalta@mail.ru²PhD докторант, E-mail: functionaliya@gmail.com

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

О ВЫРОЖДЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Аннотация. Понятие вырожденных и невырожденных краевых задач ввел В.А. Марченко. Невырожденные краевые задачи согласно классификации Биркгофа делятся на регулярные и нерегулярные граничные условия. В данной работе приведены примеры вырожденных и невырожденных краевых задач Штурма-Лиувилля с нерегулярными по Кирхгофу граничными условиями на графе-звезде. Указанные примеры обобщают результаты работ В.А. Садовниченко и его соавторов, а также работы Б.Е. Кангужина с соавторами. Для оператора Штурма-Лиувилля с симметричными коэффициентами на отрезке подобный эффект вырождения отмечен в работах М. Стоуна. В случае дифференциальных операторов высших порядков с симметричными коэффициентами на отрезке эффект вырождения указан в работе В.А. Садовниченко и Б.Е. Кангужина. Эффект, когда одна и та же краевая задача Штурма-Лиувилля, в зависимости от свойств потенциала может иметь дискретный или непрерывный спектр был ранее отмечен в монографии Б.Е. Кангужина и М.А. Садыбекова. Там же изучены базисные свойства системы собственных и присоединенных функций в пространстве квадратично-суммируемых функций нерегулярных по Биркгофу краевых задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

Ключевые слова: вырожденные краевые задачи, невырожденные краевые задачи, регулярные и нерегулярные граничные условия, краевая задача Штурма-Лиувилля, граф-звезда.

¹Б.Е. Кангужин, ²А.А. Сеитова¹Профессор, E-mail: kanbalta@mail.ru²PhD докторанты, E-mail: functionaliya@gmail.com

ал-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Геометриялық графтардағы Штурм-Лиувилль өзгеше шеттік есептері туралы

Аңдатпа. Өзгеше және өзгеше емес шеттік есептердің түсінігін В.А. Марченко енгізді. Өзгеше емес шеттік есептер Биркгоф классификациясына сәйкес регулярлы және регулярлы емес шекаралық шарттарға бөлінеді. Бұл жұмыста граф-жұлдыздағы Биркгоф шекаралық шарттары бойынша регулярлы емес өзгеше және өзгеше емес Штурм-Лиувилль шеттік есептерінің мысалдары келтірілген. Көрсетілген мысалдар В.А. Садовничий және оның бірлескен авторларының, сонымен қатар Б.Е. Кангужиннің бірлескен авторларымен жұмыстарының нәтижелерін жалпылайды. Симметриялы коэффициенттері бар Штурм-Лиувилль операторы үшін кесіндіде өзгешеленудің осындай тәрізді әсері М. Стоунның жұмыстарында атап өтілген. Симметриялы коэффициенттері бар жоғары ретті дифференциалдық операторлар жағдайында кесіндідегі өзгешелену әсері В.А. Садовничий және Б.Е. Кангужиннің жұмысында көрсетілген. Потенциалдың қасиеттеріне байланысты бірдей Штурм-Лиувилль шекаралық есептерінің дискретті немесе үзіліссіз спектрге ие болатындығы туралы Б.Е. Кангужин және М.А. Садыбеков монографиясында бұрын атап өткен. Сол жерде кесінді бойындағы Штурм-Лиувилльдің Биркгоф бойынша регулярлы емес шекаралық есептерінің меншкі және қосалқы функцияларының квадраттық қосынды функциялар жүйесінің базистік қасиеттері зерттелген.

Түйін сөздер: өзгеше шеттік есептер, өзгеше емес шеттік есептер, регулярлы және регулярлы емес шекаралық шарттар, Штурм-Лиувилль шеттік есебі, граф-жұлдызы.

¹Б.Е. Kanguzhin, ²А.А. Seitova

¹Professor, E-mail: kanbalta@mail.ru

²PhD student, E-mail: functionaliya@gmail.com

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

On degenerate Sturm-Liouville boundary value problems on geometric graphs

Abstract. The concept of degenerate and non-degenerate boundary value problems was introduced by V.A. Marchenko. Non-degenerate boundary value problems according to the classification of Birkhoff are divided into regular and irregular boundary conditions. This paper gives examples of degenerate and non-degenerate Sturm-Liouville boundary value problems with Birkhoff irregular boundary conditions on a star graph. These examples summarize the results of V.A. Sadovnichy and his co-authors, as well as the work of B.E. Kanguzhin with co-authors. For the Sturm-Liouville operator with symmetrical coefficients on an interval similar effect was observed degeneration in the works of M. Stoun. In the case of higher-order differential operators with symmetric coefficients on the interval, the degeneracy effect is indicated in V.A. Sadovnichy and B.E. Kanguzhin. The effect when the same Sturm-Liouville boundary value problem, depending on the properties of the potential, can have a discrete or continuous spectrum was previously noted in the monograph by B.E. Kanguzhin and M.A. Sadybekov. The basic properties of the system of eigenfunctions and associated functions in the space of quadratically summable functions of Birkhoff irregular boundary value Sturm-Liouville boundary value problems on a finite interval were also studied there.

Key words: degenerate boundary value problems, non-degenerate boundary value problems, regular and irregular boundary conditions, Sturm-Liouville boundary value problem, star graph.

1 Введение

Следующая система дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами

$$\begin{aligned} -U''_{p+1}(x_{p+1}) + q_{p+1}(x_{p+1})U_{p+1}(x_{p+1}) &= \lambda U_{p+1}(x_{p+1}), \quad 0 < x_{p+1} < l_{p+1}, \\ -U''_p(x_p) + q_p(x_p)U_p(x_m) &= \lambda U_p(x_p), \quad 0 < x_p < l_p, \\ \dots \\ -U''_1(x_1) + q_1(x_1)U_1(x_1) &= \lambda U_1(x_1), \quad 0 < x_1 < l_1. \end{aligned} \tag{1}$$

с условиями вида (а)

$$\begin{aligned} U_{p+1}(1) &= U_1(0) = \dots = U_p(0), \\ U'_{p+1}(1) &= U'_1(0) + \dots + U'_p(0) \end{aligned} \tag{2}$$

и условиями вида (b)

$$\begin{aligned} W_s(U_1, \dots, U_{p+1}) &= \sum_{j=1}^2 [a_{sj}U_1^{(j-1)}(1) + a_{s(2+j)}U_2^{(j-1)}(1) + \dots + a_{s(2p-2-j)}U_p^{(j-1)}(1) \\ &+ a_{s(2p+j)}U_{p+1}^{(j-1)}(0)] = 0, \quad s = 1, \dots, p+1 \end{aligned} \tag{3}$$

может быть интерпретирована как задача на собственные значения оператора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе \mathfrak{G} . Причем, в качестве геометрического графа $\mathfrak{G} = \{V, E\}$ выступает граф-звезда. Множество V представляет множество вершин, занумерованных от 0 до $p+1$. Вершина $(p+1)$ называется внутренней вершиной

графа. Условия вида (а) означают, что во внутренней вершине выполняются законы Кирхгофа [1]. Вершины $0, 1, \dots, p$ называются граничными вершинами. Условия вида (b) интерпретируются как граничные условия. Для полноты изложения приведем матрицу смежности [2] графа-звезды $\mathfrak{S} = \{V, E\}$. Размерность матрицы смежности $(p+2) \times (p+2)$ и она имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество E означает множество ориентированных дуг e_1, \dots, e_{p+1} графа \mathfrak{S} . При $i = 1, \dots, p$ дуга e_i направлена от вершины $(p+1)$ к вершине i . В то же время направление дуги e_{p+1} выбрано от вершины 0 к вершине $(p+1)$. Длина дуги e_i считается равной l_i .

При $p = 1$ задача (1), (2), (3) совпадает с задачей Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Подобные задачи подробно изучены в монографиях [3], [4]. Согласно результатам указанных в монографиях [3], [4] в случае достаточно гладких коэффициентов дифференциальных уравнений (1) при $p = 1$ возможны только следующие две возможности:

- 1) либо существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих конечных предельных точек;
- 2) либо каждое комплексное число является собственным значением.

Больше того, первый случай разбивается на два альтернативных случая:

- собственные значения вообще отсутствуют (к примеру, задача Коши);
- собственных значений счетное число с единственной предельной точкой на бесконечности (к примеру, задача Дирихле).

Показано, что при $p = 1$ нет таких задач на собственные значения, у которых есть собственные значения, но их только конечное число.

Случай $p > 1$ мало изучен. В работе [5] при $p = 2$ выделены так называемые невырожденные краевые задачи на собственные значения. В работе [6] при $p = 2$ изучены возможные случаи, когда появляются вырожденные краевые условия. В частности, показано, что вырожденные краевые задачи невозможны, когда нет одинаковых по длине дуг [6]. При $p = 1$ вырожденные краевые задачи для дифференциальных уравнений порядка выше два исследовались в работах [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Вопросы сходимости спектральных разложений вырожденных краевых задач Штурма-Лиувилля можно найти в монографии [14].

В данной статье исследуется задача (1), (2), (3) при $p > 1$ на предмет существования вырожденных задач. Приводятся конкретные примеры, иллюстрирующие те или иные возможные распределения собственных значений краевых задач (1), (2), (3).

2 Пример, когда спектр краевой задачи (1), (2), (3) при произвольном $p > 1$ заполняет всю комплексную плоскость

Пусть p – фиксированное натуральное число, не равное единице. Пусть функции $q_j \in L_2[0, l_j]$ при $j = 1, 2, \dots, p+1$, где l_j – длина дуги $e_j \in E$. Предположим, что существует дуга $e_s \in E$, $1 \leq s \leq p$ такая, что

- 1) $l_s = l_{p+1}$;
- 2) $q_s(l_s - x) = q_{p+1}(x)$ в $L_2(0, l_{p+1})$.

В таком случае справедливо утверждение.

Теорема 1 *Предположим, что условия (3) заменены на следующие граничные условия*

$$\begin{cases} U_{p+1}(0) + U_s(1) = \sum_{\substack{i \neq s \\ 1 \leq i \leq p}} (\alpha_i U_i(1) + \beta_i U'_i(1)) \\ U'_{p+1}(0) - U'_s(1) = \sum_{\substack{i \neq s \\ 1 \leq i \leq p}} (\gamma_i U_i(1) + \varepsilon_i U'_i(1)) \\ \sum_{\substack{i \neq s \\ 1 \leq i \leq p}} (a_{ij} U_i(1) + b_{ij} U'_i(1)) = 0, \quad j = 1, \dots, p-1 \end{cases} \quad (4)$$

при произвольных числах $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i, a_{ij}, b_{ij}$. Тогда произвольное комплексное число λ является собственным значением задачи (1), (2), (4).

Доказательство. Фиксируем произвольное комплексное число λ . Покажем, что однородная задача (1), (2), (4) имеет нетривиальное решение. Нетривиальным решением указанной задачи является следующий набор функций.

Пусть на всех дугах $e_j \in E$, кроме e_s и e_{p+1} , функций $U_i(x, \lambda) \equiv 0$. Теперь выберем $U_s(x, \lambda)$ и $U_{p+1}(x, \lambda)$ на дугах e_s и e_{p+1} соответственно. Из системы (1) вытекает, что

$$\begin{cases} -U''_{p+1}(x, \lambda) + q_{p+1}(x)U_{p+1}(x, \lambda) = \lambda U_{p+1}(x, \lambda), & 0 < x < l_{p+1}, \\ -U''_s(x, \lambda) + q_s(x)U_s(x, \lambda) = \lambda U_s(x, \lambda), & 0 < x < l_{p+1}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь учтено, что $l_s = l_{p+1}$.

В то же время условия (2) примут вид

$$\begin{cases} U_{p+1}(1, \lambda) = 0, & U_s(0, \lambda) = 0, \\ U'_{p+1}(1, \lambda) = U'_s(0, \lambda). \end{cases} \quad (6)$$

Введем функцию-потенциал по формуле

$$q(x) = \begin{cases} q_{p+1}(x) & \text{при } 0 \leq x \leq l_{p+1}, \\ q_s(x - l_{p+1}) & \text{при } l_{p+1} \leq x \leq 2l_{p+1} \end{cases}$$

и рассмотрим дифференциальное уравнение на интервале

$$-V''(x, \lambda) + q(x)V(x, \lambda) = \lambda V(x, \lambda), \quad 0 < x < 2l_{p+1}. \quad (7)$$

К уравнению (7) добавим условия Коши в точке $x = l_{p+1}$.

$$V(l_{p+1}, \lambda) = 0, \quad V'(l_{p+1}, \lambda) = 1. \quad (8)$$

Потенциал $q(x)$ является симметричной функцией относительно точки $x = l_{p+1}$. Действительно, при $0 < x < l_{p+1}$ верно равенство $q(x) = q_{p+1}(x)$, а при $q(2l_{p+1} - x) =$

$q_s(l_{p+1} - x)$. По условию теоремы 1 вытекает $q(x) = q(2l_{p+1} - x)$ в $L_2(0, 2l_{p+1})$. Если $q(x)$ симметрично относительно $x = l_{p+1}$, то решение задачи (7)-(8) антисимметрично относительно $x = l_{p+1}$, то есть

$$V(x, \lambda) = -V(2l_{p+1} - x, \lambda), \quad 0 < x < 2l_{p+1}. \quad (9)$$

Ясно, что $V(x, \lambda)$ не может быть тривиальной на $[0, 2l_{p+1}]$ функцией. Положим

$$U_{p+1}(x, \lambda) = V(x, \lambda), \quad \text{при } 0 < x < l_{p+1},$$

$$U_s(x, \lambda) = -V(2l_{p+1} - x, \lambda), \quad \text{при } l_{p+1} < x < 2l_{p+1}.$$

Таким образом, определенные функции $U_{p+1}(x, \lambda)$ и $U_s(x, \lambda)$ представляют нетривиальные решения задачи (5), (6). С другой стороны, выполнение граничных условий (4) не вызывает сомнений, в силу свойства симметрии функции $V(x, \lambda)$ на $[0, 2l_{p+1}]$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1 Теорема 1 остается в силе, если существует несколько дуг e_s со свойствами 1) и 2).

В следующем пункте указан пример краевой задачи (1), (2), (4), когда нарушение на дуге e_s условие 2) приводит к дискретности спектра.

3 Пример невырожденной с нерегулярными по Биркгофу краевыми условиями задачи (1), (2), (3)

Напомним, что регулярность по Биркгофу граничных условий обычно не зависит от коэффициентов дифференциальной системы (1). То есть, если набор условий (3) регулярен по Биркгофу при одном наборе коэффициентов системы (1), то он остается регулярным и при всех других коэффициентах. В настоящем пункте покажем, что пример, приведенный в предыдущем пункте, соответствует невырожденной краевой задаче. То есть при некотором выборе коэффициентов системы $q_i(x_i), i = 1, 2, \dots, p + 1$ спектр задачи (1), (2), (4) дискретен. Отсюда следует, что спектральные свойства краевой задачи (1), (2), (4) сильно меняются при переходе от одних коэффициентов системы (1) к другим. Как известно, краевые задачи с регулярными по Биркгофу граничными условиями обладают устойчивыми спектральными свойствами. Следовательно, краевая задача (1), (2), (4) представляет пример невырожденной (дискретность спектра) с нерегулярными по Биркгофу граничными условиями задачи на собственные значения. Пусть p - фиксированное натуральное число. Предполагаем, что $q_j \in L_2[0, l_j]$ при $j = 1, 2, \dots, p + 1$, где l_j - длина дуги $e_j \in E$. Предположим, что существует дуга $e_s \in E$ такая, что

- 1) $l_s = l_{p+1}, \quad s \leq p$;
- 2) $q_{p+1}(x) \equiv 0, \quad q_s(x) \equiv a$ для всех $x \in L_2(0, l_{p+1})$.

Здесь и далее a - фиксированное число. Предположим, что условия (3) заменены на следующие граничные условия:

$$\begin{cases} U_{p+1}(0) + U_s(l_s) = 0, & U'_{p+1}(0) - U'_s(l_s) = 0, \\ U_j(l_j) = 0, & j \neq s, \quad 1 \leq j \leq p. \end{cases} \quad (10)$$

Теорема 2 Краевая задача (1), (2), (10) имеет дискретный спектр при $q_j \equiv 0, j \neq s$.

Доказательство. Выпишем характеристический определитель краевой задачи (1), (2), (10). При $j \neq s$ и $j \neq p+1$ решения $U_j(x, \lambda)$ ищем в виде

$$U_j(x, \lambda) = A \frac{\sin \sqrt{\lambda}(l_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda}l_j}.$$

Если $j = s$, то решение $U_s(x, \lambda)$ ищем в виде

$$U_s(x, \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda - a}x_s + B_s \frac{\sin \sqrt{\lambda - a}x_s}{\sqrt{\lambda - a}}.$$

Если $j = p+1$, то решение $U_{p+1}(x, \lambda)$ ищем в виде

$$U_{p+1}(x, \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda}(l_{p+1} - x_{p+1}) - B_{p+1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(l_{p+1} - x_{p+1})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Причем

$$B_{p+1} = B_s - A\sqrt{\lambda} \sum_{\substack{i \neq s \\ 1 \leq i \leq p}} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}l_j.$$

Теперь из первых двух условий (10) получим систему двух уравнений относительно A и B_s .

$$\begin{aligned} & \left(\cos \sqrt{\lambda}l_{p+1} + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}l_{p+1} \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}l_j \right) A - \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\lambda}l_{p+1}}{\sqrt{\lambda}} B_s + \\ & + A \cos \sqrt{\lambda - a}l_s + B_s \frac{\sin \sqrt{\lambda - a}l_s}{\sqrt{\lambda - a}} = 0, \\ & A \left(\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}l_j) \right) + B_s \cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) + \\ & + A\sqrt{\lambda - a} \sin(\sqrt{\lambda - a}l_s) - B_s \cos(\sqrt{\lambda - a}l_s) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) + \cos(\sqrt{\lambda - a}l_s) + \sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}l_j), \\ a_{12} &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda - a}l_s)}{\sqrt{\lambda - a}} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1})}{\sqrt{\lambda}}, \\ a_{21} &= \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) + \sqrt{\lambda - a} \sin \sqrt{\lambda - a}l_s - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}l_j), \\ a_{22} &= \cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) - \cos(\sqrt{\lambda - a}l_s). \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Заметим, что краевая задача (1), (2), (10) частный случай задачи (1), (2), (4). Следовательно, при $a = 0$ и $l_s = l_{p+1}$ спектр этой задачи заполняет всю комплексную плоскость. Тем самым получаем, что краевая задача (1), (2), (10) не является краевой задачей с регулярными по Биркгофу граничными условиями. Другие примеры вырожденных, невырожденных краевых задач можно найти в работе [5].

Список литературы

- [1] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУН и П.Т., 2010. – 181 с.
- [2] Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 382 с.
- [3] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения // Киев: Наукова думка. – 1977. – С. 33-50.
- [4] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы // М: Наука. – 1969. – С. 26-47.
- [5] Кангужин Б.Е., Жапсарбаева Л.К., Сеитова А.А. Асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования с регулярными по Кирхгофу граничными условиями на графе-звезде // Математический журнал. – Том 18, № 2 (68). – 2018.
- [6] Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 514-523.
- [7] Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 310-313.
- [8] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 427.
- [9] Дезин А.А. Спектральные характеристики общих граничных задач для оператора D^2 // Мат. Заметки. – 1985. – Т. 37, № 2. – С. 249-256.
- [10] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 . I. Spectral properties // J. of Math. Anal. and Appl. – 1989. – V. 141. – P. 538-558.
- [11] Бияров Б.Н., Джумабаев С.А. Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля // Мат. заметки. – 1994. – Т. 56, № 1. – С. 143-146.
- [12] Джумабаев С.А., Кангужин Б.Е. Об одной не регулярной задаче на конечном отрезке // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1988. – №1. – С. 14-18.
- [13] Макин А.С. Об обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1408-1411.
- [14] Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. – Шымкент: Галым, 1996. – 270 с.

References

- [1] Afanaseva N.A., Bulot L.P., "Elektrotehnika i elektronika [Electrical Engineering and Electronics]", *SPb.: SPbGUN i P.T. Uchebnoe posobie* (2010): 181.
- [2] Emelichev V.A. i dr., "Lektsii po teorii grafov [Lectures on graph theory]", *M.: Nauka* (1990): 382.
- [3] Marchenko V.A., "Operatoryi Shturma-Liuvillya i ih prilozheniya [Sturm-Liouville operators and their applications]", *Kiev: Naukova dumka* (1977): 33-50.
- [4] Naymark M.A., "Lineynye differentsialnyie operatoryi [Linear Differential Operators]", *M: Nauka* (1969): 26-47.

-
- [5] Kanguzhin B.E., Zhapsarbaeva L.K., Seitova A.A., "Assimptotika sobstvennykh znacheniy operatora dvukratnogo differentsirovaniya s regulyarnymi po Kirghofu granichnyimi usloviyami na grafe-zvezde [Asymptotics of the eigenvalues of two-fold differentiation operator with Kirchhoff regular boundary conditions on a star graph]", *Matematicheskii zhurnal* Vol. 18, No 2 (68) (2018).
- [6] Sadovnichiy V.A., Sultanaev Ya.T., Ahtyamov A.M., "Vyirozhdennyye kraevyye usloviya dlya zadachi Shturma-Liuvillya na geometricheskom grafe [Degenerate boundary conditions for the Sturm-Liouville problem on a geometric graph]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 55, No 4 (2019): 514-523.
- [7] Sadovnichiy V.A., Kanguzhin B.E., "O svyazi mezhdu spektrom differentsialnogo operatora s simmetricheskimi koefitsientami i kraevymi usloviyami [On the connection between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions]", *Dokl. AN SSSR* Vol. 267, No 2 (1982): 310-313.
- [8] Ahtyamov A.M., "Vyirozhdennyye kraevyye usloviya dlya differentsialnogo uravneniya tret'ego poryadka [Degenerate boundary conditions for a third-order differential equation]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 54, No 4 (2018): 427.
- [9] Dezin A.A., "Spektralnyie harakteristiki obshchih granichnykh zadach dlya operatora D^2 [Spectral characteristics of general boundary value problems for the operator D^2]", *Mat. Zametki*. Vol. 37, No 2 (1985): 249-256.
- [10] Lang P., Locker J., "Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 . I. Spectral properties", *J. of Math. Anal. and Appl.* Vol. 141 (1989): 538-558.
- [11] Biyarov B.N., Dzhumabaev S.A., "Kriteriy volterrovosti kraevykh zadach dlya uravneniya Shturma-Liuvillya [Volterra criterion for boundary value problems for the Sturm-Liouville equation]", *Mat.zametki* Vol. 56, No 1 (1994): 143-146.
- [12] Dzhumabaev S.A., Kanguzhin B.E., "Ob odnoy ne regulyarnoy zadache na konechnom otrezke [On a non-regular problem on a finite interval]", *Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. nauk.* No 1 (1988): 14-18.
- [13] Makin A.S., "Ob obratnoy zadache dlya operatora Shturma-Liuvillya s vyirozhdennymi kraevymi usloviyami [On the inverse problem for the Sturm-Liouville operator with degenerate boundary conditions]", *Differents. uravneniya* Vol. 50, No 10 (2014): 1408-1411.
- [14] Kanguzhin B.E., Sadybekov M.A., "Differentsialnyie operatory na otrezke. Raspredelenie sobstvennykh znacheniy [Differential operators on a segment. Distribution of eigenvalues]", *Shymkent: Galym* (1996): 270.

¹Х. Хомпыш , ²А. Шакир¹к.ф.-м.н., доцент, E-mail: konat_k@mail.ru²магистрант, E-mail: ajdossakir@gmail.com

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной статье исследована обратная задача определения решения и неизвестной правой части, зависящей только от пространственным переменным для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка. В обратных задачах вместе с начальными и граничными условиями задается также дополнительная информация, необходимость которой обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или правой части уравнения. В работе в качестве дополнительной информации рассматривается интегральное условие переопределения. Обратные задачи определения правой части дифференциального уравнения возникают при математическом моделировании некоторых физических процессов в том случае, когда помимо решения уравнения требуется восстановить действие внешних источников. На сегодняшний день исследования прямых и обратных задач для псевдопараболических уравнений бурно развиваются в связи с потребностями моделирования и управления процессами в теплофизике, гидродинамике и механике сплошной среды. Подобные псевдопараболические уравнения рассматриваемые в данной работе возникают при описании процессов тепломассопереноса, процессов движение неньютоновских жидкостей, волновых процессов и во многих других областях. С помощью разложения в ряды доказаны теоремы существования и единственности классических решений данной задачи. Результатом данной работы является решение, представленное в виде ряда, что позволяет производить необходимые численные расчеты с заданной точностью.

Ключевые слова: Обратная задача, псевдопараболические уравнения, теорема существования и единственности решения, классическое решение.

¹Х. Хомпыш, ²А. Шәкір¹ф.-м.ғ.к., доцент, E-mail: konat_k@mail.ru²магистрант, E-mail: ajdossakir@gmail.com

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Псевдо-параболалық теңдеу үшін оң жағын анықтау кері есебі

Бұл мақалада үшінші ретті сызықты псевдопараболалық теңдеу үшін шешімін және кеңістіктік айнымалыдан тәуелді оң жағын анықтау кері есебі қарастырылады. Кері есептерде бастапқы және шекаралық шарттармен қоса, белгісіз коэффициенттер немесе оң жағына байланысты қосымша ақпараттар беріледі. Аталмыш жұмыста қосымша ақпарат ретінде интегралдық қосымша шарт қарастырылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жағын анықтау кері есептері кейбір физикалық құбылыстардың, нақтырақ айтқанда теңдеу шешімінің сыртқы жылу көздерін қалпына келтірудің математикалық моделін жасағанда туындайды. Қазіргі таңда жылу физикасы, гидродинамика, тұтас орта механикасы құбылыстарын басқару және моделдеуге байланысты псевдопараболалық теңдеулер үшін кері және тура есептерді зерттеу қарқынды даму үстінде. Бұл жұмыста қарастырылатын псевдопараболалық теңдеулерге ұқсас теңдеулер жылу және жылу алмасу, ньютондық емес сұйықтардың қозғалысын, толқын және басқа да құбылыстарды сипаттауда қолданылады. Қатарға жіктеу әдісі көмегімен, берілген есептің классикалық шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденді. Қарастырылып отырған жұмыстың қатар түріндегі шешімі кейбір сандық есептеулердің нақты мәндерін алуға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: Кері есеп, псевдопараболалық теңдеу, шешімнің бар болуы және жалғыздығы туралы теорема, классикалық шешім.

¹Kh. Khompysh, ²A. Shakir

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, E-mail: konat_k@mail.ru

²Master Student, E-mail: ajdossakir@gmail.com

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

The inverse problem for determining the right part of the pseudo-parabolic equation

In this paper the inverse problem of determining a solution and an unknown right-hand side that depends only on spatial variable for the linear pseudo-parabolic equation of the third order is investigated. In inverse problems, together with the initial and boundary conditions also consider an additional information, the need for which is due to the presence of unknown coefficients or the right side of the equation. In this paper, as additional information the integral overdetermination condition is considered. Inverse problems of determining the right-hand side of a differential equation arise in the mathematical modeling of some physical processes in the case when, in addition to solving the equation, it is necessary to restore the action of external sources. Today, studies of direct and inverse problems for pseudo-parabolic equations are rapidly developing due to the needs of modeling and process control in thermophysics, hydrodynamics and continuum mechanics. Similar pseudo-parabolic equations to considered in this paper arise in the description of heat and mass transfer processes, processes of motion of non-Newtonian fluids, wave processes, and in many other areas. Using series expansion, the existence and uniqueness theorems of classical solutions to this problem are proved. The result of this work is a solution presented in the series form, which allows the necessary numerical calculations to be performed with a given accuracy.

Key words: Inverse problem, pseudoparabolic equations, theorems of the existence and uniqueness of the solution, classical solution.

1 Введение

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. В обратных задачах вместе с начальными и граничными условиями, характерными для той или иной прямой задачи, задается дополнительная информация, необходимость которой обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или правой части уравнения. Дополнительная информация, которая называется условием переопределения, может быть представлена в различных формах. Например, если известно значение искомого решения в определенной момент времени, то это дополнительное условие называет финальным переопределением. Однако часто как интеграл от искомого решения. Именно такое условие переопределения рассматривается в статье.

Исследования прямых и обратных задач для псевдопараболических уравнений в различных постановках развиваются бурно в связи с потребностями моделирования процессов механики сплошной среды. Подобные псевдопараболические уравнения рассматриваемые в данной работе возникают при описании процессов движения неньютоновских жидкостей, волновых процессов и во многих других областях. Тем самым исследование таких задач является актуальным.

2 Обзор литературы

К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения. В

большинстве работ, посвященных исследованиям в этой области, изучались обратные задачи для уравнений параболического типа (См. например [1]-[9] и библиографии в них). В отличие от указанных работ нами исследуется обратная задача для псевдопараболического уравнения (уравнения типа Соболева). Обратные задачи для псевдопараболических уравнений исследовались крайне мало, однако библиографии по этому вопросу можно найти в [10]-[14]. Физические применения подобных псевдопараболических уравнений можно найти в работах [17]-[19].

В данной работе изучены вопросы существования единственности классического решения обратной задачи определения правой части для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка с интегральным условием переопределения.

2.1 Постановка задачи

В прямоугольнике $Q_T = \{(x, t) : x \in (0, 1), t \in (0, T)\}$, $T < \infty$, рассмотрим следующую обратную задачу определения правой части $f(x)$ псевдопараболического уравнения

$$u_t - u_{xx} - u_{xxt} = f(x), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

и его решения $u(x, t)$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

нелокальным периодическим условиям

$$u(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

и интегральному условию переопределения

$$\int_0^T u(x, t) dt = \psi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции, а $u(x, t)$ и $f(x)$ искомые.

Определение 1 Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(4) назовем пару $\{u(x, t), f(x)\}$ функции $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q_T) \cap C_{x,t}^{1,0}(\bar{Q}_T)$ и $f(x) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих уравнению (1) в Q_T , условиям (2), (4) в $[0, 1]$ и условиям (3) в $[0, T]$ в обычном смысле.

Пусть для функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ выполняются условия согласования

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = \varphi'(0), \quad \psi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) \quad (5)$$

Справедлива следующая теорема о существовании решения.

Теорема 1 Пусть выполняются условия в (5) и $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0, 1]$, $\varphi''(1) = \varphi''(0)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$. Тогда обратная задача (1)-(4) имеет классическое решение $(u(x, t), f(x)) \in C_{x,t}^{2,1}(Q_T) \times C[0, 1]$.

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций

$$2(1-x), \quad \{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}. \quad (6)$$

Эта система рассмотрена в работах [15]-[16], где было показано, что она замкнута, минимальна и образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Система (6) не является ортогональной, и для нее в [16], была выписана биортогональная система функций

$$1, \quad \{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{x \sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}. \quad (7)$$

Система (7) используется нами далее для доказательства единственности решения задачи и определения коэффициентов в ряд по функциям (6). Так как система (6) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, то решение $u(x,t)$, $f(x)$ задачи (1)-(4) будем искать в виде рядов

$$u(x,t) = 2u_0(t)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} 4u_{1n}(t)(1-x)\cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} 4u_{2n}(t)\sin 2\pi nx, \quad (8)$$

$$f(x) = 2f_0(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} 4f_{1n}(1-x)\cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} 4f_{2n}\sin 2\pi nx. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (1)-(4), получим следующие задачи для нахождения функций $u_0(t)$, $u_{1n}(t)$, $u_{2n}(t)$ и постоянных f_0 , f_{1n} , f_{2n} :

$$u'_0(t) = f_0, \quad u'_{1n}(t) + \frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2} u_{1n}(t) = \frac{f_{1n}}{1+4\pi^2 n^2}, \quad (10)$$

$$u'_{2n}(t) + \frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2} u_{2n}(t) = \frac{f_{2n}}{1+4\pi^2 n^2} + \frac{4\pi n}{1+4\pi^2 n^2} u_{1n}(t) + \frac{4\pi n}{1+4\pi^2 n^2} u'_{1n}(t).$$

$$u_0(0) = \varphi_0, \quad u_{1n}(0) = \varphi_{1n}, \quad u_{2n}(0) = \varphi_{2n},$$

$$\int_0^T u_0(t)dt = \psi_0, \quad \int_0^T u_{1n}(t)dt = \psi_{1n}, \quad \int_0^T u_{2n}(t)dt = \psi_{2n}. \quad (11)$$

Общее решения обыкновенные дифференциальные уравнения в (10) соответственно

$$u_0(t) = f_0 t + C_0, \quad u_{1n}(t) = \frac{f_{1n}}{4\pi^2 n^2} + C_{1n} e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2} t}$$

$$u_{2n}(t) = \frac{f_{2n}}{4\pi^2 n^2} + \frac{f_{1n}}{4\pi^3 n^3} + C_{2n} e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2} t} + \frac{4\pi n}{(1+4\pi^2 n^2)^2} C_{1n} t e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2} t},$$

где C_0 , C_{1n} , C_{2n} , f_0 , f_{1n} , f_{2n} - произвольные постоянные. Они определяются из условия (11)

$$C_0 = \varphi_0, \quad C_{1n} = \frac{\psi_{1n} - \varphi_{1n} T}{\left[1 - e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2} T}\right] \frac{1+4\pi^2 n^2}{4\pi^2 n^2} + T},$$

$$C_{2n} = \frac{\psi_{2n} - \varphi_{2n}T - \frac{4\pi n C_{1n}}{1 + 4\pi^2 n^2} \left[\left(\frac{1 + 4\pi^2 n^2}{4\pi^2 n^2} \right)^2 \left[1 - e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1 + 4\pi^2 n^2} T} \right] - \frac{1 + 4\pi^2 n^2}{4\pi^2 n^2} T e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1 + 4\pi^2 n^2} T} \right]}{\frac{1 + 4\pi^2 n^2}{4\pi^2 n^2} \left[1 - e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1 + 4\pi^2 n^2} T} \right] + T} \quad (12)$$

$$f_0 = \frac{2(\psi_0 - \varphi_0)}{T^2}, \quad f_{1n} = 4\pi^2 n^2 \varphi_{1n} - 4\pi^2 n^2 C_{1n}, \quad (13)$$

$$f_{2n} = 4\pi^2 n^2 \varphi_{2n} - 4\pi^2 n^2 C_{2n} - 4\pi n \varphi_{1n} + 4\pi n C_{1n},$$

где $\varphi_0, \varphi_{1n}, \varphi_{2n}$ и $\psi_0, \psi_{1n}, \psi_{2n}$ — соответственно коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по системам (7):

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi(x) \cos 2\pi n x dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x) x \sin 2\pi n x dx,$$

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x) dx, \quad \psi_{1n} = \int_0^1 \psi(x) \cos 2\pi n x dx, \quad \psi_{2n} = \int_0^1 \psi(x) x \sin 2\pi n x dx.$$

Подставляя найденные коэффициенты $u_0(t), u_{1n}(t), u_{2n}(t)$ и f_0, f_{1n}, f_{2n} в (8)-(9), получим решения обратной задачи (1)-(4)

$$u(x, t) = \varphi(x) + 2 \frac{2(\psi_0 - \varphi_0 T)}{T^2} t(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} 4C_{1n} [e^{-\sigma_n t} - 1] (1-x) \cos 2\pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} 4C_{2n} [e^{-\sigma_n t} - 1] \sin 2\pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{4\pi n}{(1 + 4\pi^2 n^2)^2} C_{1n} t e^{-\sigma_n t} \sin 2\pi n x, \quad (14)$$

$$f(x) = -\varphi''(x) + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \cos 2\pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \sin 2\pi n x. \quad (15)$$

где $\sigma_n = \frac{4\pi^2 n^2}{1 + 4\pi^2 n^2} \leq 1, \quad \forall n \in N$.

Теперь исследуем полученные решения (14)-(15) и их производные входящих в уравнение (1) на сходимости. Интегрируя по частям три раза выражение для коэффициентов C_{1n} в (12) с учетом условий $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0, 1], \varphi'(0) = \varphi'(1)$ и $\psi'(0) = \psi'(1)$ получим

$$C_{1n} = \frac{\psi_{1n} - \varphi_{1n}T}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} = \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \int_0^1 [\psi(x) - T\varphi(x)] \cos 2\pi n x dx = \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{1}{8\pi^3 n^3} \left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T \right). \quad (16)$$

где $\varphi_{1n}^{(3)}$, $\psi_{1n}^{(3)}$ – коэффициенты разложения функций $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$ в ряд Фурье по системе (7) при косинусах и синусах, а $\delta_n = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1 + 4\pi^2 n^2}{4\pi^2 n^2} < 2$, $\forall n \in N$.

Аналогично, интегрируя по частям три раза выражение для C_{2n} в (12) на основании условий $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0, 1]$, $\varphi(1) = 0$, $\psi(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$ и $\psi''(0) = \psi''(1)$ имеем

$$C_{2n} = \frac{\psi_{2n} - \varphi_{2n}T - \frac{4\pi n}{1 + 4\pi^2 n^2} C_{1n} [\delta_n^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] - \delta_n T \cdot e^{-\sigma_n T}]}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} =$$

$$\frac{\left(\psi_{2n}^{(3)} - \varphi_{2n}^{(3)}T\right) + 3\left(\psi_{1n}^{(2)} - \varphi_{1n}^{(2)}T\right)}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} \cdot \frac{1}{8\pi^3 n^3} +$$

$$\frac{1}{2\pi^2 n^2 (1 + 4\pi^2 n^2)} \cdot \frac{[\delta_n^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] - \delta_n T \cdot e^{-\sigma_n T}]}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} \left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)}T\right). \quad (17)$$

где $\varphi_{2n}^{(3)}$, $\psi_{2n}^{(3)}$ – коэффициенты разложения функций $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$ в ряд Фурье по системе (6) при синусах и косинусах.

По условию теоремы, функции $\varphi'''(x)$ и $\psi'''(x)$ непрерывны на сегменте $[0, 1]$, то в силу неравенства Бесселя для тригонометрического ряда, сходятся и следующие ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_{in}^{(3)} \right|^2 \leq G \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \psi_{in}^{(3)} \right|^2 \leq G \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

Подставляя (16) и (17) в (14), (15), получим соответственно

$$u(x, t) = \varphi(x) + 2 \frac{(\psi_0 - \varphi_0)}{T^2} t(1 - x) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{1}{8\pi^3 n^3} \left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)}T\right) [e^{-\sigma_n t} - 1] (1 - x) \cos 2\pi n x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{\left(\psi_{2n}^{(3)} - \varphi_{2n}^{(3)}T\right) + 3\left(\psi_{1n}^{(2)} - \varphi_{1n}^{(2)}T\right)}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} \cdot \frac{1}{8\pi^3 n^3} [e^{-\sigma_n t} - 1] \sin 2\pi n x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{\left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{2\pi^2 n^2 (1 + 4\pi^2 n^2)} \cdot \frac{[\delta_n^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] - \delta_n T \cdot e^{-\sigma_n T}]}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} [e^{-\sigma_n t} - 1] \sin 2\pi n x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{4\pi n}{(1 + 4\pi^2 n^2)^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{\left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{8\pi^3 n^3} t e^{-\sigma_n t} \sin 2\pi n x, \quad (19)$$

$$f(x) = -\varphi''(x) + \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{1n} - \varphi_{1n}T}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} \cos 2\pi n x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{2n} - \varphi_{2n}T - \frac{4\pi n}{1 + 4\pi^2 n^2} C_{1n} [\delta_n^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] - \delta_n T e^{-\sigma_n T}]}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T}. \quad (20)$$

Ряды (19) и (20) при любом $(x, t) \in \bar{Q}$ мажорируются сходящим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \varphi_{1n}^{(3)} \right| + \left| \varphi_{2n}^{(3)} \right|}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \varphi_{1n}^{(3)} \right|}{n^6} \quad (21)$$

Следовательно ряды (14), (15) в силу теоремы Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области \bar{Q} и функции $u(x, t)$, $f(x)$ непрерывны на \bar{Q} . Теперь исследуем на сходимости рядов для их производные.

Теперь по членном дифференцируя ряда (19) один раз по переменной t и два раза по переменной x , покажем, что полученные при по членном дифференцировании ряды сходятся абсолютно и равномерно на \bar{Q} .

$$u_t(x, t) = 2 \frac{(\psi_0 - \varphi_0)}{T^2} (1 - x) + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(\psi_{2n}^{(3)} - \varphi_{2n}^{(3)} T) + 3(\psi_{1n}^{(2)} - \varphi_{1n}^{(2)} T)}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} \cdot \frac{-\sigma_n}{8\pi^3 n^3} e^{-\sigma_n t} \sin 2\pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{2\pi^2 n^2 (1 + 4\pi^2 n^2)} \cdot \frac{[\delta_n^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] - \delta_n T \cdot e^{-\sigma_n T}]}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} (-\sigma_n) e^{-\sigma_n t} \sin 2\pi n x + \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{4\pi n}{(1 + 4\pi^2 n^2)^2} \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{8\pi^3 n^3} [e^{-\sigma_n t} - \sigma_n t e^{-\sigma_n t}] \sin 2\pi n x, u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{8\pi^3 n^3} [e^{-\sigma_n t} - 1] 4\pi n \sin 2\pi n x \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{8\pi^3 n^3} [e^{-\sigma_n t} - 1] 4\pi^2 n^2 (1 - x) \cos 2\pi n x - \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(\psi_{2n}^{(3)} - \varphi_{2n}^{(3)} T) + 3(\psi_{1n}^{(2)} - \varphi_{1n}^{(2)} T)}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} \cdot \frac{1}{2\pi n} [e^{-\sigma_n t} - 1] \sin 2\pi n x - \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{2(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{(1 + 4\pi^2 n^2)} \cdot \frac{[\delta_n^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] - \delta_n T \cdot e^{-\sigma_n T}]}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} [e^{-\sigma_n t} - 1] \sin 2\pi n x - \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{4\pi n}{(1 + 4\pi^2 n^2)^2} \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{2\pi n} t e^{-\sigma_n t} \sin 2\pi n x,$$

$$u_{xxt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{8\pi^3 n^3} [e^{-\sigma_n t} - 1] (-\sigma_n) 4\pi n \sin 2\pi n x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T)}{8\pi^3 n^3} [e^{-\sigma_n t} - 1] (-\sigma_n) 4\pi^2 n^2 (1 - x) \cos 2\pi n x -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{2 \left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T \right)}{(1 + 4\pi^2 n^2)} \cdot \frac{[\delta_n^2 [1 - e^{-\sigma_n T}] - \delta_n T \cdot e^{-\sigma_n T}]}{\delta_n [1 - e^{-\sigma_n T}] + T} (-\sigma_n) e^{-\sigma_n t} \sin 2\pi n x - \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{4\pi n}{(1 + 4\pi^2 n^2)^2} \frac{1}{[1 - e^{-\sigma_n T}] \delta_n + T} \cdot \frac{\left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)} T \right)}{2\pi n} [e^{-\sigma_n t} - \sigma_n t e^{-\sigma_n t}] \sin 2\pi n x,$$

которые при любом $(x, t) \in \bar{Q}$ мажорируются рядами

$$|u_t| \leq C(T) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_{1n}^{(3)}| + |\psi_{2n}^{(3)}| + |\psi_{1n}^{(2)}|}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_{1n}^{(3)}|}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_{1n}^{(3)}|}{n^5} \right)$$

$$|u_{xx}|, |u_{xxt}| \leq C(T) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_{1n}^{(3)}| + |\psi_{2n}^{(3)}| + |\psi_{1n}^{(2)}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_{1n}^{(3)}|}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_{1n}^{(3)}|}{n^4} \right)$$

Сходимость последних рядов следуют из сходимости рядов (18) и оценки

$$\frac{1}{n} \left(|\varphi_{in}^{(k)}| + |\psi_{in}^{(k)}| \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + 2 \left(|\varphi_{in}^{(k)}|^2 + |\psi_{in}^{(k)}|^2 \right) \right), \quad i = 1, 2, k = 2, 3.$$

Тогда на основании признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно на \bar{Q} . Следовательно, законно дифференцирование ряда (14), и функции u_{xx} , u_{xxt} и u_t непрерывны в замкнутой области \bar{Q} .

Теорема 2 Пусть выполняются условия в (5) и дополнительно $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0, 1]$, $\varphi''(1) = \varphi''(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$. Тогда классическое решение обратной задачи (1)-(4) единственно.

Доказательство единственности. Предположим, что существует две разные решения $\{u_1(x, t), f_1(x)\}$ и $\{u_2(x, t), f_2(x)\}$ задачи (1)-(4). Обозначим разностей $\bar{u}(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ и $\bar{f}(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Тогда функции $\bar{u}(x, t), \bar{f}(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\bar{u}_t - \bar{u}_{xx} - \bar{u}_{xxt} = \bar{f}(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (25)$$

граничным условиям

$$\bar{u}(1, t) = 0, \quad \bar{u}_x(0, t) = \bar{u}_x(1, t), \quad t \in [0, T], \quad (26)$$

и нулевые начальные и интегральные условия

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad \int_0^T \bar{u}(x, t) dt = 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (27)$$

Используя биортогональный к (6) базис (7), вычислим

$$\bar{u}_0(t) = \int_0^1 \bar{u}(x, t) dx, \quad (28)$$

$$\bar{u}_{1n}(t) = \int_0^1 \bar{u}(x, t) \cos 2\pi n x dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$\bar{u}_{2n}(t) = \int_0^1 \bar{u}(x, t) x \sin 2\pi n x dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

$$\bar{f}_0 = \int_0^1 \bar{f}(x) dx, \quad \bar{f}_{1n} = \int_0^1 \bar{f}(x) \cos 2\pi n x dx, \quad \bar{f}_{2n} = \int_0^1 \bar{f}(x) x \sin 2\pi n x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дифференцируя формулу (25) один раз по t и учитывая уравнение (1), имеем

$$\bar{u}'_0(t) = \int_0^1 \bar{u}_t(x, t) dx = \int_0^1 \bar{u}_{xx}(x, t) dx + \int_0^1 \bar{u}_{xxt}(x, t) dx + \bar{f}_0.$$

Вычисляя последний интеграл и учитывая граничные условия (26), (27), получим, что $\bar{u}_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}'_0(t) = \bar{f}_0 \quad (31)$$

и краевым условиям

$$\bar{u}_0(0) = 0, \quad \int_0^T \bar{u}_0(t) dt = 0. \quad (32)$$

Общее решение уравнение (31) имеет вид

$$\bar{u}_0(t) = \bar{f}_0 t + K_0,$$

где C_0 произвольная постоянная. Учитывая, что это решение удовлетворяет условиям (32), находим $K_0 = 0$, $\bar{f}_0 = 0$ и следовательно $\bar{u}_0(t) \equiv 0$.

Дифференцируя (29) под знаком интеграла один раз и учитывая условия (26), (27), заключаем, что $\bar{u}_{1n}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}'_{1n}(t) + \frac{4\pi^2 n^2}{1 + 4\pi^2 n^2} \bar{u}_{1n}(t) = \frac{\bar{f}_{1n}}{1 + 4\pi^2 n^2} \quad (33)$$

и краевым условиям

$$\bar{u}_{1n}(0) = 0, \quad \int_0^T \bar{u}_{1n}(x, t) dt = 0. \quad (34)$$

Общее решение уравнения (29) имеет вид

$$\bar{u}_{1n}(t) = \frac{\bar{f}_{1n}}{4\pi^2 n^2} + C_{1n} e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2} t},$$

где C_{1n} – произвольная постоянная. Используя условия (34), получаем, что $K_{1n} = 0$, $\bar{f}_{1n} = 0$ и $\bar{u}_{1n}(t) \equiv 0$ для $n = 1, 2, \dots$.

Аналогично получаем следующую задачу для $\bar{u}_{2n}(t)$

$$\bar{u}'_{2n}(t) + \frac{4\pi^2 n^2}{1 + 4\pi^2 n^2} \bar{u}_{2n}(t) = \frac{\bar{f}_{2n}}{1 + 4\pi^2 n^2} + \frac{4\pi n}{1 + 4\pi^2 n^2} \bar{u}_{1n}(t) + \frac{4\pi n}{1 + 4\pi^2 n^2} \bar{u}'_{1n}(t) \quad (35)$$

$$\bar{u}_{2n}(0) = 0, \quad \int_0^T \bar{u}_{2n}(x, t) dt = 0. \quad (36)$$

которая также имеет тривиальное решение $\bar{u}_{2n}(t) \equiv 0$ для $n = 1, 2, \dots$.

В результате получили, что для любого фиксированного $t \in [0, T]$ функции $\bar{u}(x, t)$, $\bar{f}(x)$ ортогональны системе функций $\{1, \{\cos 2\pi n x\}_{n=1}^{\infty}, \{x \sin 2\pi n x\}_{n=1}^{\infty}\}$, которая является замкнутой и полной в $L_2(0, 1)$. Тогда $\bar{u}(x, t) \equiv 0$, $\bar{f}(x) \equiv 0$. Единственность решения задачи доказана.

3 Методы исследования

В работе исследованы современные методы решения прямых и обратных задач для уравнений в частных производных. В частности с помощью методами Фурье и априорных оценок доказаны существования и единственность классического решения исследуемой задачи.

4 Заключение

В работе исследована однозначная разрешимость одной обратной задачи определения коэффициент правой части, зависящей от пространственным переменным для линейного псевдо-параболического уравнения третьего порядка. В качестве дополнительной информации рассматривается интегральное условие переопределения. Подобные уравнения рассматриваемые в данной работе возникают при описании процессов теплопереноса, процессов движение неньютоновских жидкостей, волновых процессов и во многих других областях. С помощью Фурье доказана теорема существования классического решений данной задачи. Используя специально выбранном базису и методом априорных оценок также доказаны единственность решения. Результаты данной работы могут быть применены для решения различных обратных задач для линейных и нелинейных уравнений математической физики.

5 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант № AP05132041 "Теория и методы решения прямых и обратных задач для

уравнений Навье-Стокса и уравнений в частных производных" 2018-2020 годы)

Список литературы

- [1] *Кожанов А.И.* О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сибирский мат. журнал. - 2005. - Т. 46. - Вып. 5. - С. 1053-1071.
- [2] *Cannon, J.R.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral.Math. Soc. Ser. B - 1991. - Vol. 33. - P. 149-163.
- [3] *Камынин, В.Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Матем. заметки - 2005. - Т. 77. - Вып. 4. - С. 522-534.
- [4] *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи // Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
- [5] *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations // Utrecht: VSP, 2002.
- [6] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics // New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
- [7] *Isakov V.* Inverse problems for equations of parabolic type // Berlin: Springer-Verl., 2006.
- [8] *Kaliev I.A., Sabitova M.M.* Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures // Russian Mathematics. - 2012. - Т. 56. - №2. - С. 60-64.
- [9] *Иванцов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сибирский мат. журнал. - 1998. - Т. 39. - №3. - С. 539-550.
- [10] *Асанов А., Атаманов Э. Р.* Обратная задача для операторного псевдопараболического интегродифференциального уравнения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 38, № 4. С. 752-762.
- [11] *Аблабеков Б.С.* Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 181 с.
- [12] *Abylkairov U. U., Kh. Khompysh* An inverse problem of identifying the coefficient in Kelvin-Voight equations // Applied Mathematical Sciences - 2015. - Т. 9. - №102. - P. 5079 - 5088.
- [13] *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev type equation // J. of Inverse and Ill-posed Problems - 2004. - Vol. 33. - P. 387-395.
- [14] *Lyubanova A. Sh., Tani A.* An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration: the existence, uniqueness and regularity // Appl. Anal - 2011. - Vol. 90. - P. 1557-1568.
- [15] *Ионкин Н. И., Моисеев Е. И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, № 8. - С. 1094-1100.
- [16] *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, № 8. - С. 1094-1100.

References

- [1] *Kozhanov A.I.* "O razreshimosti obratnoi zadachi nahozhdenia koeffitsienta teploprobodnosti". Sibirski mat. zhurnal., vol. 46, no 5 (2005):1053-1071.
- [2] *Cannon, J.R.* "Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation". J. Austral.Math. Soc. Ser., vol. 33 (1991): 149-163.
- [3] *Kaminyin, B.L.* "Ob obratnoi zadache opredelenia praboi chasti v parabolicheskim urabnenii s uslobiem integralnogo pereopredelenia". Matem. zametki., vol.77, no 4 (2005): 522-534.
- [4] *Kabanihin C. И.* "Obratnye i nekorretnye zadachi". Sib. nauch. izd-vo., (2009).
- [5] *Belov Yu. Ya.* "Inverse problems for parabolic equations". Utrecht. VSP., (2002).

-
- [6] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* "Methods for solving inverse problems in mathematical physics". New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
- [7] *Isakov V.* "Inverse problems for equations of parabolic type" // Berlin: Springer-Verl., 2006.
- [8] *Kaliev I.A., Sabitova M.M.* "Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures". Russian Mathematics., vol. 56, no 2. (2012): 60-64.
- [9] *Ibanchov N.I.* "Ob opredelenii zabiciachego ot bremeni starshego koeffitsienta b para bolicheskim urabnenii". Sibirski mat. zhurnal., vol. 39, no 3. (1998): 539-550.
- [10] *Asanov A., Atamanov E. R.* "Obratnaia zadacha dlia operatornogo pseudoparabolicheskogo integrodifferentsialnogo urabnenia". Sib. mat. zhurn., vol. 38, no 4. (1995): 752-762.
- [11] *Ablabekov B.S.* "Obratnye zadachi dlia pseudoparabolicheskikh urabnenii". - (Bishkek: Ilim, 2001), 181.
- [12] *Abylkairov U. U., Kh. Khompysh* "An inverse problem of identifying the coefficient in Kelvin-Voight equations". Applied Mathematical Sciences., vol. 9. no 102. (2015): 5079 - 5088.
- [13] *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* "An inverse problem for linear Sobolev type equation". J. of Inverse and Ill-posed Problems., vol. 33. (2004): 387-395.
- [14] *Lyubanova A. Sh., Tani A.* "An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration: the existence, uniqueness and regularity". Appl. Anal., vol. 90. (2011): 1557-1568.
- [15] *Ionkin N. I., Moiseev E. I.* "O zadache dlia urabnenia teploprobeodnosti s dbutochechnymi kraebymi usloviami". Differents. urabnenia., vol. 35, no 8. (1999): 1094-1100.
- [16] *Moiseev E. I.* "O reshenii spektralnom metodom odnoi nelokalnoi kraeboi zadachi ". Differents. urabnenia., vol. 35, no 8. (1999): 1094-1100.
- [17] *V. G Zvyagin and M. V. Turbin.* "Investigation of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids". *Translated from the Russian in J. Math. Sci.*, vol. 168, no 2. (2010): 157-308.
- [18] *R. E. Showalter, T. W. Ting.* "Pseudoparabolic partial differential equations". SIAM J. Math. Anal., vol. 1. (1970): 1-26.
- [19] *A. G. Sbeshnikov, A. B. Alshin, M. O. Korpusov, Iu. D. Pletner* "Lineinye i nelineinye urabnenia sobolevckogo tipa" // Moskba: Fizmatlit., 2007.

IRSTI 30.19.25; 30.19.29

<https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.09>¹E.K. Abdyldaev , ²M.O. Nogaibayeva ¹Dr. Sci. (Tech.), Prof., E-mail: abderkinbek@mail.ru²Senior lecturer, E-mail: mnogaibayeva@gmail.com

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROBLEM OF COMPRESSION OF A ROCK SAMPLE WITH FRICTION AT THE END

Analytical solutions of the problem of the stress-strain state of the environment around the workings with non-uniform compression in the elastic-plastic formulation, with account for transboundary deformation are few. Some solutions of the problem under the conditions of Tresk and Coulomb plasticity are obtained.

In these solutions, there are simplifying assumptions that the area of inelastic deformations cover the entire contour of the mine, the angle of internal friction is zero, etc. The features of the post-limit deformation of rock masses near underground mines consist on the formation of destruction zones around the mine workings, zones of plastic and elastic deformation, covering the part of contour or the entire contour depending on the boundary conditions and contour profiles, and a given law of the state of the environment. The mathematical description of the process of formation of inelastic deformations areas near the workings and obtaining a solution by the analytical method is rather difficult. Due to the lack of knowledge of this problem to date, it is advisable to use numerical methods of mathematics and mechanics using modern information technology and technology. The article presents mathematical models and results of solving a geomechanical problem based on information technology and the finite element method. The developed procedures and programs allow solving with the help of modern computers a wide class of mining tasks in which it is required to determine the stress-strain state of the rock mass weakened by mine workings in different mining and geological conditions.

Key words: geomechanical tasks, field structures, mathematical models, array heterogeneity, rock properties, rock samples.

¹Э.К. Абдылдаев, ²М.О. Ногайбаева¹тех.ғ.д., проф., E-mail: abderkinbek@mail.ru²аға оқытушы, E-mail: mnogaibayeva@gmail.com

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан

Бүйір шетінде үйкелісі бар тау жыныстарының үлгілерін сығу есебін математикалық модельдеу

Шекарадан тыс деформацияларды ескеретін бірқалыпты емес сығылу кезіндегі кен қазбаларының айналасындағы серпімді-пластикалық қойылымдағы ортаның кернеулі-деформацияланған күйі туралы есептердің аналитикалық шешімдері өте аз. Треска мен Кулонның пластикалық жағдайындағы есептің кейбір шешімдері алынды. Бұл шешімдерде, серпімді емес деформация аймағы өнімнің барлық жиегін қамтиды, ішкі үйкеліс бұрышы нөлге тең және т. б. секілді қарапайым болжамдар бар. Тау-кен массивтерінің жер асты қазбаларына жақын шекарадан тыс деформациялануының ерекшеліктері мынадай: тау-кен қазбаларының айналасында қирау аймақтары, жиектің шекаралық шарты мен профиліне, сондай-ақ орта жағдайының берілген заңына байланысты жиектің бөлігін толық жиекті қамтитын пластикалық және серпімді деформация аймақтары пайда болады. өнімдерге жақын серпімсіз деформация ортасының құрылу процессінің математикалық сипаты мен аналитикалық әдіспен шешімін табу өте күрделі болып табылады.

Қазіргі таңда осы проблеманың аз зерттелуіне байланысты қазіргі заманауи ақпараттық техника мен технологияны пайдалана отырып, математика мен механиканың сандық әдістерін пайдаланған жөн. Мақалада ақпараттық технология және соңғы элементтер әдісі негізінде геомеханикалық есептерді шешудің математикалық модельдері мен нәтижелері келтірілген. Әзірленген процедура мен программалар қазіргі заманауи компьютерлердің көмегімен әртүрлі тау-кен техникалық және тау-кен геологиялық жағдайларда қазбалармен әлсіреген тау-кен массивінің кернеулі-деформацияланған күйін анықтауды талап ететін тау-кен өндірісі есептерінің кең класын шешуге мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: геомеханикалық есептер, кенорнының құрылымы, математикалық модельдер, массивтің біркелкіеместігі, тау жыныстарының қасиеттері, тау жыныстарының

¹Э.К. Абдылдаев, ²М.О. Ногайбаева

¹д-р техн. наук, проф., E-mail: abderkinbek@mail.ru

²старший преподаватель, E-mail: mnogaiybayeva@gmail.com

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

Математическое моделирование задачи сжатия образца горных пород с трением на торцах

Аналитические решения задачи о напряженно-деформированном состоянии среды вокруг выработок при неравномерном сжатии в упруго-пластической постановке с учетом запредельного деформирования малочисленны. Получены некоторые решения задачи в условиях пластичности Треска и Кулона. В этих решениях имеются упрощающее предположения, что область неупругих деформаций охватывают весь контур выработки, угол внутреннего трения равен нулю и др. Особенности запредельного деформирования породных массивов вблизи подземных выработок заключается в том, что вокруг горных выработок образуются зоны разрушения, зоны пластических и упругих деформаций, охватывающих часть контура или весь контур в зависимости от граничных условий и профилей контура, а также заданного закона состояния среды. Математическое описание процесса формирования областей неупругих деформаций вблизи выработок и получения решения аналитическим методом представляется достаточно сложным. В связи с мало изученности данной проблемы на сегодняшний день, целесообразно использовать численные методы математики и механики с использованием современной информационной техники и технологии. В статье приведены математические модели и результаты решения геомеханической задачи на основе информационной технологии и метода конечных элементов. Разработанные процедуры и программы позволяют решать с помощью современных компьютеров широкий класс задач горного производства, в которых требуется определять напряженно-деформированное состояние породного массива, ослабленного выработками в разных горнотехнических и горногеологических условиях.

Ключевые слова: геомеханические задачи, структуры месторождения, математические модели, неоднородность массива, свойства пород, образцы горных пород.

1 Introduction

In the national economy of the Republic of Kazakhstan, the mining industries occupy one of the most important places in their role in social production, economic importance and social factors. In this regard, in order to create effective and reliable designs of mines and quarries, the development of an environmental monitoring system for the environment in the field of mining must be comprehensive, combining basic and applied sciences. In the Republic, one of the priorities is to increase the rate of extraction and supply of natural resources to the markets in order to use the current high global demand in the interests of the country. The competitiveness of mining enterprises is mainly ensured with large volumes of mineral extraction. Their high-performance work is achieved on the basis of introducing into practice

the results of scientific research to create new and improve existing technological schemes with the inclusion of cyclical and continuous technology, rational equipment, full expansion of the field of application of advanced technological solutions, as well as the use of advanced forms of organization and management of mass mining works.

The rapid development of information technology is currently placing new demands on traditional, well-established areas of knowledge, one of which is geomechanics and the development of subsoil. In connection with the depletion of mineral resources located at accessible depths, the main direction of development of the mining industry will be the further development and improvement of methods and methods of mining with involvement in exploitation of fields with complex mining and geological conditions, great depth of development and long service life of pit walls and underground workings. The modern level of development of the mathematical apparatus for solving problems of geomechanics and computing technology allows us to automate the design of workings, take into account all the details of the array structure, achieve greater reliability of design solutions that ensure minimal amounts of overburden work, safe working conditions, and rational use of the subsurface and land resources which becomes relevant in a market economy.

2 Review of literature

At the present stage of development of information technology, the most popular computational methods for assessing the stress-strain state of a rock massif and various structures are the methods of finite elements [1-11] and boundary elements [12-14]. As is well known, the boundary element method (MGE) is well suited to stress concentration problems or to infinite regions, and the finite element method (FEM) provides a cost saving procedure in many three-dimensional problems for finite regions. The simplicity of the mathematical theory, the ease of generalization in solving the problem and the applicability to physically and geometrically non-linear problems make the FEM more attractive, while for the MGE this is still the subject of research. The finite element method (FEM) is a synthesis of the latest achievements of continuum mechanics and numerical methods of mathematics. It has received extremely wide application in various fields of physics and technology, mainly in the analysis of the stress-strain state. Fundamentally new FEM opens in the mechanics of rocks and soils. Before its appearance, the solution of geotechnical problems was possible only in an elastic formulation, or by means of limiting equilibrium - and then under fairly simple boundary conditions. Most of the elastic-plastic problems are not amenable to an analytical solution, as a result of which, in many cases, the loads on the soil are artificially limited to the elastic phase of deformation [15-25]. The current literature on FEM is extremely extensive and literally every entry into the scientific and technical libraries brings new information in this field.

3 Objects and research methods

Mining enterprises, unlike many other industrial facilities and structures (metallurgical, machine-building, chemical plants, etc.) are natural-technological complexes. The parameters and indicators of the economic efficiency of mining enterprises are determined for this

level of technology mainly by natural factors (structure and size of deposits, terrain, hydrological conditions, etc.) and their permissible environmental impact. It should be noted that at the present stage of development of mining science it is the differentiation of mining science, the emergence of its new industries and divisions on the basis of its integration with related fields of science and technology. Search and scientific substantiation of the methods of rational and integrated use of the subsoil, ensure their comfortable working conditions and optimal state of the environment.

The latest stage in the development of mining science should be associated with the deployment of the scientific and technological revolution (STR). Scientific and technological revolution, as is known, has set new problems for humanity: environmental protection and depletion of mineral-fuel resources. These problems are particularly relevant for the mining industry and science, without deciding which, the further production use of mineral resources can become socially ineffective. It should be noted that in the areas of mining the geographical environment is sharply deteriorating, a method of open-cast mining causes great harm to it, an increase in the share of which is planned in the near future. The effectiveness of the method is already currently minus large inevitable costs of reclamation of disturbed land. Hence the formulation before science of a fundamental change in the technology of mining. This is especially true because modern technology does not allow developing deposits in the deep bowels of the earth, as well as with a low mineral content. Therefore, it is so important to develop fundamentally new methods and means of mining, to avoid the movement of masses of waste rock, to exclude the presence of a person under the ground, to dramatically increase labor productivity. This is a real task, as there is an internal training and maturity of mining science to enrich it with the latest achievements of the fundamental sciences, on which meringue a fundamental shift in the technical base of mining production can be achieved. In world practice, technical progress is primarily related to the orientation on the widespread use of self-propelled mining equipment: the development of self-propelled drilling, loading-hauling and transport equipment, self-propelled bucket loading-hauling machines (PDM) with both diesel and electric drive. The development of information and communication technologies, the widespread introduction of automation and remote control of mining machines and aggregates are priority areas for the improvement of underground technology. Differentiation of mining science on the basis of its integration with related fields of science and technology and at the same time is a synthesis of mining sciences into a single system of knowledge for finding methods for the rational and integrated use of the subsurface, providing comfortable working conditions and an optimal state of the natural environment. The goal of mining science is not only to describe, explain the conditions of means and methods of exploration for mining and primary processing of minerals, but mainly in finding ways to improve and change them to facilitate working conditions and increase production efficiency. Mining science today is a complex, developing complex of scientific disciplines. All processes and phenomena occurring during the exploration, mining and processing of minerals contain internal and external contradictions, the discovery, study and resolution of which is the main task of mining science.

The general trend of mathematization of sciences has not bypassed mining sciences, but today for solving most major mining problems there are not enough mathematical tools, because the task, for example, of developing fields is to create self-organizing multi-factor systems, and later on self-programming auto steps. At the present stage, the tasks arising, for example, in the development of mineral resources, can be quantitatively solved only in

relation to certain, ideal deposits. Therefore, in order to impart practical significance to such "quantitative" decisions, the assumptions underlying the analysis should, in accordance with accepted values, be consistent with natural conditions [1-5].

4 Mathematical media models

In the process of formation in the mass of open or underground mine workings, the natural stress-strain state is disturbed. Zones of non-elastic deformations appear around the workings for various purposes. Of particular importance are the patterns of deformation of rocks beyond the limits of strength associated with loosening (irreversible increase in volume), weakening (decrease in resilience) and hardening. These patterns largely determine the nature of the stress-strain state of the rock mass near the workings, especially with the combined mining of mineral deposits by open and underground methods in mutual influence on each other [6-13].

We write Hooke's law for the conditions of plane strain ($\xi_2 = 0$) in the following form:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_{\Pi}(\varepsilon_1 + \nu_{\Pi}\varepsilon_3)/(1 - \nu_{\Pi}^2), \\ \sigma_3 &= E_{\Pi}(\varepsilon_3 + \nu_{\Pi}\varepsilon_1)/(1 - \nu_{\Pi}^2)\end{aligned}\quad (1)$$

where (Π) , ν_{Π} – are the "flat" analogs of the Young's modulus E and the Poisson coefficient ν , related to them by the relations: $\Pi = E/(1 - \nu^2)$, $\nu_{\Pi} = \nu/(1 - \nu)$.

Considering that the ultimate strength of the medium under consideration in the field of compression is described by the Coulomb criterion:

$$\sigma_1 = S + \sigma_3 \operatorname{ctg} \delta \quad (2)$$

where $S = 2c \operatorname{ctg}(\pi/4 - \varphi/2)$ – is the uniaxial compression strength; $\operatorname{ctg} \delta = (1 + \sin \varphi)/(1 - \sin \varphi)$; c , φ – grip and angle of internal friction.

In the field of tension, we supplement the criterion $\sigma_3 = T$, T is the tensile strength. After simple transformations, we obtain descriptions of the limits of strength through the main deformations – compression are considered positive:

$$[(E_{\Pi}\varepsilon_1 - S)(1 - \nu_{\Pi} \operatorname{ctg} \delta)/(\operatorname{ctg} \delta - \nu) - \nu_{\Pi}S]/E_{\Pi} - \varepsilon_3 = 0 \quad (3)$$

$$T(1 - \nu_{\Pi}^2)/E_{\Pi} - \nu_{\Pi}\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 0 \quad (4)$$

In the coordinates ε_1 and ε_3 equations (3) and (4) have the form, respectively, of straight lines A'B' and D'A' (Fig. 1, a). Thus, in region 1 within the limits of circuit D'A'B', according to the known deformations ε_1 и ε_3 of stresses σ_1 and σ_3 , can be found by formulas (1). Outside the contour of A'B'C', other equations of the connection of deformations and stresses act.

Let in the process of loading the deformed state of the element of the medium reached a certain point E on the border of the elastic zone (Fig. 1a). Consider the laws of further plastic deformation occurring at a constant minimum principal stress. An increase in the strain ε_1 (i.e., shortening of the element of the medium in the direction ε_1) is accompanied by a decrease in the strain ε_3 (expansion in the perpendicular direction). The full vector of plastic deformations ε_p (E'F' in Fig. 1a) consists of two components: ε_{1p} и ε_{3p} and the interrelation of these components is determined by the adopted law of flow.

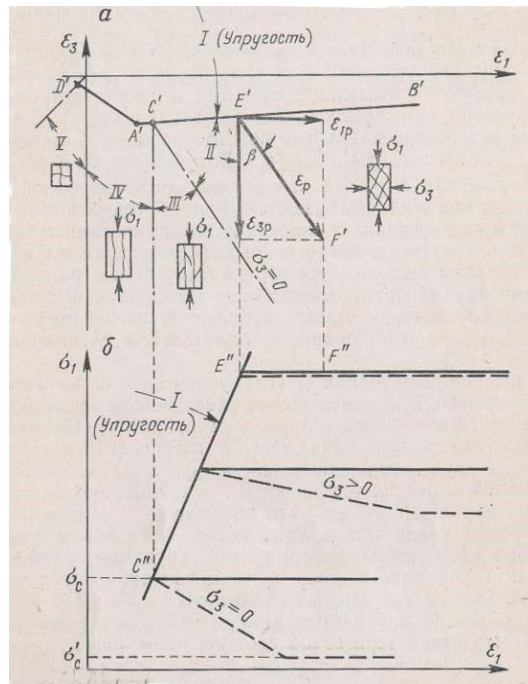


Figure 1: The law of the state of environment

If we accept $\varepsilon_{3p} = -\varepsilon_{1p}$ the shortening in the direction ε_1 will be equal to the elongation in the direction ε_3 , and the volume of the element of the medium during plastic deformation will remain unchanged. Such plastic flow can be called equilibrium. In a more general case, the relationship between the components of plastic deformations can be characterized by the ratio of the form

$$\varepsilon_{3p} = -\operatorname{ctg} \beta \varepsilon_{1p}. \quad (5)$$

The angle β in Fig. 1a determines the degree of loosening during plastic flow; the value $\operatorname{ctg} \beta$ can be called the dilation coefficient. When $\beta = \delta$, formula (5) corresponds to the principle of normality (the associated law of flow).

Moreover, if the deformations of the medium element ε_1 and ε_3 characterize the point F' in Fig. 1a, then they can be represented as a sum of elastic and plastic components:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1e} + \varepsilon_{1p}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{3e} + \varepsilon_{3p}; \quad (6)$$

The elastic components ε_{1e} and ε_{3e} are the coordinates of the point E' and are determined from the elastic formulas (1) when the value σ_1 is substituted in them on the elastic boundary by the Coulomb formula (2). Substituting the values ε_{1e} and ε_{3e} and value ε_{3p} thus obtained from formula (5) into equations (6), we obtain a system of two equations, which having solved relatively σ_3 and ε_{1p} , we find the voltage value σ_3 corresponding to this deformed state:

$$\sigma_3 = [E_{II}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + S(\nu_{II} - 1)] / (1 - \nu_{II} \operatorname{ctg} \delta + \operatorname{ctg} \delta - \nu_{II}). \quad (7)$$

To determine the value of σ_1 , a family of connection graphs σ_1 and ε_1 should be specified for plastic deformation under the conditions $\sigma_3 = \operatorname{const}$ of Fig. 1b. If in the process of

deformation resistance remains constant (perfect plasticity), then the graphs σ_1 , $-\varepsilon_1$ have the form of horizontal lines (solid lines in Fig. 1b), and the value ε_1 itself can be calculated from the previously determined value ε_3 using formula (2).

For rocks that are weakened in the process of transboundary deformation, for example, a family of graphs shown in Fig. 1b, by dashed lines, may be prompted. These graphs characterize the environment, the resistance of which in the process of plastic deformation decreases from the initial value, determined by formula (2), to the residual value

$$\sigma_1 = \min[(S + \sigma_3 \operatorname{ctg} \delta), (S' + \sigma \operatorname{ctg} \delta')], \quad (8)$$

where S' and δ' – residual strength characteristics ($S' < S$, $\delta' < \delta$). The developed models are implemented in the form of numerical procedures for cases of plane strain in the deformation variant of the theory of plasticity based on the finite element method.

The main procedure of the finite element method considers the medium as elastic and reduces to solving a system of linear algebraic equations for unknown displacements

$$\{u\} : \{F\} = [K]\{u\}, \quad (9)$$

where $[K]$ – the stiffness matrix of the system; $\{F\}$ – vector of nodal forces.

Since the study of the stress-strain state of the rock mass, taking into account transcendental deformability, is a non-linear problem, we have obtained new developments in the combined procedure for the general case, when the law of the state of the medium is given on the basis of the proposed model [14-16].

5 Research results

For the quantitative and qualitative assessment of the FEM solution using the above algorithm and the program developed on a PC, the test problem of uniaxial compression of the sample with friction on the ends was solved. Due to the presence of two axes of symmetry, only a quarter of the area is considered (Fig. 2a). The axes of symmetry in the deformation process do not bend, and shear stresses are absent along the axes of symmetry. Three top nodes are set to move down equal to 0.018. Properties of the elements: $\sigma = 100Pa$, $\nu = 0.3$, $\nu = 0$, $c = 0.1Pa$, $\varphi = 30^\circ$.

The problem is solved according to the developed program in two versions: in the first version, the state law obeys the associated flow law; in the second, a softening medium with a dilatation coefficient $\lambda = 3$ is considered. In Fig. 2b and 2c show the shapes of the deformed sample obtained as a result of calculation on a PC. To ensure equilibrium, these forces must be equal in magnitude and opposite in direction to given external forces, and in those nodes where external forces are not specified, they are equal to zero. In general, the sum of the nodal forces applied to the region in the x and y directions to ensure equilibrium must be zero. When solving each specific problem by checking, the fulfillment of the equilibrium condition was established.

To verify the fulfillment of the state law, we provided for printing not only the actual stresses found in the elements, but also the "theoretical" stresses calculated using the formulas for the adopted state law and the found strains. The quality of the solution can be estimated from the proximity of the values of the actual and theoretical voltages in Fig. 3a and 3b

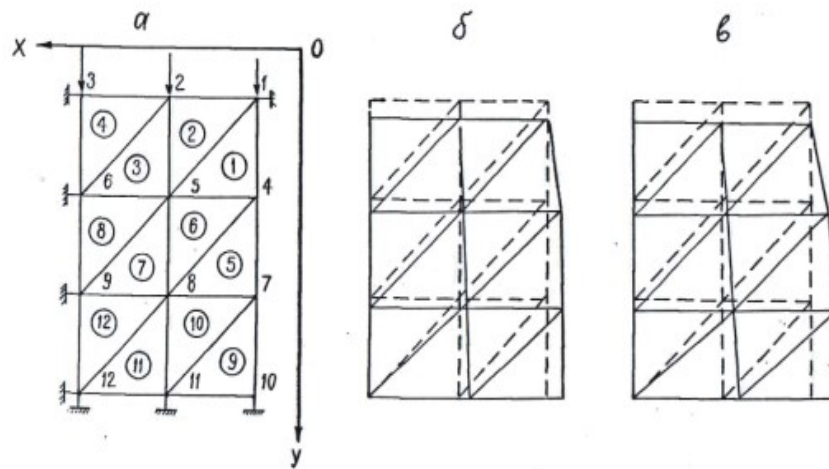


Figure 2: Test task: *a* – design scheme; *b* – form of the sample after loading with the associated law of flow; *c* – form sample in a softening medium

where the medium-strength datasheets and the actual stresses in the elements (points) are shown. In elements 2 and 4, the calculated deformations 1 and 3 are smaller than the limiting elastic deformation for a given stress 3, therefore, they are in the elastic state. The remaining elements are in inelastic state. From Fig. 3a, b and from the calculation results it follows that the state law is satisfied for a given accuracy, the coaxiality of the main stresses and strains is maintained. Next, we check the fulfillment of the given law of flow, for example, on element No 10. The stresses in the element are equal: $\sigma_1 = 4.9$, $\sigma_3 = 0.39$, and the deformations: $\varepsilon_1 = 0.0070$, $\varepsilon_3 = -0.0097$. Under plane deformation, according to Hooke's law, the elastic components of the deformations under such stresses are: $\varepsilon_1^y = 0.0043$, $\varepsilon_3^y = -0.0016$. Accordingly, the plastic components are equal to:

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^y = 0.0027; \quad \varepsilon_3^p = \varepsilon_3 - \varepsilon_3^y = -0.0081 \quad (10)$$

As you can see, the ratio of plastic component strain

$$\lambda = |\varepsilon_3^p / \varepsilon_1^p| = (0.0081 / 0.0027) = 3 \quad (11)$$

is exactly equal to the given (associated) law of flow, characterized by $\lambda = 3$. In the considered problems the found solution is unique. In principle, the solution of a plastic problem may not be the only one: for example, stretching an ideally plastic rod with a load equal to the yield strength of a material will not have a single solution. At the same time, stretching this rod to a given strain will have a single solution.

6 Conclusion

The developed mathematical models, procedures and programs allow us to solve with the help of modern computers a wide class of mining tasks in which it is required to determine the

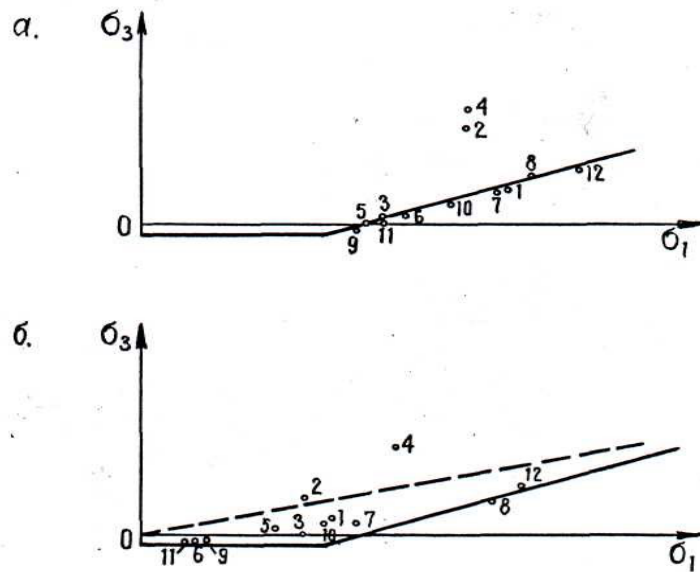




Figure 3: The stress state in the elements: a - with the associated flow law; b - in a softening environment

stress-strain state of the rock mass. The components of the natural stress field are represented as dependent on the geomechanical structures of the field, and are taken into account in the program using boundary conditions. In this case, the boundary conditions can be specified in the form of zero or nonzero nodal forces or displacements (or mixed conditions). Array heterogeneity is taken into account by model by introducing various strength and deformation characteristics E , ν , γ , c , φ (modulus of elasticity, Poisson's ratio, density, adhesion, and angle of internal friction). Surfaces of weakening and breaking in an array are imitated by layers of elements with corresponding lowered strength properties.

References

- [1] Fadeev A.B. "Metod konechnykh elementov v geomehanike [The finite element method in geomechanics]", *M.: Nedra* (1987): 221.
- [2] Zenkevich O. "Metody konechnykh elementov v tehnikе [Finite-element methods in engineering]", *M.: Mir* (1975): 542.
- [3] Erzhanov Z.S., Karimbaev T. "Metod konechnykh elementov v zadachah mehaniki gornykh porod [The finite element method in problems of rock mechanics]", *Alma-Ata: Science* (1975): 238.
- [4] Bieniawski Z.T., Denkhaus H.G., Volger V.W. "Failure of fractured rock", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* Vol. 6, No 3 (1969): 323-341.
- [5] Bredy B.T. "Nonlinear mechanical behavior of the brittle rock", *Int.J. Rock Mech. Min. Sci.* Vol. 6, No 3 (1969): 211-225.
- [6] Ghang G.Y., Duncan J.M. "Analysis of soil movement around a deep excavation", *Proc. ASCE* Vol. 96, No 5 (1970): 1655-1681.
- [7] Goodman R.E., Toyler R.L., Brekke T.L. "A Model for the mechanics of jointed rock", *Proc ASCE* Vol. 94, No SM3 (1968): 637-659.
- [8] Tatsuoka F. "Fundamental Research for the Deformability of Sand by the Triaxle Apparatus", *Ph.D dissertation presented to Tokyo Univesity in Japanese* (1972).

- [9] Turner M.J., Clough R.W., Martun H.C., Topp L.J. "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *J. Aero. Sci.* Vol. 23 (1965): 805-823.
- [10] Zienkiewicz J.C., Valliopian S., King I.P. "Stress analysis of rock as a no tension material", *Geotechnique* Vol. 18 (1968): 56-66.
- [11] Abdyldaev E.K. "Metod konechnykh elementov pri reshenii prikladnykh zadach [The finite element method for solving applied problems]", *Almaty: Polygraphy-service* (2011): 111.
- [12] Kozhakhmetov K.Kh., Nurmambetova R.D., Ramatov K.S. "Pryamoy metod granichnykh integralov dlya resheniya zadach gornoy geomehaniki [The direct method of boundary integrals for solving problems of mining geomechanics]", *Bulletin of the Academy of Sciences of Kazakhstan SSR* No 9 (1987).
- [13] Telles D. "Primenenie metoda granichnykh elementov dlya resheniya neuprugikh zadach [Application of the boundary element method for solving inelastic problems]", *M.: Stroiizdat* (1987).
- [14] Krauch S., Starfield A. "Metody granichnykh elementov v mehanike tverdogo tela [Methods of boundary elements in solid mechanics]", *M.: Mir* (1987).
- [15] Kartashov, Yu. M., Matveev B.V., Mikheev G.V., Fadeev A.B. "Prochnost i deformiruemost gornyykh porod [Strength and deformability of rocks]", *M.: Nedra* (1979): 269.
- [16] Kazikaev D.M., Kozyrev A.A., Kasparyan E.V., Iosiv M.A. "Upravlenie geomehanicheskimi protsessami pri razrabotke mestorozhdeniy poleznykh iskopaemykh. Uchebnoe posobie [Management of geomechanical processes in the development of mineral deposits]", *Tutorial. - M. Publishing House "Mining Book"* (2016): 490.
- [17] Rakishev B.R., Mashanov A.A., Abdyldaev E.K. "Struktura massiva i deformiruemost gornyykh porod [The massif structure and deformability of rocks]", *Almaty* (2011): 281.
- [18] Abdyldaev E. K., Mashanov A. A. "Metody otsenki ustoychivosti sklonov: Monografiya [Methods for assessing the stability of slopes: Monograph]", *Almaty* (2013): 203.
- [19] Moldoshev R.A., Abdyldaev Ch.E., Abdyldaev E.K. "Deformatsionnyye modeli, uchityvayushchie dilatatsii i razuprochneniya gornyykh porod [Deformation models that take into account dilatancy and rock softening]", *Bulletin of the Kazakh National Technical University named after KI Satpayev. Almaty* No 1 (95) (2013): 21-24
- [20] Abdyldaev E.K., Abdim Farabi. "Metodika organizatsii i mobilnogo obucheniya v usloviyakh vnedreniya sistem e-Learning [Methods of organizing mobile learning in the context of e-Learning system implementation]", *News KSTU. I.Razzakova. Tokmok-ITS "Technik"* No. 1 (41) part 1 (2017): 205-209.
- [21] Abdyldaev E.K. "Uchet vliyaniya struktury massiva pri opredelenii ustoychivosti otkosa karera [Accounting for the influence of the structure of the array in determining the stability of the slope of the pit]", *Bulletin of the Kyrgyz-Russian Slavic University. A series of natural and technical sciences. Bishkek* Volume 17, Number 8 (2017): 65-67
- [22] Abdyldaev E.K. "Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye massiva gornyykh porod vblizi vyrabotok [The stress-strain state of the rock mass near the workings]", *Frunze: Ilim* (1990): 164.
- [23] Abdyldaev E.K., Zhumazhanov B.ZH, Salimova, G.E. "Kriteriy otsenki ustoychivosti porodnogo massiva vblizi vyrabotok [Criterion for assessing the sustainability of the rock mass near the workings]", *Bulletin of the Al-Farabi Kazakh National University. Almaty* 3 (54) (2007).
- [24] Abdyldaev E.K. "Modeli otsenki napryazhennoy sostoyaniya massiva vblizi vyrabotok pri kombinirovannoy razrabotke [Models for estimating the stress state of the massif near the workings during combined mining]", *Weeds abstracts of the International scientific - practical conference "Actual problems of computer science, mechanics and robotics. Digital technologies in mechanical engineering"* Almaty (2018): 21-22
- [25] Abdyldaev E.K., Orazayeva L., Uypalakova D.M. "Informatsionnaya tehnologiya pri chislennoy reshenii prikladnykh zadach [Information technology in the numerical solution of applied problems]", *The weed of materials from the International Scientific and Practical Conference "Modern Information and Communication Technologies in Education, Science and Practice"* in the framework of the third modernization of Kazakhstan. Kazakh State Women's Pedagogical University, Almaty (2018): 3.

¹A.M. Alimzhanov , ²K.Zh. Shetiyeva 
¹Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., E-mail: AivarMr@rambler.ru
²PhD student, E-mail: karlygash.shetiyeva@gmail.com
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

RESEARCH OF THE STRESS STATE OF AN ELEMENT OF A THICK-WALL PIPELINE UNDER CONDITIONS OF POWER AND CORROSION EFFECT

The stress state of an element of a thick-walled pipeline is studied under conditions of power and corrosion effect in the statement of plane deformation. The material of the element under the influence of external loads goes into an elastic-plastic state. The corrosive effect of the pumped medium leads to softening of the material in the plastic zone. This softening of the material is taken into account by a special inhomogeneity function in the Tresca-Saint-Venant plasticity condition. The elastic-plastic problem in the axisymmetric setting (uniform pressure) and non-axisymmetric setting (non-uniform external pressure along the contour) is considered. The problem is solved by the method of sharing static and physical equations for the considered elastoplastic material and the perturbation method in the theory of an elastoplastic body. An assessment of the strength and bearing capacity of a thick-walled element under corrosive force effect is given.

Key words: thick-wall element, elastoplastic state, corrosion damage to the material, plastic inhomogeneity, softening function.

¹А.М. Алимжанов, ²Қ.Ж. Шетиева
¹ф.-м.,ғ.д., проф., E-mail: aivarMr@rambler.ru
²PhD докторант, E-mail: karlygash.shetiyeva@gmail.com
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан
Қалың қабырғалы құбыр элементінің күштік және коррозиялық әсер ету жағдайларында кернеулі күйін зерттеу

Жазық деформация қойылымында күштік және коррозиялық әсер ету жағдайларында қалың қабырғалы құбыр элементінің кернеулі күйі зерттелді. Сыртқы жүктемелердің әсерінен элемент материалы серпімді-иілгіш күйге өтеді. Айдалатын ортаның коррозиялық әсері иілгіш аймақта материалдың жұмсаруына әкеледі. Материалдың жұмсаруы Треска-Сен-Венанның иілгіштік шартында біртексіздіктің арнайы функциясымен ескеріледі. Осесимметриялы қойылымда (бірқалыпты қысым) және симметриялы емес қойылымда (контур бойынша бірқалыпты емес сыртқы қысым) серпімді иілгіш есеп қарастырылды. Есеп қарастырылып отырған серпімді иілгіш материал үшін статикалық және физикалық теңдеулерді бірлесіп пайдалану әдісімен және серпімді иілгіш дене теориясында ұйытқулар әдісімен шешілді. Коррозиялық-күштік әсер ету жағдайында қалың қабырғалы элементтің беріктігі мен көтергіштік қабілеттілігіне баға берілді.

Түйін сөздер: қалың қабырғалы элемент, серпімді иілгіш күй, материалдың коррозиялық зақымдануы, иілгіштік біртексіздік, беріктендіру функциясы.

¹А.М. Алимжанов, ²Қ.Ж. Шетиева
¹д.ф.-м.н., проф., E-mail: aivarMr@rambler.ru
²PhD докторант, E-mail: karlygash.shetiyeva@gmail.com
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
Исследование напряженного состояния элемента толстостенного трубопровода в условиях силового и коррозионного воздействия

Исследовано напряженное состояние элемента толстостенного трубопровода в условиях силового и коррозионного воздействия в постановке плоской деформации. Материал элемента под действием внешних нагрузок переходит в упругопластическое состояние. Коррозионное воздействие перекачиваемой среды приводит к разупрочнению материала в пластической зоне. Это разупрочнение материала учитывается специальной функцией неоднородности в условии пластичности Треска-Сен-Венана. Рассмотрена упругопластическая задача в осесимметричной постановке (равномерное давление) и неосесимметричной постановке (неравномерное по контуру наружное давление). Задача решена методом совместного использования статических и физических уравнений для рассматриваемого упругопластического материала и методом возмущений в теории упругопластического тела. Дана оценка прочности и несущей способности толстостенного элемента при коррозионно-силовом воздействии.

Ключевые слова: толстостенный элемент, упругопластическое состояние, коррозионные повреждения материала, пластическая неоднородность, функция разупрочнения.

1 Introduction

According to the normative documents [1, 2] in engineering practice, when calculating, as a rule, elastically deformable elements of pipelines are considered. At the same time, with an increase in external loads, the material of a thick-walled element passes into an elastoplastic state. Most pipelines are operated with prolonged exposure under increased loads in aggressive work environments. The corrosive effect of an aggressive pumped medium leads to damage and microcracking of the material during operation. In the plastic zone, as a result of corrosion-force action, a softening of the element occurs, which leads to a significant decrease in its strength and bearing capacity. The danger of exposure to aggressive media on the material working under load is due to the fact that in such cases the pipelines fail in a very short time, sometimes even with accidents. In this regard, this work is devoted to the study of the stress-strain state, strength and load-bearing capacity of the elastic-plastic element of a thick-walled pipeline under conditions of force and corrosion, which leads to the material softening in the plastic zone.

2 State of the problem

The effect of large loads and aggressive working environments (containing hydrogen sulfide, mercaptans), penetrating into the volume of structural elements, leads to their damage [3, 4]. The effect on the strength of the material of an individual crack or the final system of cracks in the framework of the linear theory of elasticity is the subject of linear fracture mechanics [5]. Nonlinear fracture mechanics [6] involves the analysis of the criteria and properties of material ductility in the vicinity of the tip of a single crack. Corrosion damage to the contact zone of the element material under high stress and corrosive environment leads to the appearance of many defects and microcracks, the account of the overall impact of which is not possible in the framework of fracture mechanics. Mathematical models and criteria describing the occurrence and development of scattered microdamages are formulated mainly within the framework of continuum mechanics [7]. Different types of corrosion affect on different parameters of metal structures. For example, the general mechanochemical continuous corrosion of metals leads to a loss of weight and volume of the material without significant loss of its strength [8]. The calculation of the decrease in the wall thickness of a pipeline subject to general

mechanochemical corrosion in the framework of the linear theory of elasticity is given in [9]. Moreover, the process of metal loss is significantly extended over time. In case of intergranular and transcrystalline corrosion, on the contrary, the mechanical properties of the metal change practically without loss of its weight [8]. The combined action of corrosion and static tensile stresses leads to a gradual decrease in the resistance to plastic deformation and a decrease in the plasticity limit in ductile metals, carbon and low alloy steels, and various alloys [10]. The decrease in the mechanical properties of the material during loading due to the accumulation of damage and defects can be taken into account in the framework of the plasticity theory of inhomogeneous bodies [11, 12, 13]. In [11, 12, 13], to take into account the accumulation of damage to the material, it was proposed to introduce a special softening function (radial inhomogeneity of strength characteristics) in the criteria used for plasticity of the material for axisymmetric and some plane problems. In [14], modified plasticity criteria were used, which can take into account the accumulation of material damage in the case of more complex boundary conditions under which plastic inhomogeneity should change in accordance with the change in the elastoplastic boundary. In this paper, this is exactly the approach taken.

3 Solution of the problem

3.1 Basic assumptions and relationships

The element of a thick-walled extended pipeline is in flat deformation conditions. Consider the cross section of a pipeline with an internal circuit $a_0 + f_1(r, \theta)$ and an external circuit $1 + f_2(r, \theta)$ in the polar coordinate system r, θ . The material of the pipeline is considered perfectly elastic-plastic.

The equations of equilibrium of the pipeline have the form:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (1)$$

Here are $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ the components of the stress tensor. In the elastic region, Hooke's law is valid for a homogeneous, isotropic linearly elastic material:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} ((1 + \mu) \sigma_{ij} - \mu \delta_{ij} \sigma_{kk}). \quad (2)$$

Where σ_{ij} and ε_{ij} are the components of the stress and strain tensors, E – is the elastic modulus, μ – is the Poisson's ratio, δ_{ij} – is the Kronecker symbol.

As a condition for the transition of the material into a plastic state, we accept the Tresca-Saint-Venant condition, which is widely used in the calculation of plastic deformable metal structures

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4K_*^2 \quad (3)$$

where K_* is adhesion coefficient.

The material strength parameter K_* in condition (2) characterizes the plastic inhomogeneity formed as a result of varying degrees of damage to the material due to the force-corrosion effect and distributed over the thickness of the plastic zone, similar to the outline of its boundary. At the boundary of the plastic zone, the value K_* is constant: $K_* = K_1$. The value

K_* is a special softening function, depending on the coordinates r, θ and loading parameters r_0, δ [14]:

$$K_* = K_*(r, r_0, \theta, \delta) \quad (4)$$

Here r_0, δ – is the axisymmetric and nonaxisymmetric loading parameters: $r_0 = r_0(P_0, P_1 + P_2)$, $\delta = \delta(P_1 - P_2)$.

The problem is solved by the method of joint use of static and physical equations for the considered elastoplastic material. In the non-axisymmetric formulation, the perturbation method is applied [15]. The solution is searched for in the form of series by degrees of a small parameter, which is the parameter δ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_0^\nu \delta^\nu \sigma_{ij}^{(\nu)} = \sigma_{ij}^0 + \sum_1^\nu \delta^\nu \sigma_{ij}^{(\nu)}, & K_* &= \sum_0^\nu \delta^\nu K_*^{(\nu)} = K_*^0 + \sum_1^\nu \delta^\nu K_*^{(\nu)}, \\ r_s &= \sum_0^\nu \delta^\nu r_\nu = r_0 + \sum_1^\nu \delta^\nu r_\nu, \end{aligned} \quad (5)$$

where r_s is the desired elastoplastic boundary.

Linearizing equations (1), (3) and introducing, according to (1), the stress function $F = F(r, \theta)$

$$\sigma_r^{(\nu)} = \frac{1}{r} \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F^{(\nu)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta^{(\nu)} = \frac{\partial^2 F^{(\nu)}}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta}^{(\nu)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial \theta} \right), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

we obtain in the plastic zone an inhomogeneous partial differential equation for the function $F^{(\nu)}(r, \theta)$:

$$r^2 \frac{\partial^2 F^{(\nu)}}{\partial r^2} - r \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^{(\nu)}}{\partial \theta^2} = r^2 f^{(\nu)}(r, \theta), \quad \nu \geq 0 \quad (7)$$

where $f^{(\nu)}$ is the right side of the corresponding linearized relation:

$$f^0 = 2K_*^0, \quad f^{(I)} = 2K_*^{(I)}, \quad f^{(II)} = -\frac{1}{K_0} (\tau_{r\theta}^{(I)})^2 + 2K_*^{(II)}.$$

The solution of equation (7) $F^{(\nu)}$ is determined taking into account static or geometric boundary conditions.

In the elastic region, the stress function $\Phi(r, \theta)$ satisfies the biharmonic equation (∇^2 is the Laplace operator)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (8)$$

The solution of equation (8) with $r, m\theta$ can be represented as

$$\Phi_m = (C_1 r^m + C_2 r^{-m} + C_3 r^{m+2} + C_4 \varphi_m(r)) \cos m\theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

where $\varphi_m(r) = r^m \ln r$ at $m = 0, 1$; $\varphi_m(r) = r^{-m+2}$ at $m \geq 2$. Constants $C_1 - C_4$ are found from the boundary conditions.

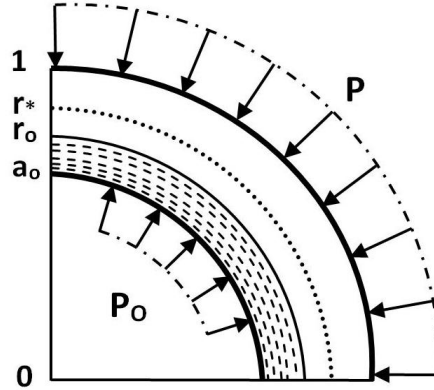


Figure 1: Design scheme for a thick-walled pipe element in an axisymmetric setting

3.2 Thick-walled element in an axisymmetric setting

First, find the axisymmetric state of the pipeline element. The axisymmetric problem for a thick-walled element is known in elasticity theory as the Lamé problem. Assuming in the initial equations $\tau_{r\theta}^0 = 0$, $\partial\sigma_{ij}^0/\partial\theta = 0$, $\partial K_*^0/\partial\theta = 0$, $\delta = 0$ we obtain the Lamé problem in the accepted formulation (Fig. 1).

The axisymmetric boundary conditions on the internal and external contour of a_0 and 1 and the conjugation conditions on the contour of r_0 have the form (square (round) brackets at the indices mean belonging to the plastic (elastic) zone

$$\begin{aligned} \sigma_{[r]}^0 &= P_0 \text{ at } r = a_0; \quad \sigma_{(r)}^0 = P \text{ at } r = 1; \\ [\sigma_r^0] &= [\sigma_\theta^0] = 0 \text{ at } r = r_0, \end{aligned} \quad (10)$$

Here big [...] brackets means a jump of a given value when crossing through the specific boundary.

In the axisymmetric (zero) state of a thick-walled element, the softening function in the plastic zone K_*^0 depends on the current radius r and the boundary radius r_0

$$K_*^0 = K_*(r, r_0) = (K_0 - K_1)\bar{f}(r, r_0) + K_1 \quad (11)$$

Where K_0 and K_1 is the value of the strength of the material on the inner contour of the element and on the elastic-plastic radius r_0 , $\bar{f}(r, r_0)$ – some core with properties $\bar{f}(a_0, 1) = 1$, $\bar{f}(r_0, r_0) = 0$. Such properties of the core allow us to describe the decrease in the value H_*^0 not only by the radius, but also depending on the position of the boundary radius r_0 . As a core $\bar{f}(r, r_0)$, one can take the core [12], which well describes the softening of the material during loading (Fig. 2). It has the form $\bar{f}(r, r_0) = \frac{a_0^n(r_0^n - r^n)}{r^n(1 - a_0^n)}$ (n – nonlinearity parameter).

Using equilibrium equations (1), plasticity condition (3), and also axisymmetric boundary conditions and conjugation conditions (10) we find all stress components and the radius of

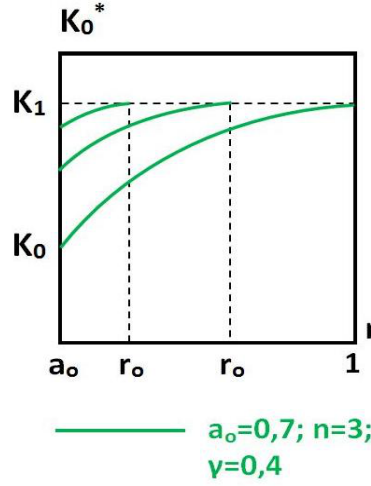


Figure 2: Decrease in the strength parameter K_*^0 depending on the position of the elastoplastic radius r_0 according to the presented softening function $K_*(r, r_0)$

the plastic zone r_0 .

$$\sigma_{[r]}^0 = P_0 + 2 \int_{a_0}^{r_0} r^{-1} K_*^0 dr, \quad \sigma_{[\theta]}^0 = \sigma_{[r]}^0 + 2K_*^0, \quad \tau_{[r\theta]}^0 = 0 \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{(r)}^0 \\ \sigma_{(\theta)}^0 \end{array} \right\} = P + K_1 r_0^2 \left(1 \mp \frac{1}{r^2} \right), \quad \tau_{(r\theta)}^0 = 0$$

The radius r_0 is implicitly determined from the equation

$$P_0 - P + 2 \int_{a_0}^{r_0} r^{-1} K_*^0 dr + K_1(1 - r_0^2) = 0 \quad (13)$$

In the absence of corrosion damage, the parameter $K_*^0 = K_1$ and radius of the plastic zone r_0 are found from the equation

$$P_0 - P + 2K_1 \left(\ln \left(\frac{r_0}{a_0} \right) + \frac{1}{2} (1 - r_0^2) \right) = 0 \quad (14)$$

Numerical calculations were performed using formulas (11) – (14) with the following data: $\mu = 0,34$; $E = 110GPa$; $\Delta P = P - P_0$; $E = 3667K_1$. According to numerical results, the presence of corrosion damage affects the elastic-plastic state of the thick-walled element. The greatest interest is the relationship $\Delta P = \Delta P(r_0)$ between value of uniform pressure ΔP and the radius of the plastic zone r_0 (Fig. 3). This dependence is determined by the thickness parameter a_0 and the softening parameters of the material n , $\gamma = K_0/K_1$. From

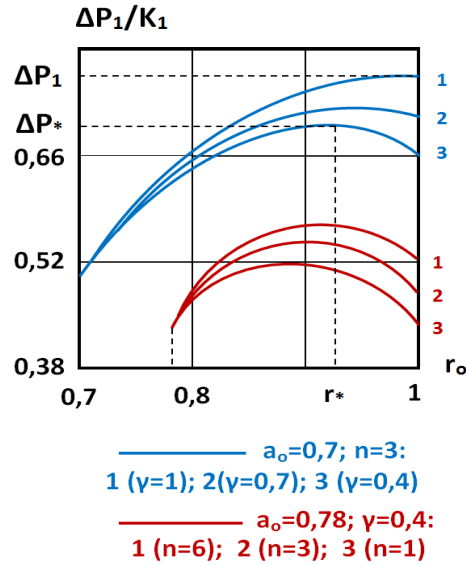


Figure 3: The relationship between the value of uniform pressure ΔP and the radius of the plastic zone r_0 for various thickness parameters and softening parameters of the material n , $\gamma = K_0/K_1$

the calculations it follows that the presence of corrosion damage ($\gamma < 1$) leads to an increase in radius r_0 . Moreover, all curves with $\gamma < 1$ have one maximum point with an abscissa $r_0 = r_*$, where $a_0 < r_* < 1$. In the absence of damage ($\gamma = 1$), the radius $r_* = 1$. The existence and uniqueness of maximum points follows analytically from the nonmonotonicity and convexity of the function $\Delta P = \Delta P(r_0)$.

The maximum point characterizes the moment of loss of the bearing capacity of a thick-walled element. Corresponding to the maximum point, pressure ΔP_* ($\Delta P_* \leq \Delta P$) and radius r_* ($r_* \leq 1$) are limiting for the destruction of a thick-walled element. The value r_* depends significantly on the thickness parameter a_0 : in a thinner element, it is located closer to the inner surface (Fig. 3). The obtained results can serve as an explanation of the phenomenon of premature failure of structural elements with corrosion damage.

We denote the relationship between external loads P , P_0 and radius r_0 as $g(P, P_0, r_0) = 0$. Then the existence of a maximum point on the interval $a_0 < r_0 < 1$ is expressed as an additional equation $\partial g(P, P_0, r_0)/\partial r_0 = 0$, which has the form: $K_*(a_0, r_0) - K_1 r_0^2 = 0$.

The bearing capacity of a thick-walled element is determined as follows. From the two transcendental equations $g = 0$, $\partial g/\partial r_0 = 0$, we first find the critical radius r_* , and then the critical loads at which the thick-walled element is destroyed.

With the known softening parameters and given external loads, it is possible to establish the optimal (minimum permissible) thickness parameter a_0 for a thick-walled element of two equations $g = 0$, $\partial g/\partial r_0 = 0$. Calculations show that the bearing capacity of the element is significantly reduced in the presence of corrosion damage, for example, when the thickness $d = 1 - a_0 = 0,4$ is reduced by 12-15%. The bearing capacity of an element that allows only elastic deformation is lower by 34-50% in comparison with elastoplastic elements. It follows

from the calculations that the bearing capacity of the elements increases most effectively when their thickness increases only to $d = 0.4 \div 0.5$.

3.3 Thick-walled element in a non-axisymmetric setting (outward pressure uneven in contour)

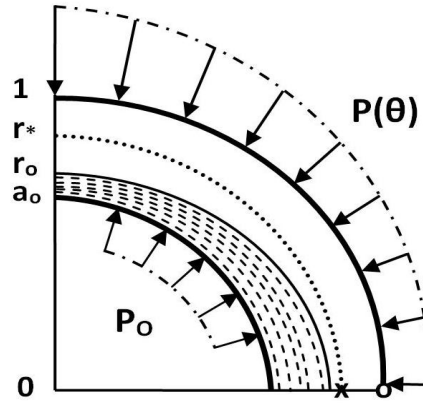


Figure 4: Design scheme for a thick-walled pipe element in a non-axisymmetric setting

Consider an extended thick-walled element loaded with an external pressure that is not uniform along the contour $P(\theta)$. The cross section of an element with an inner radius a_0 and an outer radius of 1 is in plane deformation (Fig. 4).

External pressure is elliptically distributed along the contour and can be written as

$$P(\theta) = P[1 - \delta \cos 2\theta] \quad (15)$$

where $P = (P_{\max} + P_{\min})/2$ is the averaged uniform pressure, $\delta = (P_{\max} - P_{\min})/(P_{\max} + P_{\min})$ – a parameter characterizing the deviation of external pressure from uniform.

The solution is sought in the form (5) at $\nu \geq 0$. The zero solution for $\nu = 0$ was found in the previous part of the paper. Find a solution at $\nu = 1$. The function $F^{(1)}$ in (7) is represented based on the static boundary conditions (15) on the outer contour of the element: $F^{(1)} = R(r) \cos 2\theta$.

Solving (7), we find the function $F^{(I)}$ in the plastic zone:

$$F^{(I)} = \left(A_i R_i + R_i \int_{a_0}^r \frac{\nu_i(r)}{\nu(r)} dr \right) \cos 2\theta, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (16)$$

where $A_i R_i = A_1 R_1 + A_2 R_2 = r(A_1 \cos(\sqrt{3} \ln r) + A_2 \sin(\sqrt{3} \ln r))$, $V(r)$ – is the Wronskian of the solution system R_i , $V_i(r)$ is the determinant obtained from the determinant $V(r)$ by replacing the i -th column with a column with a single nonzero element $2K_*^{(I)} \cos^{-1} 2\theta$ located at its end.

Using (6), (16) we find the stress components in the plastic zone. They must satisfy the linearized boundary conditions on the inner contour

$$\sigma_{[r]}^{(I)} = 0, \quad \tau_{[r\theta]}^{(I)} = 0 \quad \text{at } r = a_0. \quad (17)$$

The components $\sigma_{[r]}^{(I)}$, $\sigma_{[\theta]}^{(I)}$, $\tau_{[r\theta]}^{(I)}$ of the stress tensor in the elastic region of the cylinder are determined from (6), (9). They satisfy the given static boundary conditions on the external contour (15) and two linearized conditions of stress conjugation σ_r and $\tau_{r\theta}$ on the boundary of the plastic zone:

$$[\sigma_{[r]}^{(I)}] = 0, \quad [\tau_{[r\theta]}^{(I)}] = 0 \quad \text{at } r = r_0. \quad (18)$$

As a result, we obtain the boundary-value problem for an elastic ring of radius r_0 and 1 under the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \sigma_{[r]}^{(I)} &= N_1(r) \cos 2\theta, \quad \tau_{[r\theta]}^{(I)} = N_2(r) \sin 2\theta \quad \text{at } r = r_0, \\ \sigma_{[r]}^{(I)} &= -P \cos 2\theta, \quad \tau_{[r\theta]}^{(I)} = 0 \quad \text{at } r = 1. \end{aligned}$$

Solving this problem, we find the stress components in the elastic region.

The equation of the boundary of the plastic zone r_s is sought in the form $r_s = r_0 + \delta r_1$. To determine the value of r_1 , we use the linearized conditions for the conjugation of the components σ_θ and K_* on r_0 :

$$\left[\sigma_{[\theta]}^{(I)} + \frac{d\sigma_\theta^0}{dr} r_1 \right] = 0, \quad \left[K_*^{(I)} + \frac{dK_*^0}{dr} r_1 \right] = 0 \quad \text{at } r = r_0, \quad (19)$$

where will we get it

$$r_1 = (\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_{[\theta]}^{(I)}) / \left(\frac{d\sigma_{[\theta]}^0}{dr} - \frac{d\sigma_\theta^0}{dr} \right), \quad K_*^{(I)} = -\frac{dK_*^0}{dr} r_1 \quad \text{at } r = r_0.$$

Then for r_1 we will have $r_1 = \varphi(r_0)r_0 \cos 2\theta$, where $\varphi(r_0)$ is a function of r_0 :

$$\varphi(r_0) = \frac{X_0}{X_1 + X_2 + Z}, \quad X_0 = 4(1 - r_0^2 + r_0^{-2} - r_0^4) \frac{-P}{N},$$

$$N = 6 - 4(r_0^2 + r_0^{-2}) + r_0^4 + r_0^{-4}, \quad A = \frac{1}{2}(12 + 12\alpha_2 - \alpha_2^2)^{1/2},$$

$$X_1 = (10 - 4r_0^2 - 4r_0^{-2} - r_0^4 - r_0^{-4} + \alpha_1 N) \frac{\bar{K}_*}{N} \times$$

$$\times \left[\left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln r_0) + \sin(\sqrt{3} \ln r_0) \right) B_1 + \left(\cos(\sqrt{3} \ln r_0) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln r_0) \right) B_2 \right],$$

$$X_2 = -2(4 - 4r_0^2 + r_0^4 - r_0^{-4}) \frac{\bar{K}_*}{N} \times (\sin(\sqrt{3} \ln r_0) B_1 + \cos(\sqrt{3} \ln r_0) B_2),$$

$$Z = 4K_1, \quad \bar{K}_* = (K_0 - K_1) \frac{a_0^n}{1 - a_0^n} \frac{n}{r_0}, \quad B_1 = \frac{r_0}{2} \sin(\sqrt{3} \ln r_0 - \frac{\pi}{3}) - \frac{a_0}{2} \sin(\sqrt{3} \ln r_0 - \frac{\pi}{3}),$$

$$B_2 = \frac{r_0}{2} \cos(\sqrt{3} \ln r_0 - \frac{\pi}{3}) - \frac{a_0}{2} \cos(\sqrt{3} \ln r_0 - \frac{\pi}{3})$$

In the homogeneous case we have: X_0 – the same thing, $X_1 = X_2 = 0$, $H_*^0 = H_1$, $H_*^{(I)} = 0$

$$X_1 = X_2 = 0, \quad K_*^0 = K_1, \quad K_*^{(I)} = 0, \quad Z = 4K_1.$$

Moreover, the radius r_0 corresponds to the homogeneous case.

The equation of the boundary of the plastic zone r_s takes the form:

$$r_s = r_0(1 + \delta\varphi(r_0) \cos 2\theta).$$

The solution exists under the condition $r_0(1 - \delta\varphi(r_0)) \geq a_0$.

The bearing capacity of a thick-walled element can be determined from the transcendental equation

$$r_* = r_0(1 + \delta\varphi(r_0)) \tag{20}$$

First, from (20) we find the radius r_0 . Substituting the found radius r_0 into equation (13), we obtain critical loads at which the plastic zone reaches some "critical" points of the thick-walled element.

In the absence of corrosion damage to the element, $r_* = 1$ should be taken in equation (20) and equation (14) should be used. The critical points in this case (marked with zeros in Fig. 4) are on the external contour of the element in the directions of the minimum external pressure P_{\min} . In the presence of corrosion damage to the element, the critical points (marked with crosses in Fig. 4) are inside the element on circuit r_* in the same directions. Reaching these crosses with at least one point of the plastic zone will lead to the destruction of the element. As can be seen from Figure 4, the plastic zone is elongated in the directions of action of P_{\min} . Damage to the material leads to an increase in the size of the plastic zone. The degree of damage to the material depends on the size of this zone. The element has the greatest damage in the directions of action of P_{\min} . Therefore, the softening of the element depends both on the size of the plastic zone and on the orientation of its boundary.

4 Conclusion

The stress-strain state of an elastoplastic element of a thick-walled pipeline is studied under conditions of force and corrosion using a special softening function (plastic inhomogeneity) in the plasticity condition of Tresca-Saint-Venant.

The elastoplastic problem for a thick-walled element in an axisymmetric formulation (with uniform external and internal pressure) and non-axisymmetric formulation (with an external pressure uneven in contour) is considered. The problems are solved by the method of sharing static and physical equations and the perturbation method in the theory of an elastoplastic body.

An assessment of the strength and bearing capacity of a thick-walled element under corrosive force is given.

References

- [1] СНиП 3.05-01-2010. "Magistral'nye truboprovody [Trunk pipelines]".
- [2] СП 33.13330.2012. "Raschet na prochnost' stal'nyh truboprovodov [Strength analysis of steel pipelines]".
- [3] Gareev A.G., Nasibullina O.A. and Rizvanov R.G., "Izuchenie korrozionnogo rastreskivaniya magistral'nyh gazonefteprovodov [The study of corrosion cracking of gas and oil pipelines]", *Oil and gas business* 6 (2012), <http://www.ogbus.ru/authors/Gareev2.pdf>.
- [4] Basiyev K.D. et al., "Issledovanie processov zarozhdeniya i razvitiya korrozionno-mekhanicheskikh treshchin na poverhnosti trub [Study of the processes of nucleation and development of corrosion-mechanical cracks on the surface of pipes]", *Bulletin of the Vladikavkaz Scientific Center* 3 (2014): 56-61.
- [5] Cherepanov G.P., *Mekhanika hrupkogo razrusheniya* [Mechanics of brittle fracture] (Moscow: Science, 1974): 640.
- [6] Astafiev V.I., Radayev U.N. and Stepanova L.V., *Nelinejnaya mekhanika razrusheniya* [Nonlinear fracture mechanics] (Samara: SamSU Publishing House, 2001): 562.
- [7] Sadyrin A.I., "Modeli nakopleniya povrezhdenij i kriterii razrusheniya konstrukcionnyh uprugoplasticheskikh materialov pri dinamicheskom nagruzhenii [Damage accumulation models and fracture criteria of structural elastoplastic materials under dynamic loading]", *Problems of strength and plasticity* 74 (2012): 28-39.
- [8] Rossina N.G. et al., *Korroziya i zashchita metallov. CHast'1. Metody issledovanij korrozionnyh processov* [Corrosion and metal protection. Part 1. Research methods for corrosion processes] (Ekaterinburg: Ural University Publishing House, 2019): 108.
- [9] Kushrin S.Ya., Mosyagin M.N. and Pesin A.S., *Processy razvitiya korrozionnyh treshchin pod napryazheniem magistral'nyh gazoprovodov pod vliyaniem izmeneniya ih vysotnogo polozeniya i katodnoj zashchity* [Processes of development of corrosion cracks under stress of main gas pipelines under the influence of changes in their altitude position and cathodic protection] (St.Petersburg: Nedra, 2010): 168.
- [10] Ovchinnikov I.I., "Issledovanie povedeniya obolocheknykh konstrukcij, ekspluatiruyushchih v sredah, vyzyvayushchih korrozionnoe rastreskivanie [Study of the behavior of shell structures operating in environments that cause corrosion cracking]", *Science* 4 (2012): 1-30.
- [11] Alimzhanov M.T., "Uprugoplasticheskaya zadacha, uchityvayushchaya neodnorodnost' mekhanicheskikh svoystv materiala [Elastic-plastic problem, taking into account the heterogeneity of the mechanical properties of the material]", *Reports of the USSR Academy of Sciences* 6 (1978): 1281-1284.
- [12] Alimzhanov M.T., "O nakoplenii povrezhdenij i nesushchej sposobnosti elementov tolstostennykh konstrukcij [On the accumulation of damage and bearing capacity of elements of thick-walled structures]", *International journal Problems of mechanical engineering and automation* 1 (1992): 58-64.
- [13] Alimzhanov A.M., "Dvumernaya uprugoplasticheskaya zadacha s lokal'noj plasticheskoy neodnorodnost'yu [Two-dimensional elastic-plastic problem from the local plastic inhomogeneity]", *Mechanics and modeling of technology processes* 1 (1997): 3-17.
- [14] Alimzhanov A.M., "Ploskaya uprugoplasticheskaya zadacha dlya neodnorodnogo tela s otverstiem [Flat elastic-plastic problem for a non-uniform body with a hole]", *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids* 2 (1998): 119-138.
- [15] Ivlev D.D. and Ershov L.V., *Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela* [The perturbation method in the theory of an elastoplastic body] (Moscow: Science, 1978).

IRSTI 27.35.25

<https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.11>¹N.T. Azhikhanov, ²B.T. Zhumagulov, ³T.A. Turymbetov, ⁴A.B. Bekbolatov¹Doctor of Technical Sciences, Academy of Public Administration under the President of Kazakhstan, Turkestan, Kazakhstan, E-mail: ajihanov1@mail.ru²Doctor of Technical Sciences, Academician of NAS RK, National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan, E-mail: zhumagulov_b@mail.ru³Candidate of Technical Sciences, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, E-mail: tursinbay@mail.ru⁴PhD student, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, E-mail: alimzhan_iktu@mail.ru

STRESSED-DEFORMED STATE OF TWO DRIFTS IN A TILTLY LAYERED CRACKED ARRAY IN THE CONDITIONS OF ELASTIC DEFORMATIONS OF ROCKS

In the study, based on a homogeneous anisotropic mechanical-mathematical model of an inclined, finely layered array with a biperiodic system of slots, the patterns of distribution of elastic stresses and displacements near two drifts of arbitrary profile shape and depth by the finite element method under conditions of plane deformation have been systematically numerically investigated. The calculation was carried out by converting weakened rocks with two excavations in elasticity to an equivalent homogeneous medium. It is difficult to solve the problem of the initial static stress state of two-diagonal workings on a rock weakened by two-period cracks by the analogous method, therefore it was solved by the generalized method of plane deformation using the first and second isoparametric elements by the finite element method. Methods for dividing the area specified by the finite element method into parametric quadrangular elements and numerically determining the stress-strain state of double workings are given.

A computational algorithm has been developed and a software package has been developed for studying the elastic state of adjacent cavities of arbitrary depth and shape. A multivariate numerical calculation and analysis of the influence on the components of stresses and displacements near cavities, geometrical, physical parameters of rocks was carried out.

Key words: drift, isoparametric element, transtropic array, finite element method.

¹Н.Т. Ажиханов, ²Б.Т. Жұмағұлов, ³Т.А. Тұрымбетов, ⁴А.Б. Бекболатов¹Т.ғ.д., Қазақстан Республикасы Президентінің жанындағы мемлекеттік басқару академиясы, Түркістан қ., Қазақстан, E-mail: ajihanov1@mail.ru²Т.ғ.д., ҚР ҰҒА академигі, Қазақстан Республикасының ұлттық инженерлік академиясы, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: zhumagulov_b@mail.ru³Т.ғ.к., Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, E-mail: tursinbay@mail.ru⁴PhD докторант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, E-mail: alimzhan_iktu@mail.ru

Екі штректің серпімді тау жыныстарының жарықтары массивті салмақты қабаттағы кернеулік-деформациялық жағдайы

Зерттеуде бипериодты саңылаулар жүйесі бар көлбеу, жұқа қабатты массивтік біртекті анизотропты механикалық-математикалық моделін ала отырып, жазықтықтың деформациялану жағдайына шекті элемент әдісін қолдандық және тереңдіктің екі штректің маңайында серпімді кернеулер мен орын ауыстырулардың заңдылықтары жүйелі түрде зерттелді. Тау жыныстарының геометриялық, физикалық параметрлеріне кернеулер мен орын ауыстырулар компоненттеріне әсер етуді сандық есептеу және талдау жүргізілді.

Қос қазбамен әлсіретілген тау жыныстарын қатаңдығы жағынан эквивалентті біртекті ортаға келтіру есебі арқылы жүзеге асырылды. Салмақты екі периодты жарықтармен әлсіретілген тау жынысында көлденең қимасы әр түрлі қос диагональдық қазбаның бастапқы статикалық кернеулік күйін аналитикалық әдістермен шешу күрделі болғандықтан есеп шекті элементтер әдісімен бірінші және екінші изопараметрлік элементтерді қолданып, жалпылама жазық деформация шартында шешілді. Шекті элементтер әдісі арқылы берілген облысты төртбұрышты изопараметрлік элементтерге бөлу және қос қазбаның кернеулік-деформациялық күйін сандық анықтау жолдары келтірілді.

Есептеу алгоритмі және еркін тереңдік пен пішіннің іргелес қуыстарының серпімді күйін зерттеуге арналған бағдарламалық кешен жасалынды. Тау жыныстарының геометриялық, физикалық параметрлеріне кернеулер мен орын ауыстырулар компоненттеріне әсер етуді сандық есептеу және талдау жүргізілді.

Түйін сөздер: штрек, изопараметрлік элемент, транстропты массив, шекті элементтік әдіс

¹Н.Т. Ажиханов, ²Б.Т. Жумагулов, ³Т.А. Турымбетов, ⁴А.Б. Бекболатов

¹д.т.н., Академия государственного управления при Президенте Республики Казахстан, г. Туркестан, Казахстан, E-mail: ajihanov1@mail.ru

²д.т.н., академик НАН РК, Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г. Алматы, Казахстан, E-mail: zhumagulov_b@mail.ru

³к.т.н., Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, г. Туркестан, Казахстан, E-mail: tursinbay@mail.ru

⁴PhD докторант, Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, г. Туркестан, Казахстан, E-mail: alimzhan_iktu@mail.ru

Напряженно-деформированное состояние двух штреков в наклонно слоистом трещиноватом массиве в условиях упругих деформациях пород

В работе на основе однородной анизотропной механико-математической модели наклонного мелкослоистого массива с двоякопериодической системой щелей систематически численно исследовано закономерности распределения упругих напряжений и перемещений вблизи двух штреков произвольной формы профиля и глубины методом конечных элементов в условиях плоской деформации. Расчет был осуществлен с путем превращения ослабленных пород с двумя раскопками по упругости к эквивалентной однородной среде. Решать задачу начального статического напряженного состояния двухдиагональных выработок на породе, ослабленной двухпериодными трещинами по аналогическим методом трудно, по этому была решена обобщенным методом плоской деформации с использованием первого и второго изопараметрических элементов методом конечных элементов. Приведены способы деления площади, заданной методом конечных элементов, на параметрические четырехугольные элементы и численного определения напряженно-деформированного состояния двойных выработок.

Разработан расчетный алгоритм и составлен программный комплекс для изучения упругого состояния сближенных полостей произвольной глубины и формы. Проведен многовариантный численный расчет и анализ влияния на составляющие напряжений и перемещений вблизи полостей, геометрических, физических параметров пород.

Ключевые слова: штрек, изопараметрический элемент, транстропный массив, метод конечных элементов.

1 Introduction

In the last century, the works of Soviet and foreign scientists mainly carried out theoretical studies of the VAT of underground cavities in an isotropic massif. Using the symmetry of the biharmonic solution and based on the special properties of the harmonic functions O.Muller [1], K.Stocke [2], the corresponding classes of problems are considered. G.V.Kolosov, N.I.Muskhelishvili [3] successfully solved the theory of functions of a complex variable in solving plane problems in the theory of elasticity of an isotropic body.

The analytical function proposed by Appel made it possible to consider the state of a single and multiply connected isotropic body with circular holes. An orthotropic medium with a doubly periodic system of round holes was considered by L.A.Filshtinsky [4], and such a body with elliptical holes by A.S.Kosmodamiansky, M.M.Neskorodev [5]. A.S.Kosmodamiansky studied the SSS of an anisotropic elastic body with three and infinite rows of holes and based on these solutions Zh.S.Erzhanov, K.Kaydarov, M.T.Tusupov [6] studied the effects of slot systems on the static stress state of the underground working out. Zh.S.Erzhanov, Sh.M.Aytaliev and Zh.K.Masanov [7] proposed a computational mechanical-mathematical model of elastic deformation of an anisotropic massif with doubly periodic gap systems, and by solving the reduction problem, we obtained elastic constants of a transtropic body equivalent in stiffness to the main an array with gaps, depending on the elastic properties of the latter and the geometry of the gaps. Based on this model, the static initial elastic state of mostly single underground deep-seated cavities was studied using strict and approximate methods.

A significant contribution to the development of the theory of FEM and their application to solving complex problems of statics and dynamics of the mechanics of a deformable body was made by scientists L.Segerlind [8], B.Z.Amusin, A.B. Fadeev [9], Zh.S.Erzhanov, T.D.Karimbaev [10], Sh.M.Aytaliev, Zh.K.Masanov, R.B.Baimakhan, N.M.Makhmetova [11] and others.

2 Finite element method

The elastic static stress and deformable state of two shallow cavities in a heavy transtropic massif is studied depending on the degree of discontinuity by adhesion of shallow inclined layers at an angle ϕ . We denote by H the depth of the workings with the distance between their centers $2L$.

The equation of the generalized Hooke law of an anisotropic array with cavities under generalized plane deformation relative to the Cartesian coordinate system $Oxyz$ (Figure 1) is written as

$$\{\sigma\} = [\bar{D}]\{\varepsilon\} \quad (1)$$

where $\{\sigma\} = (\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz})^T$, $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})^T$, $[\bar{D}] = [d_{ij}]$, $(i, j = 1, 2, \dots, 5)$ is strain coefficients [7].

Here $E_k^2, \nu_k^2, G_2^2 (k = 1, 2)$ effective elastic constants of the transtropic massif, equivalent in stiffness to the anisotropic massif with gaps that depend on the elastic constants of the latter $E_k, \nu_k, G_2 (k = 1, 2)$ and slot geometry $a, \omega, i\omega$.

The cross-sectional area ABCD of the drifts during plane deformation is divided using n nodes into m isoparametric design elements (Figure 1b). A basic resolving system of $3n$ -order FEM algebraic equations is compiled with respect to the projections of node displacements and it is solved under the following boundary conditions:

base of the BD settlement area ABCD non-deformable

$$u = \omega = 0 \quad (2)$$

the lateral sides of AB and CD under the influence of the weight of the rocks move only in the vertical direction due to the absence of the influence of the cavities

$$u = 0, \quad \omega = \omega(z). \tag{3}$$

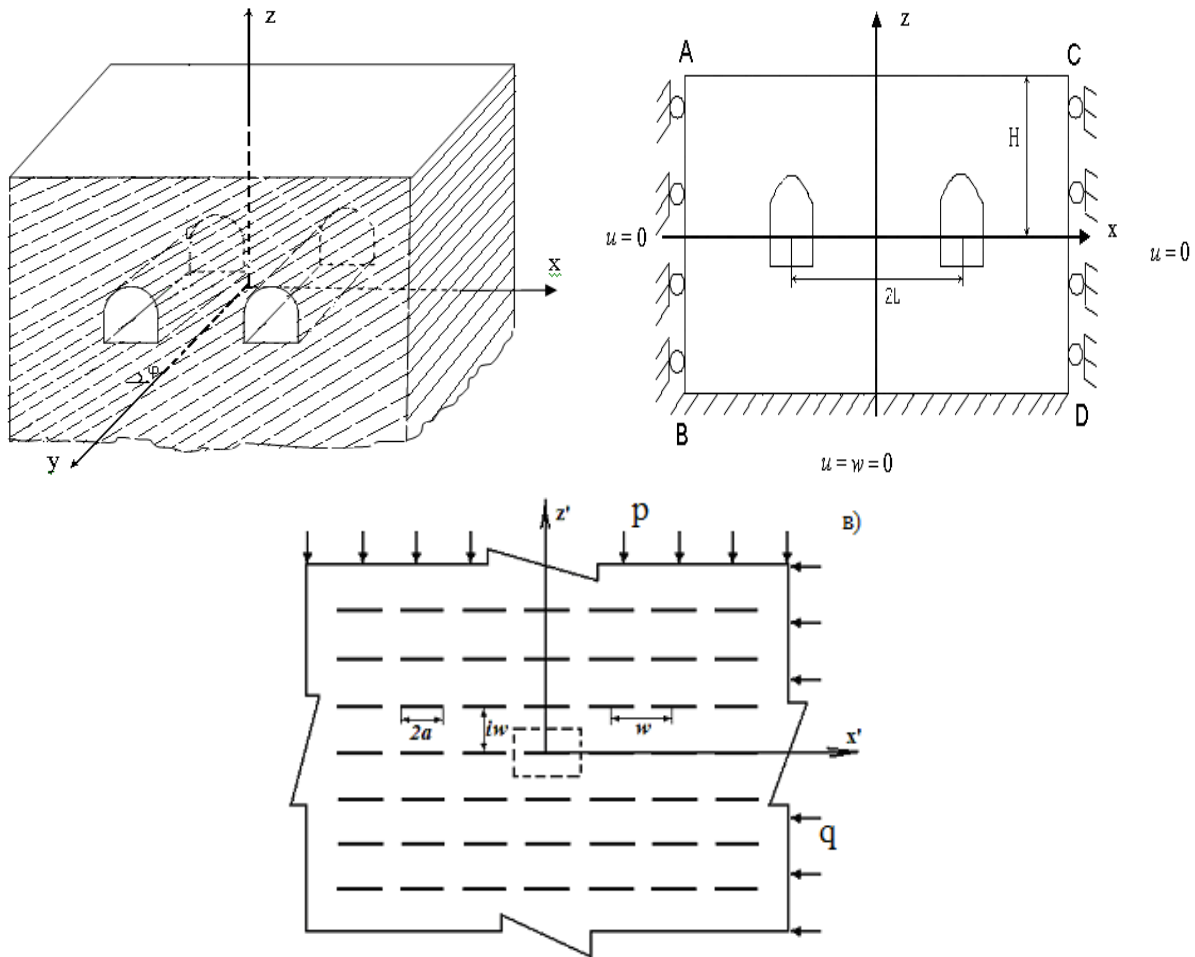


Figure 1: Calculation scheme for studying the stress state of an anisotropic array a) spatial view; b) flat view; c) a plane with a periodic system of slots

The investigated computational domain with cavities is automatically divided into isoparametric elements using the FEM_3D program in the Delphi object-oriented environment. Each node is affected by vertical force by weight.

Solving the basic system of FEM equations with respect to component displacements with boundary conditions 2, 3 by strict methods is difficult; Therefore, it is solved in the paper by the iterative Seidel - Gauss method with the upper relaxation coefficient with a given accuracy [12].

An attractive feature of this method is the following: firstly, the system stiffness matrix is compiled only once $[K]$ and its elements and column matrix elements are used during iteration

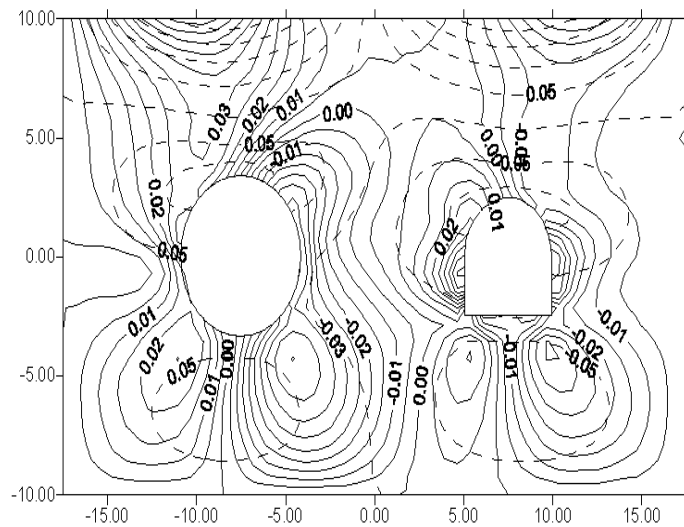
$\{U\}$; secondly, when $k + 1$ iterations for unknowns u_{m+1} , ($m = 1, 2, \dots, 3, n$), u_1, u_2, \dots, u_m values needed at $k + 1$ iteration, and for u_{m+2}, \dots, u_{3n} value at k iteration.

To verify the correct operation of the developed algorithms and software systems, the test problem of the elastic stress state of a circular cavity in an anisotropic array with a horizontal plane of isotropy under conditions of plane deformation and hydrostatic stress distribution in an untouched medium is solved. Due to the symmetry of the problem, a quarter of the region with a cavity is divided into 342 isoparametric elements using 380 nodes. The basic system of 1140-order equations is solved using 1000 iterations. The difference between the displacement values at the characteristic points of the contour obtained by iterative and known rigorous methods is not more than 1-2%.

When calculating the values of the components of displacements and stresses near adjacent drifts of various depths (ω) and the profile shape in a slit-like transtropic massif with incomplete adhesion of layers ($\omega/a = 2.5, 3, 4, 6, \infty$) and inclined plane of isotropy ($\varphi = 0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) the study area was divided into 2064 elements with 2189 nodes.

The calculation results of the study are presented in the form of diagrams; they are analyzed in detail regarding the effect of incoming parameters on the elastic state of underground structures.

Other things being equal, the parameter ω/a significantly affects displacements near cavities of various shapes; with its decrease, the values of the latter increase (Figures 2,3).



$$H = 10M; L = 5M; R_1 = 3, 5M; R_2 = 2, 5M; \omega/a = \infty;$$

$$\psi = 90^\circ; \varphi = 30^\circ; \omega/a = 6.0; \omega/a = 2.5;$$

Figure 2: Displacement contours u (mm) around cavities of different profiles.

3 Results

Given 12 points in anisotropic rocks weakened by two elastic periodicities, the value of the change in the tangential stress $\sigma_\theta/\gamma H$ in Table 1 was obtained, depending on the proximity of the minerals, the frequency of the stress crack and displacement.

Table 1: Change in displacement depending on the transverse angle φ in the horizontal plane

Left fossil	$\varphi = 0$		$\varphi = 30^\circ$		$\varphi = 60^\circ$		$\varphi = 90^\circ$	
	u	w	u	w	u	w	u	W
1	-0,002	-1,03	0,099	-1,421	0,267	-1,057	-0,002	-0,51
2	-0,004	-0,992	0,085	-1,407	0,318	-1,058	0,006	-0,483
3	-0,007	-0,877	0,077	-1,278	0,353	-0,955	0,009	-0,408
4	-0,008	-0,71	0,069	-1,059	0,359	-0,777	0,008	-0,311
5	-0,008	-0,525	0,047	-0,799	0,321	-0,579	0,005	-0,209
6	-0,004	-0,374	0,043	-0,592	0,285	-0,407	0,002	-0,126
7	0,001	-0,317	0,063	-0,511	0,263	-0,315	-0,001	-0,096
8	0,005	-0,371	0,089	-0,564	0,246	-0,332	-0,004	-0,125
9	0,007	-0,52	0,102	-0,739	0,219	-0,462	-0,008	-0,207
10	0,008	-0,703	0,11	-0,976	0,197	-0,658	-0,01	-0,307
11	0,004	-0,871	0,11	-1,2	0,197	-0,847	-0,014	-0,404
12	0,001	-0,988	0,113	-1,361	0,224	-0,983	-0,01	-0,481
Right fossil	$\varphi = 0$		$\varphi = 30^\circ$		$\varphi = 60^\circ$		$\varphi = 90^\circ$	
	u	w	U	w	u	w	u	W
1	0,002	-1,031	0,378	-1,485	0,501	-0,823	0,002	-0,51
2	0,004	-0,992	0,396	-1,507	0,567	-0,853	-0,006	-0,483
3	0,007	-0,877	0,372	-1,374	0,584	-0,8	-0,009	-0,408
4	0,008	-0,71	0,312	-1,13	0,547	-0,678	-0,008	-0,311
5	0,008	-0,525	0,237	-0,842	0,467	-0,508	-0,005	-0,209
6	0,004	-0,374	0,153	-0,593	0,368	-0,36	-0,001	-0,126
7	-0,001	-0,317	0,082	-0,47	0,273	-0,283	0,001	-0,097
8	-0,005	-0,371	0,041	-0,5	0,204	-0,29	0,004	-0,125
9	-0,007	-0,52	0,045	-0,65	0,174	-0,363	0,008	-0,207
10	-0,008	-0,703	0,099	-0,868	0,2	-0,475	0,01	-0,308
11	-0,004	-0,871	0,185	-1,11	0,274	-0,611	0,014	-0,404
12	-0,001	-0,988	0,297	-1,33	0,382	-0,731	0,01	-0,481

4 Conclusion

When the cavities are at different levels, the stress distribution is very difficult; they change with growth w/a . At an angle of inclination of the plane of isotropy $\varphi = 0, 90^\circ$ (and slit planes)

of a slit-like massif with cavities, all other things being equal, both stress and displacement are distributed around them symmetrically with respect to the vertical axis Oz and grow with the depth of the structures stresses decrease, displacements increase with decrease w/a ; when $\varphi \neq 0, 90^\circ$ both stresses and displacements are symmetrical about the vertical axis Oz . With a length of $5D$ or more, where D is the largest diameter of the cavities, the mutual influence of the structures is negligible.

References

- [1] Muller O., "Untersuchungen an Karbongesteinen zur Klarung von Gebirgsdruckfragen", *Gluckauf* 47(1930): 1601-12.
- [2] Stocke K., "Fur das Gebirgsdruckproblem wichtige Begriffe aus der technischen Mechanik", *Zeitschrift fur des Berg-Hutten und Salinenwesen* Bd. 84, H. 11(1937): 465-67.
- [3] Muskhelishvili N.I., "Some basic tasks of the mathematical theory of elasticity", *Moscow: Nauka* (1966): 707.
- [4] Filshinsky L.A., "Stresses in Regular Double-Periodic Lattices", *Journal of Engineering. Solid Mechanics* (1967): 112.
- [5] Cosmodamian A.S., Neskoroedev M.M., "The double-periodic problem for an anisotropic medium weakened by elliptical holes", *Dopovidi AN URSSR ser. A* (1970): 148.
- [6] Yerzhanov Zh.S., Kaydarov K.K. and Tusupov M.T., "A mountain massif with incomplete adhesion of layers", *Mechanical processes in a mountain massif* Alma-Ata, Nauka (1969): 115.
- [7] Erzhanov Zh.S., Aitaliev Sh.M. and Masanov J.K., "Stability of horizontal workings in an inclined-layered massif", Alma-Ata, Nauka (1971): 160.
- [8] Segerlind L., "Application of the finite element method", M.: Mir (1979): 392.
- [9] Amusin B.Z. and Fadeev A.V., "The finite element method in solving problems of mining mechanics", M.: Nedra (1975): 142.
- [10] Yerzhanov Zh.S. and Karimbaev T.D., "The finite element method in problems of rock mechanics", Alma-Ata: Nauka (1975): 238.
- [11] Aitaliev Sh.M., Masanov Zh.K., Baymakhanov I.B. and Makhmetova N.M., "Seismic stress state of paired tunnels", *Computational methods for solving the problems of mechanics of a deformable solid* Karaganda (1987): 3-15.
- [12] Jean-Michel H., "Hydrodynamics of Free Surface Flows", *Modeling with the Finite Element Method 1st Edition* The USA (2007): 360.
- [13] Mahmetova N.M., Solonenko V.G. and Bekzhanova S.T., "The calculation of free oscillations of an anisotropic three-dimensional array of underground structures", *Bulletin of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan* (2017): 24-28.
- [14] Khoei A.E., and Haghghat, "Extended finite element modeling of deformable porous media with arbitrary interfaces", *Applied Mathematical Modeling* (2011): 5426-5441.
- [15] Iktisanov V., "Hydrodynamic research methods and modeling of multilateral horizontal wells", *Publishing house* (2007): 56.
- [16] Khodabakhshi G., Spataru C., "Development of a predictive mathematical model for fluid-porous media interaction problems", *Supplement Proceedings of ICMI* (2006): 123-138.
- [17] Vu M., Sulem J., Subrin D., Monin M., "Semi-Analytical Solution for Stresses Mathematical Model of Fluid Filtration to Horizontal Well 211 and Displacements in a Tunnel Excavated in Transversely Isotropic Formation with Non-Linear Behavior", *Rock Mechanics* (2013): 213-229.
- [18] Wang H.F., "Princeton University Press: Theory of linear poroelasticity with applications to geo mechanics and hydrogeology", *New Jersey* (2000), 276.
- [19] Ali E., Guang W., Zhiming Zh., Weixue J., "Assessments of Strength Anisotropy and Deformation Behavior of Banded Amphibolite Rocks", *Geotechnical Geological Engineering* (2014): 429-438.

- [20] Wittke W., Ernst and Sohn GmbH, "Rock Mechanics Based on an Anisotropic Jointed Rock Model", *New-York* (2014): 875.
- [21] Alabi O.O., Ajah D.T. and Abidoye L.K., "Mathematical Modeling of Hydraulic Conductivity in Homogeneous Porous Media: Influence of Porosity and Implications in Subsurface Transport of Contaminants", *Electronic Journal of Geotechnical Engineering* (2016): 89-102.

¹**K. Bissembayev**, ²**K. Sultanova**

¹Doctor of Technical Sciences, professor, Institute of Mechanics and Machine Science named after the Academician U.A. Dzholdasbekov, Almaty, Kazakhstan, E-mail: kuat_06@mail.ru

²teacher, Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: sultanovaa.86@mail.ru

STUDY OF FORCED VIBRATIONS TRANSITION PROCESSES OF VIBRATION PROTECTION DEVICES WITH ROLLING-CONTACT BEARINGS

Many seismic isolation and vibration protection devices use as an essential element the various types of rolling-contact bearings. The rolling-contact bearing is used for creation of moving base of body protected against vibration. The most dynamic disturbances acting in the constructions and structures have highly complex and irregular nature.

This article considers the oscillation of a solid body on kinematic foundations, the main elements of which are rolling bearers bounded by the high order surfaces of rotation at horizontal displacement of the foundation. It is ascertained that the equations of motion are highly nonlinear differential equations. Stationary and transitional modes of the oscillatory process of the system have been investigated. It is determined that several stationary regimes of the oscillatory process exist. Equations of motion have been investigated also by quantitative methods.

In this paper the cumulative curves in the phase plane are plotted, a qualitative analysis for singular points and study of them for stability is performed. In the Hayashi plane a cumulative curve of body protected against vibration forms a closed path which does not tend to the stability of singular point. This means that the vibration amplitude of body protected against vibration is not remain constant in steady-state, but changes periodically.

Key words: protection against vibration, rolling-contact bearing, nonlinear vibrations, cumulative curves, singular point.

¹Қ. Бисембаев, ²Қ. Сұлтанова

¹Т.ғ.д., профессор, У.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: kuat_06@mail.ru

²оқытушы, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: sultanovaa.86@mail.ru

Теңселмелі тірекке орналастырылған дірілденқорғау қондырғысының мәжбүр тербелісінің өтпелі процесстерін зерттеу

Көптеген дірілденқорғау және сейсмоқорғау қондырғыларында негізгі элемент ретінде әртүрлі түрдегі теңселмелі тіректер қолданады. Теңселмелі тірек дірілден қорғалатын денеге қозғалмалы табан жасау үшін қолданылады. Ғиаратарға және құрылғыларға әсер ететін динамикалық ұйытқытулардың көпшілігі өте күрделі және жүйесіз сипаттарда болады.

Берілген мақалада, табаны горизонталь бағытта орын ауыстырған жағыдайдағы, негізгі элементі жоғары дәрежелі айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірек болатын кинематикалық табанға орнатылған қатты дененің тербелісі қарастырылады. Қозғалыс теңдеуі айтарлықтай сызықты емес дифференциальдық теңдеу болады. Жүйенің тебелмелі процесінің стационарлы және өтпелі режимдері зерттелді. Тербелмелі процесстердің бірнеше режимдері бар екендігі тағайындалды. Қозғалыс теңдеуі сандық әдіс арқылы да зерттелді.

Бұл жұмыста, фазалық жазықтықта интегральдық қисықтар ұрғызылған, ерекше нүктелерге сапалы талдаулар жасалынып және оларды орнықтылыққа зерттеген. Хаяси жазықтығында дірілден қорғалатын дененің интегральдық қисығы тұйық траектория жасайды және ол орнықты ерекше нүктеге ұмтылмайды. Бұл дірілден қорғалатын дененің тербелісінің, орныққан режимдегі амплитудасының тұрақты болмайтындығының, оның периодты өзгертіндігін білдіреді.

Түйін сөздер: дірілден қарғайтын қондырғы, теңселмелі тірек, сызықты емес тербелістер, интегральдық қисықтар, ерекше нүктелер.

¹К. Бисембаев, ²К. Султанова

¹д.т.н., профессор, Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: kuat_06@mail.ru

²преподаватель, Казахский Национальный педагогический университет имени Абая,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: sultanovaa.86@mail.ru

Исследование переходных процессов вынужденных колебаний виброзащитных устройств на опорах качения

Во многих виброзащитных и сейсмозащитных устройствах, в качестве основного элемента используется опора качения различного вида. Опора качения применяется для создания подвижного основания виброзащищаемого тела. Большинство динамических возмущений, действующих в сооружениях и конструкциях, носит весьма сложный и нерегулярный характер.

В данной статье рассматриваются колебания твердого тела на кинематических основаниях, основными элементами которых являются подвижные опоры, ограниченные поверхностями вращения высокого порядка при горизонтальном смещении основания. Установлено, что уравнения движения являются сильно нелинейными дифференциальными уравнениями. Исследованы стационарные и переходные режимы колебательного процесса системы. Установлено, что существует несколько стационарных режимов колебательного процесса. Уравнения движения были исследованы также количественными методами.

В данной работе, построено интегральные кривые на фазовой плоскости, проведено качественное анализ на особые точки и исследовано их на устойчивость. На плоскости Хаяси интегральная кривая виброзащищаемого тела образует замкнутую траекторию, которая не стремится к устойчивой особой точке. Это означает, что амплитуда колебания виброзащищаемого тела в установившемся режиме не остается постоянной, а периодически меняются.

Ключевые слова: виброзащитные устройства, опора качения, нелинейные колебания, интегральные кривые, особая точка.

1 Introduction

The tasks considered in this work have arisen from the problems of earthquake-resistant constructing.

The essence of the matter is that the protection of building structures from the destructive forces of nature, appeared in earthquakes, is carried out almost exclusively by strengthening the structures nowadays. The taken measures, although they provide the seismic resistance of the facilities under construction to a certain extent, lead to a rise in the cost of construction in seismically active areas, depending on the seismic zone score. Therefore, along with further improvement of measures to increase the seismic resistance of building structures, clarifying the parameters of seismic effects and the values of the calculated seismic loads, the search for new effective methods of seismic protection is of great relevance.

First of all, these searches are carried out by developing new structures and their elements that ensure reliability and high economic efficiency of construction in seismic areas.

The use of devices called seismic insulating foundations involves the counteraction of building structures to seismic forces not by improving the strength properties of structures, but, as it is done in a wide variety of vibration protection systems, by reducing the seismic load on the protected objects. This is quite new for the earthquake-resistant constructing.

In work [1] we gave a review, a classification and the comparison of the devices designed to reduce the seismic load on buildings and which are the integral part of their foundations. Two classes of seismic isolating devices have been identified, which are the example of the direct transfer of vibro-isolation principles to constructing.

These are foundations with elastic support elements and dynamic dampers of seismic vibrations. Two classes of shock absorbers of a different kind have been established:

1. Foundations with servomechanisms, which include rigid supports with an indifferent or even unstable equilibrium position (balls, rollers, vertically arranged spars, etc.) and servomechanisms that return the building to its equilibrium position; at the same time, a compromise solution is often given, combining rolling or sliding bearings and elastic shock absorbers that replace servomechanisms;

2. Kinematic foundations, in which, as in foundations with servomechanisms, the seismic isolation is carried out not due to the elasticity of the shock absorber, but using supports of a special geometric shape; a building, a structure installed on such supports, has a stable equilibrium position, when removed from that position it oscillates with a frequency that depends [1,2] mainly on the geometric dimensions of the supports and the acceleration of gravity (for this reason, such devices are called kinematic [2] and [3] gravitational seismic isolation systems);

3. The most acceptable and promising from an engineering point of view, as noted in [1, 3], is the newest class of seismic isolating devices — a class of supporting kinematic foundations that favorably differ from other types of seismic shock absorbers in cost-effectiveness and simplicity of technical solution.

The kinematic supports developed in connection with the requests of earthquake-resistant constructions can be used as shock absorbers in vibro-isolation systems of various machines and equipment, and as elements of devices as well.

This article [19, 20] considers the oscillation of a solid body on kinematic foundations, the main elements of which are rolling bearers bounded by high-order surfaces of rotation at horizontal displacement of the foundation. Equations of motion of the vibro-protected body have been obtained. Stationary and transitional modes of the oscillatory process of the system have been investigated.

The work contains geometrical analysis of non-linear vibrations of vibro-protective systems on rolling bearers bearing elements of which are restricted by high order spherical surfaces in transition regime.

2 Literature review

Rolling bodies of various types are applied as the main element in many vibro-protective and seismo-protective devices.

The work [4] contains systematic depiction of non-linear systems analysis method, described by differential equations of second rate. This work contains also topological and

graphical methods, applicable for calculation of autonomic and, especially, non-autonomic systems.

In the work [5] the author focuses attention on decision of tasks on determination of orders of initial conditions, leading to various stable stationary decisions. In the work [6] the author considers problems of self-oscillations of various mechanical systems, particularly, examines in detail self-oscillations of rotors.

The work [7] studies the features of vibrational motion of an orthogonal mechanism with disturbances, such as restricted power in the presence of a fixed load on the horizontal link. Dynamic and mathematical models were prepared, and the operating conditions' fields of existence for the vibration mechanism in terms of the driving power were defined.

This paper [8] presents results of modelling of vibrations of rigid rotor caused by the degradation of hydrodynamic bearings. Model is composed applying equations of nonlinear hydrodynamic forces and measured parameters of a real rotary machine.

In order to study the resonance of a rotating circular plate under static loads in magnetic field, in the work [9] the nonlinear vibration equation about the spinning circular plate is derived according to Hamilton principle. The algebraic expression of the initial deflection and the magneto elastic forced disturbance differential equation are obtained through the application of Galerkin integral method.

This paper [10] presents a new semi analytical approach for geometrically nonlinear vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with different boundary conditions. The method makes use of Linstedt-Poincar'e perturbation technique to transform the nonlinear governing equations into a linear differential equation system, whose solutions are then sought through the use of differential quadrature approximation in space domain and an analytical series expansion in time domain.

In the work [11] a systematic method is developed for the dynamic analysis of the structures with sliding isolation which is a highly non-linear dynamic problem. According to the proposed method, a unified motion equation can be adapted for both stick and slip modes of the system. Unlike the traditional methods by which the integration interval has to be chopped into infinitesimal pieces during the transition of sliding and non-sliding modes, the integration interval remains constant throughout the whole process of the dynamic analysis by the proposed method so that accuracy and efficiency in the analysis of the non-linear system can be enhanced to a large extent.

The paper [12] features a survey of some recent developments in asymptotic techniques, which are valid not only for weakly nonlinear equations, but also for strongly ones. Further, the obtained approximate analytical solutions are valid for the whole solution domain. The limitations of traditional perturbation methods are illustrated, various modified perturbation techniques are proposed, and some mathematical tools such as variational theory, homotopy technology, and iteration technique are introduced to over-come the shortcomings.

The effects of neglecting small harmonic terms on estimation of dynamical stability of the steady state solution determined in the frequency domain are considered in the paper[13]. For that purpose, a simple single-degree- of-freedom piecewise linear system excited by a harmonic excitation is analyzed. In the time domain, steady state solutions are obtained by using the method of piecing the exact solutions (MPES) and in the frequency domain, by the incremental harmonic balance method(IHBM). The stability of the solutions obtained in the frequency domain by IHBM is determined by using Floquet-Liapounov theorem and by

digital simulation of the corresponding perturbed motion.

In the paper [14] the nonlinear response of a base-excited slender beam carrying an attached mass is investigated with 1:3:9 internal resonances for principal and combination parametric resonances.

3 Material and methods

3.1 Equations of the motion

Let us consider the principle of work of the kinematic foundation of moving supporting elements, which is a rolling bearing with bounded surfaces of rotation of a high (n) order (Fig.1).

On the Figure 1, the object I is a rolling bearing with bounded (top and bottom) surfaces of rotation, expressed by formulas

$$y_1 = a_1 x_1^n, \quad y_2 = a_2 x_1^m \quad (1)$$

and having a common axis of symmetry; but objects 2 and 3 are stationary base (foundation) and inner coat of the vibro-protected body.

Equations (1) are referred to the coordinate system associated with the rolling bearings (See Fig.1). The curvature radius of the vertices of these surfaces at $n, m > 2$ tends to infinity, i.e. there is straightening of the bearing surfaces. Let us denote the horizontal offset of the bases as $\tilde{x}_0(t)$. As $\tilde{x}(t)$ we denote a displacement of the upper body, supporting on the rolling bearing.

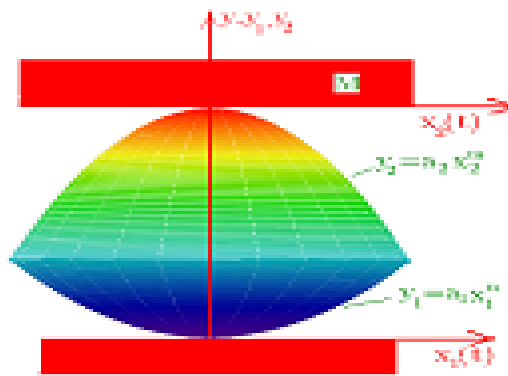


Figure 1: Scheme of rolling bearings with higher order surfaces

The equation (2) can be reduced to an equation in dimensionless form [19]:

$$\ddot{x} + \Phi(x - x_0) - x = -x_0(t), \quad (2)$$

where

$$\Phi(x - x_0) = N_n (x - x_0)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (3)$$

$$N_n = \frac{1}{n^{-1}\sqrt{n}H} \left(\frac{1}{n^{-1}\sqrt{a_1}} + \frac{1}{n^{-1}\sqrt{a_2}} \right). \quad (4)$$

3.2 Periodic solutions and their stability

Let us study the vibrations of a body at harmonic horizontal displacement of the lower base

$$x_0(t) = Q \sin pt, \quad (5)$$

where Q and p – dimensionless amplitude and frequency of perturbations.

Assuming that in the case of harmonic oscillations, a component of the fundamental frequency, having period $2\pi/p$, dominates over the higher harmonics. Periodic solution and first derivative of the equation (5) can be approximately represented as,

$$x = a \sin pt + b \cos pt, \quad \dot{x} = ap \cos pt - bp \sin pt, \quad (6)$$

Let us suppose that the amplitudes a and b are functions of time and slowly vary depending on t .

For the nonlinear term of the equation (2), Fourier series expansion looks as:

$$\Phi(x-x_0) = N_n C \frac{1}{n-1} \sin^{n-1}(pt+\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1} \sin(2k-1)pt + D_{2k-1} \cos(2k-1)pt, \quad (7)$$

where

$$C = \sqrt{(a-Q)^2 + b^2}, \quad tg\gamma = \frac{b}{a-Q}, \quad B_{2k-1} = N_n K_{2k-1} \frac{(a-Q)}{[(a-Q)^2 + b^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}}, \quad (8)$$

$$D_{2k-1} = N_n K_{2k-1} \frac{b}{[(a-Q)^2 + b^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}}, \quad K_{2k-1} = \sqrt{L_{2k-1}^2 + M_{2k-1}^2},$$

$$L_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{n-1} \psi \sin(2k-1)\psi d\psi, \quad M_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{n-1} \psi \cos(2k-1)\psi d\psi, \quad \psi = pt + \gamma.$$

Substituting (6), (7) to (2) and equating to zero the individual coefficients of the terms, containing $\sin pt$ and $\cos pt$, we have

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{p} \left\{ (p^2 + 1) - N_n K_1 \frac{1}{[(a-Q)^2 + b^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}} \right\} b = X(a, b),$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{p} \left\{ \left[\frac{(p^2 + 1) - N_n K_1 \frac{1}{[(a-Q)^2 + b^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}}}{n-2} \right] (a-Q) + p^2 Q \right\} = Y(a, b). \quad (9)$$

Let us consider the steady state, when amplitudes $a(t)$ and $b(t)$ in (6) are constant, i.e.

$$\frac{da}{dt} = X(a, b) = 0, \quad \frac{db}{dt} = Y(a, b) = 0. \quad (10)$$

In light of these conditions, from equations (9) we can get that the set amplitude $a_0 = A$, $b_0 = 0$ of the periodic solution $x(t)$ is determined by the formula

$$A = \frac{1}{p^2 + 1} \left[N_n K_1 (A - Q) \frac{1}{n-1} + Q \right]. \quad (11)$$

Let us derive the conditions for the stability of periodic solutions. We will consider small deviations ξ and η from the amplitudes a_0 and b_0 and will find out, when these deviations (with increasing time) are close to zero.

From equation (9) we get

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta, \quad (12)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta,$$

Where

$$\alpha_1 = \frac{(n-2)}{(n-1)} \frac{1}{p} \frac{W_0}{C_0^2} (a_0 - Q) b_0,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{p} \left\{ (p^2 + 1) - W_0 + \frac{(n-2)}{(n-1)} \frac{W_0}{C_0^2} b_0^2 \right\}, \quad (13)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{p} \left\{ -(p^2 + 1) + W_0 - \frac{(n-2)}{(n-1)} \frac{W_0}{C_0^2} (a_0 - Q)^2 \right\},$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{p} \left\{ \frac{(n-2)}{(n-1)} \frac{W_0}{C_0^2} (a_0 - Q) b_0 \right\},$$

where

$$W_0 = \frac{N_n K_1}{\frac{n-2}{C_0^{n-1}}}, \quad C_0 = A - Q.$$

The characteristic equation of the system has the form:

$$\lambda^2 - (\alpha_1 + \beta_2)\lambda + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0. \quad (14)$$

The stability condition is given by Routh-Hurwitz criteria, i.e.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_2 &= 0, \quad (\alpha_1 = 0, \beta_2 = 0). \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 &> 0 \end{aligned}$$

to

$$\left[(p^2 + 1) - W_0 \right] \left[(p^2 + 1) - \frac{W_0}{n-1} \right] > 0. \quad (15)$$

The singular point, i.e. steady system state, is a center.

The boundary of unstable periodic solutions of equations (9) is determined by the curves.

$$p^2 = W_0 - 1, \quad p^2 = \frac{W_0}{n-1} - 1 \quad (16)$$

and stability areas are determined by the following inequalities [19]

$$\begin{aligned} p^2 - (W_0 - 1) > 0, \quad p^2 - \left(\frac{W_0}{n-1} - 1 \right) > 0, \\ p^2 - (W_0 - 1) < 0, \quad p^2 - \left(\frac{W_0}{n-1} - 1 \right) < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

4 Simulation Results: Geometric analysis of the integral curves

From equation (9), we have

$$Y(a, b)da - X(a, b)db = 0. \quad (18)$$

As due to equations (9) $\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} = 0$, the equation (9) becomes integrable, and its complete integral has the form

$$-(p^2 + 1)\frac{C^2}{2} + \frac{2(n-1)}{n}N_n K_1 C^{\frac{n}{n-1}} - p^2 Qa = E, \quad (19)$$

where E – constant of integration. In order to examine the integral curves in the neighborhood of a singular point, we move the origin of coordinates to this particular point a_0, b_0 introducing new variables ξ and η , namely:

$$a = a_0 + \xi, \quad b = b_0 + \eta.$$

Then the basic system of equations (9) takes the form,

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{1}{p} \left[\frac{1}{2}b_0\xi^2 + (a_0 - Q)\xi\eta + \frac{3}{2}b_0\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^3 \right] \frac{W_0}{C_0^2}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \beta_1\xi + \beta_2\eta + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{1}{p} \left[\frac{3}{2}(a_0 - Q)\xi^2 + b_0\xi\eta + \frac{1}{2}(a_0 - Q)\eta^2 + \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^3 \right] \frac{W_0}{C_0^2},\end{aligned}\quad (20)$$

where the following relations are used

$$W = W_0 - \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{W_0}{C_0^2} \left[(a_0 - Q)\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + b_0\eta + \frac{1}{2}\eta^2 \right], \quad W = \frac{N_n K_1}{C^{n-1}}, \quad W_0 = \frac{N_n K_1}{C_0^{n-1}}$$

Taking into account that $b_0 = 0$ due to the equation (9), we get

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \bar{\alpha}_2\eta + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{1}{p} \frac{N_n K_1}{(a_0 - Q) \frac{3n-4}{n-1}} \left[(a_0 - Q)\xi\eta + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^3 \right], \\ \frac{d\eta}{dt} &= \bar{\beta}_1\xi + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{1}{p} \frac{N_n K_1}{(a_0 - Q) \frac{3n-4}{n-1}} \left[\frac{3}{2}(a_0 - Q)\xi^2 + \frac{1}{2}(a_0 - Q)\eta^2 + \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^3 \right],\end{aligned}\quad (21)$$

where

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{1}{p} \left[(p^2 + 1) - \frac{N_n K_1}{(a_0 - Q) \frac{n-2}{n-1}} \right], \quad \bar{\beta}_1 = \frac{1}{p} \left[-(p^2 + 1) - \frac{N_n K_1}{(n-1)(a_0 - Q) \frac{n-2}{n-1}} \right].$$

Equations (21) are integrated. As a result of integration we obtain

$$\bar{\beta}_1\xi^2 - \bar{\alpha}_2\eta^2 + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{1}{p} \frac{N_n K_1}{(a_0 - Q) \frac{3n-4}{n-1}} \left[(a_0 - Q)\xi^3 + \frac{1}{4}(\xi^4 - \eta^4) \right] = F, \quad (22)$$

where F – constant of integration.

In order to classify the type of singular points, we calculate the roots of the characteristic equation (14):

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_1 + \beta_2 \pm \sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\alpha_2\beta_1}}{2},$$

where from

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm\sqrt{\alpha_2\beta_1}, \quad \alpha_1 + \beta_2 = 0.$$

The dependence curve between Q and A_0 is presented on Fig. 2. Let us divide the curve into three parts 1, 2, 3 (as shown in Fig. 2): the boundaries of each part are determined by the points D and B , for which,

$$A = \frac{N_n K_1}{p^2 + 1} \sqrt[n-2]{\frac{N_n K_1}{p^2 + 1}},$$

$$A = \frac{[(n-1)(p^2+1)-1]}{(n-1)(p^2+1)p^2} \cdot \sqrt[n-2]{\frac{N_n K_1}{(n-1)(p^2+1)}}.$$

These areas correspond to the following special terms:

1. Center ($\alpha_2\beta_1 < 0$)
2. Saddle ($\alpha_2\beta_1 > 0$)
3. Center ($\alpha_2\beta_1 < 0$)

We shall consider the case when $Q = 0.014081$. Here there are three possible states of equilibrium (Fig. 2); data for the respective singular points are shown in Table 1.

Table 1. – Singular points (Fig. 3)

Singular point	A_0	λ_1, λ_2	μ_1, μ_2	Classification
1	-0.055919	$\pm 1.209i$		Center
2	0.045107	1.552	∓ 1.139	Saddle
3	0.015344	$\pm 18.965i$		Center

Directions of the integral curves at the singular points (node and saddle) can be found by the following expression

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\alpha_1 - \beta_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\alpha_2\beta_1}}{2\alpha_2}.$$

Integral curves of equation (9) can be easily obtained by using equation (19) for different values of E . The results are shown in Fig. 3. We see that in a conservative system, each integral curve forms a closed trajectory, which does not tend to a stable singular point.

This means that the amplitude and phase fluctuations angle in a steady state do not remain constant, but vary periodically. Thus the phase fluctuations can outperform an external force and be behind it. If a closed trajectory does not cover the origin of coordinates, so the angle of advance and the angle of retard are mutually compensated after passing the representation point over a closed trajectory, and an oscillation will be synchronized with an external force. On the other hand, if the origin of coordinates is located inside a closed trajectory, so as a result of each cycle, there will be a phase difference of 2π radian, and oscillation will not be synchronized with the external force.

a. The integral curves of the system, corresponding to the point D (Fig. 2).

Assuming that $Q = 0$ in equations (9), we have

$$\frac{db}{da} = -\frac{a}{b}$$

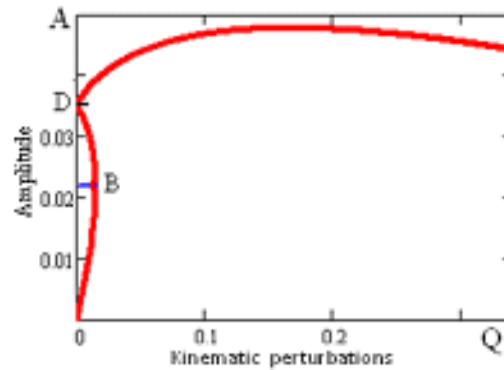


Figure 2: Amplitude response curve for harmonic vibration

or after integration

$$a^2 + b^2 = \text{const.}$$

Consequently, the integral curves form a family of concentric circles with a center at the coordinate origin, so that the singular point (in this case - the origin of coordinates) is a center.

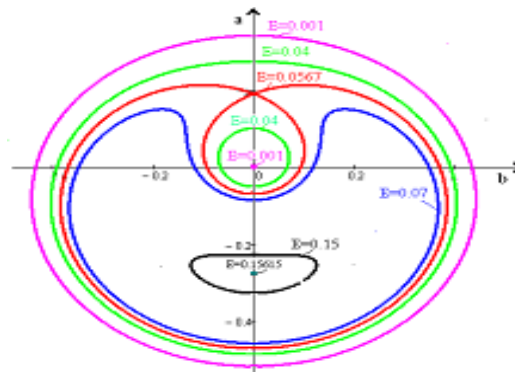


Figure 3: Cumulative curves for harmonic vibration

Period T , necessary in order to the representation points $a(t)$ and $b(t)$ make one revolution along a closed trajectory, is defined by the expression.

$$T = \oint \frac{ds}{\sqrt{X^2(a, b) + Y^2(a, b)}} = \oint \frac{p ds}{[p^2 - (W - 1)] A} = \frac{2\pi p}{p^2 - (W - 1)}, \quad (23)$$

$$ds = \sqrt{(da)^2 + (db)^2}, \quad W = \frac{N_n K_1}{n - 2} \cdot \frac{1}{A n - 1}$$

Now let us suppose, that the initial condition is given by the point $a(0)$, $b(0)$ located on a

circle of radius $A = \left(\frac{N_n K_1}{p^2 + 1}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$; then the period T will be equal to infinity. As can be seen from the equations (9), the representation point $a(t)$, $b(t)$ in this case remains in its initial position. This means that the oscillation frequency coincides with the frequency of the external forces. Then from equations (9) we can see that the representation point $a(t)$, $b(t)$ is moving circumferentially in the counterclockwise direction when $A > \left(\frac{N_n K_1}{p^2 + 1}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$, and in the clockwise direction – when $A < \left(\frac{N_n K_1}{p^2 + 1}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$.

In the first case, the oscillation frequency is higher than the external force; in the second case, the pattern will be reversed. So we can conclude, that the oscillation frequency varies depending on A and coincides with the frequency of an external force only in the case where

$$A = \left(\frac{N_n K_1}{p^2 + 1}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}.$$

b. The integral curves of the system, corresponding to the point B (Fig. 2)

In this case, from equations (11), we obtain

$$Q = \frac{(n-1)(p^2+1)}{p^2} \left[\frac{N_n K_1}{(n-1)(p^2+1)} \right]^{\frac{n-1}{n-2}}, \quad b_0 = 0, \quad (24)$$

$$a_0 = A = \frac{n(p^2+1)-1}{p^2} \cdot \left[\frac{N_n K_1}{(n-1)(p^2+1)} \right]^{\frac{n-1}{n-2}}.$$

Let us investigate nature of the singular point B . From (21) we have

$$\bar{\alpha}_2 = -(n-2)\frac{p^2+1}{p}, \quad \bar{\beta}_1 = 0,$$

Where from $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Then equation (21) takes the form

$$\frac{d\xi}{dt} = -\gamma\xi + C_1(C_0\xi\eta + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^3), \quad (25)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}C_1(3C_0\xi^2 + C_0\eta^2 + \xi\eta^2 + \xi^3),$$

Where

$$\gamma = (n-2)\frac{p^2+1}{p}, \quad C_1 = \frac{1}{p} \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \frac{[(n-1)(p^2+1)]^{\frac{3n-4}{n-2}}}{(N_n K_1)^2}, \quad (26)$$

$$C_0 = \left[\frac{N_n K_1}{(n-1)(p^2+1)} \right].$$

Substituting $dz = -\gamma dt$, we get

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dz} &= \eta - \frac{C_1}{\gamma} \left(C_0 \xi \eta + \frac{1}{2} \xi^2 \eta + \frac{1}{2} \eta^3 \right), \\ \frac{d\eta}{dz} &= -\frac{C_1}{2\gamma} (3C_0 \xi^2 + C_0 \eta^2 + \xi \eta^2 + \xi^3).\end{aligned}\tag{27}$$

Integral curves in the plane ξ, η approach to the origin of coordinates, touching the straight line $\eta = 0$. Applying the substitution $\eta = x_1 \xi$, we have

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dz} &= x_1 \xi - \frac{C_1 C_0}{\gamma} x_1 \xi^2 - \frac{C_1}{2\gamma} x_1 \xi^3 - \frac{C_1}{2\gamma} x_1^3 \xi^3 \\ \frac{dx_1}{dz} &= -\frac{3C_1 C_0}{2\gamma} \xi - x_1^2 - \frac{C_1}{2\gamma} \xi^2 + \frac{C_1 C_0}{2\gamma} x_1^2 \xi + \frac{C_1}{2\gamma} x_1^4 \xi^2\end{aligned}\tag{28}$$

Now the integral curves in the plane ξx approach to the origin of coordinates, touching the straight line $\xi = 0$. Next, using the substitution $\xi = x_1 y_1$, equation (28) is reduced to the form:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dz} &= \frac{3C_1 C_0}{2\gamma} y_1^2 + 2x_1 y_1 + \left\{ -\frac{C_1}{2\gamma} x_1 y_1^3 - \frac{3C_1 C_0}{2\gamma} x_1^2 y_1^2 - \frac{C_1}{2\gamma} x_1^3 y_1^3 - \frac{C_1}{\gamma} x_1^5 y_1^3 \right\} \\ \frac{dx_1}{dz} &= -\frac{3C_1 C_0}{2\gamma} x_1 y_1 - x_1^2 + \frac{C_1}{2\gamma} \{ -x_1^2 y_1^2 + C_0 x_1^3 y_1 + x_1^6 y_1^2 \}\end{aligned}\tag{29}$$

Tangents to the integral curves at the coordinate origin on the plane x_1, y_1 are determined by the Theorem of Bendixson [4]

$$x_1 y_1 \left(x_1 + \frac{C_1 C_0}{\gamma} y_1 \right) = 0\tag{30}$$

However, in the equation tangents $x_1 = 0, y_1 = 0$ degenerate at the coordinate origin of the plane ξ, η , therefore, we consider only the integral curves, having at the coordinate origin a tangent $x_1 + \frac{C_1 C_0}{\gamma} y_1 = 0$. For this purpose, we apply the transformation

$$x_1 = \left(x_2 - \frac{C_1 C_0}{\gamma} \right) y_1$$

Then equation (29) takes the form

$$y_1 \frac{dx_2}{dy_2} = \frac{-\frac{3C_1 C_0}{\gamma} x_2 + 3x_2^2 + y_1^2 \varphi(x_2, y_2)}{\frac{C_1 C_0}{\gamma} - 2x_2 + y_1^2 \psi(x_2, y_1)}\tag{31}$$

where $\varphi(x_2, y_1)$ and $\psi(x_2, y_1)$ are polynomials relatively x_2 and y_1 . Equation (31) can be presented as:

$$y_1 \frac{dx_2}{dy_1} = -6x_2 + B(x_2, y_1) \quad (32)$$

where $B(x_2, y_1)$ consists of the terms of higher degree relatively x_2 and y_1 . Bendixson investigated the differential equation of the form

$$x''' \frac{dy}{dx} = ay + bx + B(x, y) \quad (33)$$

and determined, that if $a < 0$, m – an odd number, then the origin of coordinates is a saddle point.

For equation (32) we have $m = 1$ (odd number) and $a = -b < 0$ so, the singular point $(x_2 = 0, y_1 = 0)$ is a saddle; and the integral curves tend to it, having tangents $x_2 = 0, y_1 = 0$. Thus, as a result of all the transformations we have

$$\xi = x_1 y_1 = (x_2 - \frac{C_1 C_0}{\gamma}) y_1^2, \quad \eta = x_1 \xi = x_1^2 y_1 = (\frac{C_1 C_0}{\gamma})^2 y_1^3$$

As it was mentioned previously, tangent $y_1 = 0$ in the plane ξ, η reduces to the origin of coordinates; tangent $x_2 = 0$ enters the curve

$$\xi = -\frac{C_1 C_0}{\gamma} y_1^2, \quad \eta = (\frac{C_1 C_0}{\gamma})^2 y_1^3 \quad (34)$$

and we can assume, that it represents the integral curves in the neighborhood of the origin of the plane ξ, η .

Fig. 4 (in the corresponding coordinates) represents the tangent $x_2 = 0$.

In conclusion we shall note, that this singular point is a saddle-node: as it can be seen from the equations (25), the representation point $\xi(t), \eta(t)$ with increasing time is moving along the integral curve along the direction, indicated by arrows.

5 Conclusions

Peculiarities of integral curves of vibro-protective systems on rolling bearings in absence of rolling friction are investigated. Special points of integral curves are defined and it is ascertained that special points are centre, saddle and centre. The special point D (in this case the point of reference) is centre. Oscillation frequency (fig.8) changes depending on A and coincides with frequency of external force frequency only in case, when $A = (N_n K_1 / p^2 + 1)^{\frac{n-1}{n-2}}$.

The special point B is regarded as saddle-knot.

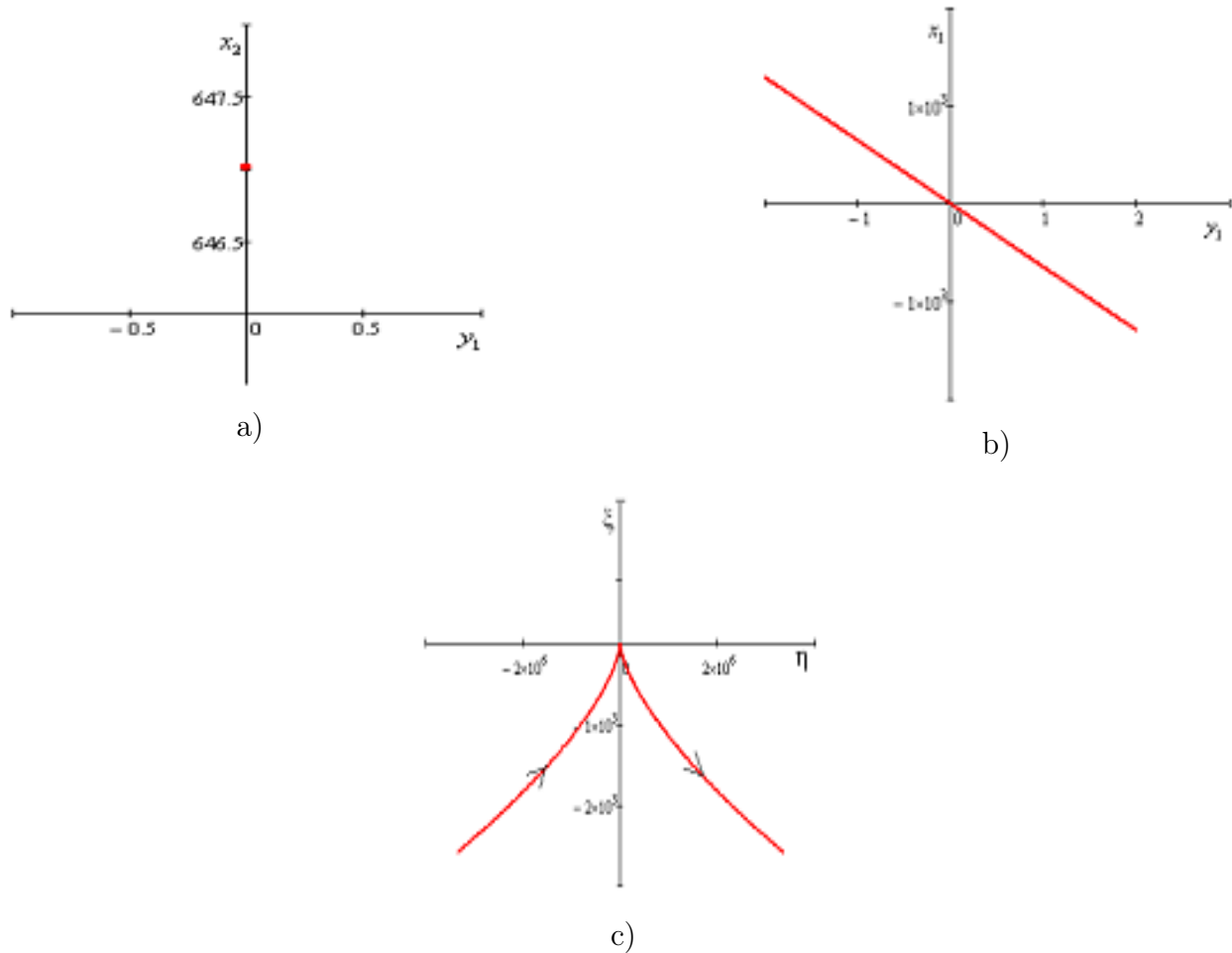


Figure 4: Integral curves in respective coordinates: a special point suits the point B in Fig. 2

References

- [1] Zelenskiy G.A., Shevlyakov Yu.A. "Seismoizolyatsiya zdaniy [Seismic isolation of buildings]", *M., Osnovaniya, fundamentyi i mehanika gruntov* No 4 (1976): 19-21.
- [2] Cherepinskiy Yu.D. "K seysmostoykosti zdaniy na kinematicheskikh oporah [To earthquake resistance of buildings on kinematic supports]", *M., Osnovaniya, fundamentyi i mehanika gruntov* No 3 (1973): 104-107.
- [3] Polyakov S.V. "Sovremennoe sostoyanie i osnovnyie napravleniya v oblasti seysmostoykogo stroitelstva [Current state and main directions in the field of earthquake-resistant construction]", *Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy* No 4 (1975): 8.
- [4] Hayashi T. "Nonlinear oscillations in physical systems", *M.: Mir* (1968).
- [5] Tondl A. "Nonlinear vibrations of mechanical systems", *M.: Mir* (1973).
- [6] Tondl A. "Autooscillations of mechanical systems", *M.: Mir* (1979).
- [7] Bissembayev K., Iskakov Zh. "Oscillations of the orthogonal mechanism with a non-ideal source of energy in the presence of a load on the operating link", *Mechanism and Machine Theory* 92 (2015): 153-170.
- [8] Jonušas R., Juzėnas E., Juzėnas K., Meslinas N. "Modelling of rotor dynamics caused by ofdegradingbearings", *Mechanika* Vol. 18(4) (2012): 438-441.

- [9] Hu Yuda, Wang Tong. "Nonlinear resonance of the rotating circular plate under static loads in magnetic field", *Chinese journal of mechanical engineering* Vol. 28(6) (2015): 1277-1284.
- [10] Jian-She Peng, Yan Liu, Jie Yang. "A semi-analytical method for nonlinear vibration of Euler-Bernoulli beams with general boundary conditions", *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering* Vol. 2010 (2010): 1-17.
- [11] Yen-Po Wang, Lap-Loi Chung, Wei-Hsin Liao. "Seismic response analysis of bridges isolated with friction pendulum bearings", *Earthquake engineering and structural dynamics* Volume 27, Issue 10 (1998): 1069-1093.
- [12] Ji-Huan He. "Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations", *International Journal of Modern Physics* Vol. 20(10) (2006): 1141-1199.
- [13] Wolf H., Stegi M. "The influence of neglecting small harmonic terms on estimation of dynamical stability of the response of non-linear oscillators", *Computational Mechanics. Springer-Verlag* 24 (1999): 230-237.
- [14] Dwivedy S.K., Kar R.C. "Nonlinear Dynamics of a Cantilever Beam Carrying an Attached Mass with 1:3:9 Internal Resonances", *Nonlinear Dynamics* 31 (2003): 49-72.
- [15] Moiseyev N.N. "Asymptotic methods of non-linear mechanics", *Moscow: Science* (1969).
- [16] Bogolyubov N.N., Miropol'skiy Yu.A. "Asymptotic techniques of nonlinear vibrations theory", *Moscow: Nauka* (1974).
- [17] Marinca V., Herisanu N. "Nonlinear Dynamical Systems in Engineering: Some Approximate Approaches", *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (2011).
- [18] David Y. Gao, Vadim A. Krysko. "Introduction to Asymptotic Methods", *CRC Series: Modern Mechanics and Mathematics. Chapman & Hall // CPC Taylor Francis Group* (2006).
- [19] Bissembayev K., Jomartov A., Tuleshov A., Dikambay T. "Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers, the bearing elements of which have the form of higher order surfaces", *Machines* Vol. 7, Issue 3 (2019): 1-21.
- [20] Bissembayev K., Omirzhanova Zh., Sultanova K. "Oscillations specific for the homogeneous rod like elastic structure on the kinematic absorber basis with rolling bearers having straightened surfaces", *Springer Nature Switzerland AG, IFToMM ITALY, MMS* 68(58) (2019): 187-195.

¹A.K. Tuleshov, ²B.M. Merkitabayeva , ³B.I. Akhmetova 

¹Dr. Sc., Professor, U.A.Dzholdasbekov Institute of Mechanics and Machine Science, Almaty, Kazakhstan, E-mail: aman_58@mail.ru

²PhD student, E-mail: bakhyta23@mail.ru

³PhD student, E-mail: balzhanibragimovna@mail.ru

^{2,3}Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

KINEMATIC ANALYSIS AND SYNTHESIS OF THE LEVER MECHANISM OF CRANK PRESS STAMPING

Expanding technical and technological capabilities of forging and stamping machines and equipment can be carried out by introducing new designs of actuators with wide functionality. These features are provided by the crank lever mechanisms of the press. This article presents a kinematic analysis and synthesis of a six-lever mechanism for stamping a crank press with a forging feed mechanism. We propose an analytical method for kinematic analysis of the mechanism, which allowed us to implement a numerical calculation program in the integrated Maple environment. Methods of kinematic synthesis of the six-lever crank press mechanism based on the standard-square approximation, as well as the synthesis of the four-lever crank-slide forging feed mechanism have been developed. All the required constant geometric parameters of the stamping mechanism are determined; as a result, the mechanism implements the specified law of motion of the working slider with high accuracy. The comparative analysis was carried out in the ASIAN-2014 environment.

Key words: crank, press, linkage, the slider, the treatment of materials by pressure.

¹А.К. Тулешов, ²Б.М. Меркибаева, ³Б.А. Ахметова

¹т.ғ.д., проф., Ө.А. Джолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: aman_58@mail.ru

²PhD докторант, E-mail: bakhyta23@mail.ru

³PhD докторант, E-mail: balzhanibragimovna@mail.ru

^{2,3}Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Қосінді пресстің иінтіректі штампылау механизмін кинематикалық талдау және синтездеу

Ұсталық-штампылау машиналары мен жабдықтарының техникалық және технологиялық мүмкіндіктерін кеңейтуді кең функционалды мүмкіндіктері бар атқарушы механизмдердің жаңа құрылымдарын енгізу есебінен жүргізуге болады. Мұндай мүмкіндіктерге пресстің қосінді иінтіректі механизмдері ие. Бұл мақалада соғуды беру механизмі бар қосінді прессті штампылаудың алтыбуынды иінтіректі механизмінің кинематикалық талдауы және синтезі берілген. Механизмді кинематикалық талдау үшін аналитикалық әдіс ұсынылған, бұл интегралдық Maple ортасында сандық есептеу бағдарламасын жүзеге асыруға мүмкіндік берді. Орташа квадраттық жуықтау, сондай-ақ соғуды берудің төрт буынды қосінді-жүгірткі механизмінің синтезі негізінде қосінді пресстің алтыбуынды механизмінің кинематикалық синтезі әдістері әзірленді. Штампылау механизмінің барлық іздестірілетін тұрақты геометриялық параметрлері анықталды, нәтижесінде механизм жұмыс жүгірткісі қозғалысының берілген заңын жоғары дәлдікпен іске асырады. Салыстырмалы талдау ASIAN-2014 аймағында жүргізілді.

Түйін сөздер: қосиін, пресс, иінтіректі механизм, жүгірткі, материалдарды қысыммен өңдеу.

¹А.К. Тулешов, ²Б.М. Меркибаева, ³Б.А. Ахметова

¹д.т.н., проф. Институт механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан, E-mail: aman_58@mail.ru

²PhD докторант, E-mail: bakhyta23@mail.ru

³PhD докторант, E-mail: balzhanibragimovna@mail.ru

^{2,3}Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

Кинематический анализ и синтез рычажного механизма штамповки кривошипного прессы

Расширение технических и технологических возможностей кузнечно-штамповочных машин и оборудования можно проводить за счет внедрения новых конструкций исполнительных механизмов с широкими функциональными возможностями. Такими возможностями обладает кривошипные рычажные механизмы прессы. В данной статье представлен кинематический анализ и синтез шестизвенного рычажного механизма штамповки кривошипного прессы с механизмом подачи поковки. Предлагается аналитический метод кинематического анализа механизма, который позволил реализовать программу численного расчета в интегрированной среде Maple. Разработаны методы кинематического синтеза шестизвенного механизма кривошипного прессы на основе среднеквадратического приближения, также синтеза четырехзвенного кривошипно-ползунного механизма подачи поковки. Определены все искомые постоянные геометрические параметры механизма штамповки, в результате механизм с высокой точностью реализовывает заданный закон движения рабочего ползуна. Сравнительный анализ проведен в среде ANSYS-2014.

Ключевые слова: кривошип, пресс, рычажный механизм, ползун, обработка материалов давлением.

1 Introduction

To increase the competitiveness of forging and stamping equipment, it is necessary to increase its operational characteristics (accuracy, durability, efficiency, high manufacturability) while reducing overall development and production costs [1, 2]. This encourages the transition to modern design methods based on mathematical modeling of ongoing processes throughout the technological cycle and rational use of modern CAD tools. Expanding the technical and technological capabilities of forging machines and equipment can be carried out by introducing new designs of actuators with wide functionality. These features are provided by the crank lever mechanisms of the press. The development begins with solving the problems of kinematic synthesis and analysis of mechanisms.

2 Literature review

The development of new machine mechanism designs, including crank presses [1], begins with solving problems of analysis and synthesis based on mathematical modeling. When implementing the technological process in crank presses, it is necessary to provide a specified cyclogram of the movement of the working slider: fast ascent, dwell, slow descent. Research on crank presses considers two ways to achieve this goal, the first is to synthesize a mechanism with a single degree of freedom [2, 3, 4, 5], where these properties are embedded in the properties of the kinematic chain, the second is the solution of this problem due to the additional freedom of the kinematic chain, which are called the hybrid press system [6].

M. Erkan Kyutyuk's work [6] provides a review of the scientific literature on the analysis and synthesis of hybrid mechanisms of crank presses. In this paper, we consider a seven-way

lever mechanism with two degrees of freedom (2 DOF), in which one degree operates on the basis of a DC power motor (for the implementation of the main technological process), the second – on the basis of a servomotor to provide a cyclogram of the technological process.

In many other studies, hybrid press systems are based on five-link and seven-link mechanisms with two degrees of freedom. The first study of this kind was performed by Dulger (originally Tokuz) and Jones in a hybrid configuration [7, 8, 9]. The constant-speed engine and servomotor were combined by a differential transmission, which further drives the crank mechanism [7].

Yuan and others explored the two combined machines having seven links, two DOF linkage [10]. Ouyang et al. proposed a five-link lever mechanism consisting of a five bar linkage, an AC CV motor and a frequency controller, an AC brushless servo motor and a servo amplifier with a gear transmission, a shift encoder, a flywheel and a belt [11]. Zhang proposed a hybrid five bar mechanism [12].

Connor et al. have presented a study on the synthesis of hybrid five bar path generating mechanisms using genetic algorithms [13]. Dulger et al. have presented a study on modeling and kinematic analysis of a hybrid actuator; a seven link mechanism with an adjustable crank [14]. Yu has offered a study with HM system using five bar mechanism [15]. Li and Zhang have applied a seven bar linkage configuration with kinematics analysis and optimum design of hybrid system [16]. Li and Tso have presented a seven bar mechanism [17]. Tso and Li have later used a seven bar mechanism to investigate the stamping capacity and energy distribution between the servomotor and the flywheel with different motion inputs [18]. Tso has again used a seven bar mechanism. A control system with iterative learning control and feedback control techniques was developed [19].

In all these mechanisms, the issue of providing the necessary cyclogram for moving the working slider is solved by controlling two or more engines and, accordingly, the problems of dynamic synthesis of drive control functions are solved.

The implementation of a technological cyclogram using a mechanism with a single degree of freedom requires a significant complication of the structure of the lever kinematic chain, the so-called Assur groups [20, 21]. In the works by A. Tuleshov [2, 3, 4, 5] a kinematic chain (structural group) of the fourth class is used for the synthesis of the crank press mechanism.

In [3], a vector method for kinematic analysis of crank two-rod presses has been developed on the basis of four-link groups [2]. As a follow-up to these studies, a vector model of the time diagram of the automaton was developed [2], which allows solving various dynamic problems by changing the parameters of the time cyclogram of its mechanisms, including the analysis of the mechanism using the Matlab / Simulink platforms [5]; based on this, it was possible to expand the motion scenarios for the slider with servo inputs. In [4], the authors used simulations to compare a conventional press with a power transmission using a crank mechanism and a press with an FEM yoke mechanism (Chval and Cechura 2014) [22].

3 Material and methods

3.1 Structural analysis

Figure 1 shows a kinematic diagram of the stamping mechanism under consideration with a feed-and-removal mechanism of the processed material. The structural formula of the mech-

anism has the form [20].

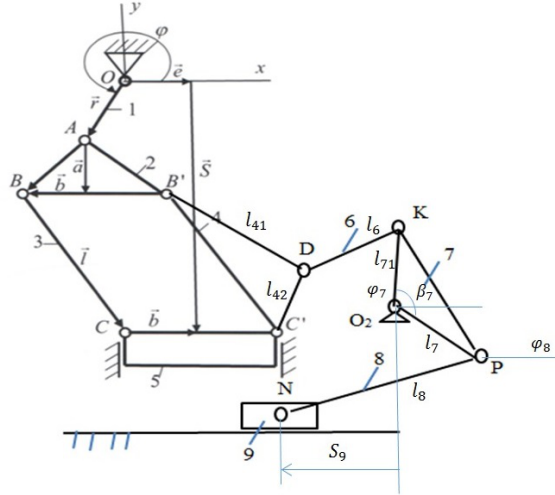


Figure 1: Kinematic schemes of the stamping mechanism

$$I(1) \Rightarrow IV(2, 3, 4, 5) \Rightarrow II(6, 7) \Rightarrow II(8, 9).$$

A special feature of the mechanism is that the modified contour $BB'C'C$ is a parallelogram and the ABB' triangle is equilateral. This imposes certain conditions on the movement of individual joints: joint 2 makes a forward movement on the plane and joints 3 and 4 occupy the same angular positions.

The following symbols for the coordinates and dimensions of joints were introduced: r – length of crank 1; a – height of ABB' triangle; l – length of parallel connecting rods $BC = B'C'$; φ – angular coordinate of crank 1; ψ – angular coordinate of two connecting rods 3 and 4; S – linear coordinate of slide 5; e – eccentricity of slide 5, i.e. the deviation of the trajectory of the center of gravity of the slider from Oy axis; b – distance between ball joint C and the center of the slide 5 along Ox axis; $l_{i,j}$ – the length of the leash triangular joints, where $i = 4, 7$ takes the number value of the joint $j = 1, 2$ – number of sides on a i triangle; l_i – the length of the i -joint; φ_i – angular coordinate of the i -joint; S_9 – movement of slide 9 parallel to the axis O_2x .

3.2 Kinematic analysis

The kinematics equations of the Stephenson mechanism $I(1) \Rightarrow IV(2, 3, 4, 5)$ in the crank press structure have the form [2]

$$\begin{cases} r \cos \varphi + l \cos \psi = e \\ r \sin \varphi - a + l \sin \psi = -S \end{cases} \quad (1)$$

Solutions of equations (1) with respect to $S = S(\varphi)$, $\psi = \psi(\varphi)$ are obtained explicitly

$$\begin{cases} S = a - r \sin \varphi \pm \sqrt{l^2 - (e - r \cos \varphi)^2} \\ \psi = \pm \arccos \left[\frac{1}{l}(e - r \cos \varphi) \right] \end{cases} \quad (2)$$

The signs \pm correspond to different assemblies of the mechanism.

The first and second derivative (analogs of speed and acceleration) are written as

$$\begin{cases} S' = -r \cos \varphi - l \cos \psi \cdot \psi' \\ \psi' \sin \psi = -\frac{r}{l} \sin \varphi \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} S'' = r \sin \varphi + l \sin \psi \cdot \psi'^2 - l \cos \psi \cdot \psi'' \\ \psi'' \sin \psi + \cos \psi \cdot \psi'^2 = -\frac{r}{l} \cos \varphi \end{cases} \quad (4)$$

Solutions of equations (3) and (4) with respect to the first and second derivative are written as

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad T'_\psi(\varphi) = \psi' &= -\frac{r \sin(\varphi)}{l \sin(\psi)}, \quad \sin(\psi) \neq 0, \quad \psi \neq 0, \quad k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 2^\circ \quad T'_S(\varphi) = S' &= -r \cos \varphi - l \cdot T'_\psi(\varphi) \cos \psi, \\ 3^\circ \quad T''_\psi(\varphi) = \psi'' &= -\frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{r}{l} \cos \varphi - (T'_\psi)^2 \cos \psi \right], \quad \sin \psi \neq 0, \quad \psi \neq 0, \quad k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 4^\circ \quad T''_S(\varphi) = S'' &= r \sin \varphi + l \cdot (T'_\psi)^2 \sin \psi - l \cdot T''_\psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

In real crank presses, the eccentricity $e = 0$, the above formulas are slightly simplified and the algorithm for kinematic analysis of the mechanism is recorded

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \begin{cases} S = a - r \sin \varphi \pm \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi} \\ \psi = \pm \arccos \left[\frac{r}{l} \cos \varphi \right] \end{cases} \\ 2^\circ \quad & \begin{cases} S' = -r \cos \varphi \pm \frac{r^2 \sin \varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} \\ \psi' = \mp \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} \end{cases} \\ 3^\circ \quad & \begin{cases} S'' = r \sin \varphi \pm r^2 \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{2(l^2 - r^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} \right) \\ \psi'' = \pm r \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{2(l^2 - r^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Next, we make the kinematics equations for the following mechanism structures $II(6, 7) \Rightarrow II(8, 9)$. To do this, write down the coordinates of the joints B' and C' :

$$x_{B'} = r \cos \varphi + b, \quad y_{B'} = r \sin \varphi - a, \quad x_{C'} = e + b, \quad y_{C'} = S. \quad (7)$$

Let us write the equations of the geometric connection of a $B'DC'$ triangle:

$$\begin{aligned}(x_{B'} - x_D)^2 + (y_{B'} - y_D)^2 &= l_{41}^2, \\ (x_D - x_{C'})^2 + (y_D - y_{C'})^2 &= l_{42}^2,\end{aligned}$$

The solution of this system of equations with respect to two unknowns x_D and y_D can be represented as [1]

$$(x_D)_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (y_D)_{1,2} = c(x_D)_{1,2} + d, \quad (8)$$

where $A = 1 + c^2$, $B = c(y_{B'} - d)$, $C = x_{B'}^2 + (y_{B'} - d)^2 - l_{41}^2$,

$$c = \frac{x_{C'} - x_{B'}}{y_{C'} - y_{B'}}, \quad d = \frac{l_{41}^2 - l_{42}^2 + x_{C'}^2 - x_{B'}^2 + y_{C'}^2 - y_{B'}^2}{2(y_{C'} - y_{B'})}, \quad y_{C'} \neq y_{B'}. \quad (9)$$

Let us write similar geometric connection equations for the group $II(6, 7)$

$$\begin{aligned}(x_D - x_K)^2 + (y_D - y_K)^2 &= l_6^2, \\ (x_K - x_{O_2})^2 + (y_K - y_{O_2})^2 &= l_{71}^2,\end{aligned}$$

The x_{O_2} , y_{O_2} coordinates are calculated, then the solution of this system of equations with respect to two unknowns x_K and y_K can be represented as

$$(x_K)_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (y_K)_{1,2} = c(x_K)_{1,2} + d, \quad (10)$$

where $A = 1 + c^2$, $B = c(y_D - d)$, $C = x_D^2 + (y_D - d)^2 - l_6^2$,

$$c = \frac{x_{O_2} - x_D}{y_{O_2} - y_D}, \quad d = \frac{l_6^2 - l_{71}^2 + x_{O_2}^2 - x_D^2 + y_{O_2}^2 - y_D^2}{2(y_{O_2} - y_D)}, \quad y_{O_2} \neq y_D. \quad (11)$$

Let us determine φ_7 angle of the angular position of joint 7 (O_2P) using the formula

$$\varphi_7 = 2\pi - \beta_7 + \tan^{-1} \frac{y_K - y_{O_2}}{x_K - x_{O_2}}. \quad (12)$$

Now let us write the kinematics equations for the rocker-slider mechanism $I(7) \Rightarrow II(8, 9)$ in the following form

$$x_N = x_{O_2} + l_7 \cos \varphi_7 + l_8 \cos \varphi_8, \quad y_N = y_{O_2} + l_7 \sin \varphi_7 + l_8 \sin \varphi_8.$$

Given that we have the kinematics equation $x_N - x_{O_2} = S_9$ and $y_N - y_{O_2} = h_9 = \text{const}$

$$S_9 = l_7 \cos \varphi_7 + l_8 \cos \varphi_8, \quad l_7 \sin \varphi_7 + l_8 \sin \varphi_8 = h_9. \quad (13)$$

Whence

$$\varphi_8 = \pm \sin^{-1} \frac{h_9 - l_7 \sin \varphi_7}{l_8} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad S_9 = l_7 \cos \varphi_7 + l_8 \cos \varphi_8, \quad (14)$$

3.3 Choosing the law of motion

It is required to carry out the synthesis of the crank press reproducing the specified law of motion, $S_M = S_M(\varphi)$ on the site $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Let us assume that it is necessary to implement an equidistant law of motion of the slider to the crank press. Then the analog of the slider accelerations has the form [1, 21]

$$T''_{SM}(\varphi) = \begin{cases} a_0 & \text{at } 0 \leq \varphi \leq 0,5\varphi_y, \\ -a_0 & \text{at } 0,5\varphi_y < \varphi \leq \varphi_y, \end{cases} \quad (15)$$

where $a_0 = \text{const}$ is the amplitude of the acceleration analog.

Using the unit function, equation (15) has the form

$$T''_{SM}(\varphi) = a_0 - 2a_0\delta(\varphi - 0,5\varphi_y), \quad (16)$$

where $\delta(\varphi - \varphi_0) = \begin{cases} 0 & \text{at } \varphi \leq \varphi_0 \\ 1 & \text{at } \varphi > \varphi_0 \end{cases}$ is the Dirac unit function.

By double integrating $T''_{SM}(\varphi)$ function we get the position functions (18) and the analog of the slider speed (17)

$$T'_{SM}(\varphi) = a_0\varphi - 2a_0(\varphi - 0,5\varphi_y)\delta(\varphi - 0,5\varphi_y) + C, \quad (17)$$

$$S_M = T_{SM}(\varphi) = 0,5a_0\varphi^2 - a_0(\varphi - 0,5\varphi_y)^2\delta(\varphi - 0,5\varphi_y) + C\varphi + D, \quad (18)$$

where C, D – are integration constants defined from initial conditions, if $\varphi = \varphi_0 = 0$, $T_{SM}(\varphi_0) = 0$, $T'_{SM}(\varphi_0) = 0$, then $C = 0$, $D = 0$.

From the boundary condition $T_{SM}(\varphi_0) = T_{\max}$, we determine the amplitude of the acceleration analog

$$a_0 = 4T_{\max}/\varphi_y^2. \quad (19)$$

3.4 Kinematic synthesis of the stamping mechanism

From the kinematic scheme of the six-lever crank press stamping mechanism, we have [5]

$$S(\varphi) = T_S(\varphi) = a - r \sin \varphi \pm \sqrt{l^2 - (e - r \cos \varphi)^2}. \quad (20)$$

The task of kinematic synthesis is to determine the constant parameters of the six-lever mechanism a, l, r, φ_0 from the minimum functional conditions [5]

$$\|S(\varphi) - S_M(\varphi)\|_{l,a,r,e,\varphi_0} \implies \min \quad (21)$$

The solution of the synthesis problem based on functional (21) has difficulties related to the nonlinearity of functions (2) (or (20)) and (18). Therefore, we apply another method related to the implicit representation of the kinematics equation of the mechanism and its transformations. To do this, we exclude the angle ψ from equation (1), then we get

$$l^2 = a^2 + S^2 + e^2 + r^2 - 2aS - 2ar \cdot \sin \varphi + 2Sr \cdot \sin \varphi - 2re \cdot \cos \varphi \quad (22)$$

Replace in equation (22) S with $S_i + S_0$ and φ to $\varphi_i + \varphi_0$ to account for the reference point S_i and $\varphi_i, = 1, 2, \dots, N$

$$l^2 = a^2 + (S_i + S_0)^2 + e^2 + r^2 - 2a(S_i + S_0) - 2ar \cdot \sin(\varphi_i + \varphi_0) + 2(S_i + S_0)r \cdot \sin(\varphi_i + \varphi_0) - 2re \cdot \cos(\varphi_i + \varphi_0) \quad (23)$$

We define the deviation function, which expresses the degree of proximity of the movement of the working joint and reproduced by the mechanism (21), in the form

$$\Delta_i = \Delta_i(\varphi_i, S_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

where

$$\Delta_i(\varphi_i, S_i) = a^2 + (S_i + S_0)^2 + e^2 + r^2 - l^2 - 2a(S_i + S_0) - 2ar \cdot \sin(\varphi_i + \varphi_0) + 2(S_i + S_0)r \cdot \sin(\varphi_i + \varphi_0) - 2re \cdot \cos(\varphi_i + \varphi_0) \quad (25)$$

After transformations of the last expression, we get, assuming $S_0 = 0$

$$\Delta_i = P_0 f_{0i} + P_1 f_{1i} + P_2 f_{2i} + P_3 f_{3i} + P_4 f_{4i} + P_5 f_{5i} - F_i \quad (26)$$

The following symbols are introduced here:

$$\begin{aligned} f_{0i} &= 1; & f_{1i} &= S_i; & f_{2i} &= \sin \varphi_i; & f_{3i} &= \cos \varphi_i; & f_{4i} &= S_i; \\ f_{1i} &= S_i \sin \varphi_i; & f_{5i} &= S_i \cos \varphi_i; & F_i &= S_i^2 \\ P_0 &= a^2 + e^2 + r^2 - l^2; & P_1 &= -2a; & P_2 &= 2re \cdot \sin \varphi_0 - 2ra \cdot \cos \varphi_0; \\ P_3 &= -2re \cdot \cos \varphi_0 - 2ra \cdot \sin \varphi_0; & P_4 &= 2r \cdot \cos \varphi_0; & P_5 &= 2r \cdot \sin \varphi_0; & F_i &= S_i^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Thus, the 5 required parameters of the lever mechanism of the crank press r, a, l, e, φ_0 are determined using 6 parameters P_0, \dots, P_5 . For the compatibility condition of the P_2 and P_3

$$P_2 = P_5 e + \frac{P_1 P_4}{2}, \quad P_3 = -P_4 e + \frac{P_1 P_5}{2}, \quad (28)$$

From here the value of the eccentricity can be found e

$$e = \frac{P_2}{P_5} - \frac{P_1 P_4}{2P_5} \quad \text{or} \quad e = -\frac{P_3}{P_4} + \frac{P_1 P_5}{2P_4} \quad (29)$$

and the equation written down

$$P_1(P_4^2 + P_5^2) = 2(P_2 P_4 + P_3 P_5) \quad (30)$$

The rest of the required parameters can be found from the ratios (27)

$$a = -\frac{1}{2}P_1; \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{P_4^2 + P_5^2}; \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{P_4}{P_5}; \quad l = \sqrt{a^2 + e^2 + r^2 - P_0} \quad (31)$$

To determine P_0, P_2, P_3, P_4, P_5 , we apply the method of quadratic approximation [4], which consists in determining the minimum sum of square deviations for the positions of the mechanism N taking into account (26), i.e.

$$C = \Delta_I^2 \underset{\min}{\implies} 0. \quad (32)$$

The necessary conditions for the minimum (32) can be obtained by differentiating C by P_j

$$\frac{\partial C}{\partial P_j} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial P_j} = 0, \quad j = 0, \dots, 5 \quad (33)$$

Substitute in the equations (33) Δ_i and its derivatives $\frac{\partial \Delta_i}{\partial P_j}$, which are calculated according to (26). As a result we get a system of linear equations with respect to the desired parameters P_0, P_2, P_3, P_4, P_5

$$\begin{cases} P_0 \sum f_{0i}^2 + P_1 \sum f_{1i} f_{0i} + P_2 \sum f_{2i} f_{0i} + P_3 \sum f_{3i} f_{0i} + P_4 \sum f_{4i} f_{0i} + P_5 \sum f_{5i} f_{0i} = \sum F_i f_{0i} \\ P_0 \sum f_{01} f_{1i} + P_1 \sum f_{1i}^2 + P_2 \sum f_{2i} f_{1i} + P_3 \sum f_{3i} f_{1i} + P_4 \sum f_{4i} f_{1i} + P_5 \sum f_{5i} f_{1i} = \sum F_i f_{1i} \\ P_0 \sum f_{01} f_{2i} + P_1 \sum f_{1i} f_{2i} + P_2 \sum f_{2i}^2 + P_3 \sum f_{3i} f_{2i} + P_4 \sum f_{4i} f_{2i} + P_5 \sum f_{5i} f_{2i} = \sum F_i f_{2i} \\ P_0 \sum f_{01} f_{3i} + P_1 \sum f_{1i} f_{3i} + P_2 \sum f_{2i} f_{3i} + P_3 \sum f_{3i}^2 + P_4 \sum f_{4i} f_{3i} + P_5 \sum f_{5i} f_{3i} = \sum F_i f_{3i} \\ P_0 \sum f_{01} f_{4i} + P_1 \sum f_{1i} f_{4i} + P_2 \sum f_{2i} f_{4i} + P_3 \sum f_{3i} f_{4i} + P_4 \sum f_{4i}^2 + P_5 \sum f_{5i} f_{4i} = \sum F_i f_{4i} \\ P_0 \sum f_{01} f_{5i} + P_1 \sum f_{1i} f_{5i} + P_2 \sum f_{2i} f_{5i} + P_3 \sum f_{3i} f_{5i} + P_4 \sum f_{4i} f_{5i} + P_5 \sum f_{5i}^2 = \sum F_i f_{5i} \end{cases} \quad (34)$$

The system (34) must meet the minimum condition (32). Let's find from the first 5 equations of the system (34) coefficients P_i ($i=0,2,3,4,5$) expressed in P_1

$$P_i = c_i + d_i P_1, \quad i = 0, 2, \dots, 5 \quad (35)$$

Substitute (31) in the coupling equations (28) with (22), then we get one equation with respect to P_1

$$P_1[(c_4 + d_4 P_1)^2 + (c_5 + d_5 P_1)^2] = 2[(c_2 + d_2 P_1)(c_4 + d_4 P_1) + (c_3 + d_3 P_1)(c_5 + d_5 P_1)], \quad (36)$$

which is converted to a third-degree equation

$$\begin{aligned} P_1^3(d_4^2 + d_5^2) + P_1^2(2c_4 d_4 + 2c_5 d_5 - 2d_2 d_4 - 2d_3 d_5) + \\ + P_1(c_4^2 + c_5^2 - 2c_2 d_4 - 2d_2 c_4 - 2c_3 d_5) = 2(c_2 c_4 + c_3 c_5) \end{aligned} \quad (37)$$

Solving this cubic equation, we find P_1 , and then using the formula (35) we find P_0, P_2, P_3, P_4, P_5 coefficients. Then, based on the formulas (27), the desired parameters of r, a, l, e, φ_0 mechanism that implements the law (2) or (20) are determined. Thus, the problem of synthesis of this crank press mechanism by the quadratic approximation method is fundamentally solved.

3.5 Kinematic synthesis of the workpiece feed mechanism

The feed-and-remove mechanism works as follows (Figure 3): the slider 5 occupies three positions sequentially: 1 – upper; 2 – middle; 3 – lower position, when the workpiece is stamped, respectively, the slider 9 occupies three positions: 1 – right position where the workpiece is siezed to the feed table; 2 – average position, feed the workpiece into the matrix (table) and remove the finished stamping; 3 – left position, removal of the finished workpiece.

Kinematic synthesis of the rocker-slider mechanism $I(7) \Rightarrow II(8, 9)$ is performed using three specified positions of the slider and rocker [24]. The method is described in an analytical way.

So, x_{O_2} and y_{O_2} coordinates are known, the equation of the forward stroke of the slider relative to Oxy system has the form $y = -y_{O_2} - h_9$. On this line, $B_1(x_1, y_1)$, $B_2(x_2, y_2)$, $B_3(x_3, y_3)$ three slider positions are set, and $y_I = -y_{O_2} - h_9$, $I = 1, 2, 3$ are considered to be set $\varphi_{71}^{(1,2,3)} = \tan^{-1} \left(\frac{y_K - y_{O_2}}{x_K - x_{O_2}} \right)_{(1,2,3)}$ that correspond to the three positions of the slider 5 (see Figure 3). The algorithm for the synthesis of the rocker-slider mechanism is as follows:

1. Calculate the distance between $O_2(x_{O_2}, y_{O_2})$ point and the corresponding $B_1(x_1, y_1)$, $B_2(x_2, y_2)$, $B_3(x_3, y_3)$ points using the formulas

$$\sqrt{(x_I - x_{O_2})^2 + (y_I - y_{O_2})^2} = l_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

2. Calculate $\varphi_{71}^{(2)} - \varphi_{71}^{(1)}$ and $\varphi_{71}^{(3)} - \varphi_{71}^{(1)}$ angle difference using the formula $\varphi_{71}^{(1,2,3)} = \tan^{-1} \left(\frac{y_K - y_{O_2}}{x_K - x_{O_2}} \right)_{1,2,3}$.

3. On a circle with a radius l_2 based on the equation $(x - x_{O_2})^2 + (y - y_{O_2})^2 = l_2^2$, find the coordinates $B'_2(x'_2, y'_2)$: find $d_2 = 2l_2 \sin \frac{\varphi_{71}^{(2)} - \varphi_{71}^{(1)}}{2}$, then

$$x'_2 = x_2 - d_2 \cos \frac{\pi - \varphi_{71}^{(2)} + \varphi_{71}^{(1)}}{2}, \quad y'_2 = y_2 + d_2 \sin \frac{\pi - \varphi_{71}^{(2)} + \varphi_{71}^{(1)}}{2};$$

4. On a circle with a radius l_3 based on the equation $(x - x_{O_2})^2 + (y - y_{O_2})^2 = l_3^2$, find the coordinates $B'_3(x'_3, y'_3)$: find $d_3 = 2l_3 \sin \frac{\varphi_{71}^{(3)} - \varphi_{71}^{(1)}}{2}$, then

$$x'_3 = x_3 - d_3 \cos \frac{\pi - \varphi_{71}^{(3)} + \varphi_{71}^{(1)}}{2}, \quad y'_3 = y_3 + d_3 \sin \frac{\pi - \varphi_{71}^{(3)} + \varphi_{71}^{(1)}}{2};$$

5. Let us write equations of lines that pass through points $B_1(x_1, y_1)$ and $B'_2(x'_2, y'_2)$ and $B'_2(x'_2, y'_2)$ and $B'_3(x'_3, y'_3)$: $y = k_2x + q_2$ and $y = k_3x + q_3$, respectively, where $k_2 = \frac{y'_2 - y_1}{x'_2 - x_1}$, $q_2 = y_1 - k_2x_1$ and $k_3 = \frac{y'_3 - y'_2}{x'_3 - x'_2}$, $q_3 = y'_2 - k_3x'_2$.

6. Let us create equations of perpendicular lines to lines that pass through points $B_1(x_1, y_1)$ and $B'_2(x'_2, y'_2)$, as well as $B'_2(x'_2, y'_2)$ and $B'_3(x'_3, y'_3)$:

From the beginning we find the coordinates of C_2 , C_3 points in the middle of the segments $(B_1(x_1, y_1), B'_2(x'_2, y'_2))$ and $(B'_2(x'_2, y'_2), B'_3(x'_3, y'_3))$: $x_{C_2} = \frac{x'_2 + x_1}{2}$, $y_{C_2} = \frac{y'_2 + y_1}{2}$, and then the equations $x_{C_3} = \frac{x'_2 + x'_3}{2}$, $y_{C_3} = \frac{y'_2 + y'_3}{2}$, of perpendicular lines have the form

$$y = -\frac{1}{k_2}x + q_4 \text{ and } y = -\frac{1}{k_3}x + q_5, \text{ where } q_4 = y_{C_2} + \frac{1}{k_2}x_{C_2}, \quad q_5 = y_{C_3} + \frac{1}{k_3}x_{C_3}.$$

7. Next, we solve the equations of two lines $y = -\frac{1}{k_2}x + q_4$ and $y = -\frac{1}{k_3}x + q_5$, relative to $P(x_P, y_P)$ center coordinate:

$$x_P = \frac{k_2 k_3}{k_2 - k_3}(q_5 - q_4), \quad y_P = -\frac{1}{k_3}x_P + q_5,$$

8. As a result, we find the length of the rocker l_7 and the connecting rod l_9 using the formulas

$$l_7 = \sqrt{(x_P - x_{O_2})^2 + (y_P - y_{O_2})^2}, \quad l_9 = \sqrt{(x_P - x_{B_1})^2 + (y_P - y_{B_1})^2},$$

also the constant length of the base joint 7

$$l_{KR} = \sqrt{(x_P - x_K)^2 + (y_P - y_K)^2}.$$

3.6 Results and discussions

In order to solve the problem of analysis and synthesis of the six-lever mechanism (Figure 1), a program was developed in the integrated Maple environment.

To assess the quality of the sintered crank press stamping mechanism, the following criteria are used K_1, K_2

$$K_1 = T''_{\max} + \xi_1 |T''_{\min}|, \quad K_2 = (T'T'')_{\max} + \xi_2 |(T'T'')_{\min}|. \quad (38)$$

It is known [4] that geometric characteristics significantly affect the dynamics of mechanisms. Therefore, the criteria (38) can be used as preliminary dynamic criteria [4], which are used to compare different laws of motion, as well as to synthesize new laws that have optimal properties in a certain sense. This problem is relevant when studying the dynamics of the crank press and its further automation. Criterion (38) allows monitoring the pulsation of inertial loads on the slider and flywheel, from the external load on the workpiece side in the crank press [6].

Example. Consider an example of the synthesis of the Stephenson lever mechanism of a crank press. Initial data for synthesis: law of motion of slider 5: $S = S(\varphi)$, (see Figure 2) on the section of the crank rotation angle $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Slider stroke $S_{\max} = 120\text{mm}$. The angular velocity of the crank is constant $\omega = \dot{\varphi} = 10 \text{ rad/s}$.

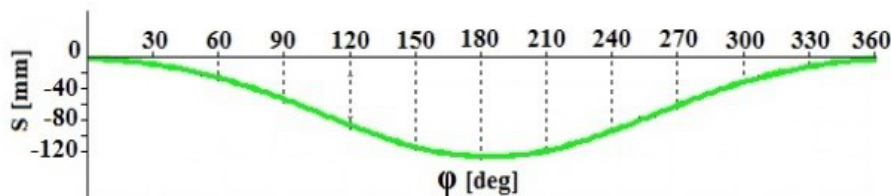


Figure 2: The law of motion of the slider of a six-lever mechanism

Note that since the slider moves in the opposite direction of the axis Oy , the axis Ox is directed to the right, then as a result of modeling the graphs relative to the specified graph in Figure 2 will be shifted to the left by $-\pi/2$.

As a result of synthesis based on the above method in the Maple integrated environment, the following parameters of the Stephenson mechanism are obtained:

$$r = 60 \text{ mm}, l = 160 \text{ mm}, a = 41,85 \text{ mm}, b = 43 \text{ mm}, e = 0, \varphi_0 = -\pi/2.$$

According to the algorithms for the synthesis of the rocker-slider mechanism described in this paper, the mechanism with the following data is synthesized: $l_8 = 134.5 \text{ mm}$, $l_7 = 86 \text{ mm}$. Other geometric parameters of the stamping mechanism are summarized in Table 1.

$B'D$	$C'D$	l_6	l_{71} O_2K	KR	h_9	x_{O_2}	y_{O_2}
163 mm	36 mm	134.5 mm	103.5 mm	176.6 mm	56.5 mm	136,5 mm	-207.2 mm

The kinematic analysis of the mechanism in the ASIAN-2014 environment is carried out [25]. Figure 3 shows a kinematic diagram of the Stephenson synth mechanism with an analysis of the trajectory of the characteristic hinges.

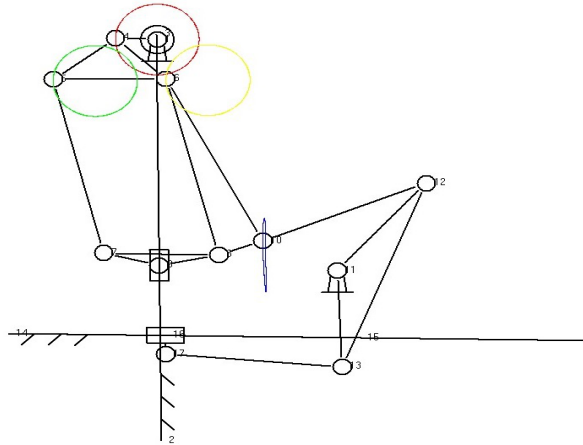


Figure 3: Kinematic analysis of the stamping mechanism

Figures 4, 5, 6 show graphs of movement, speed, and acceleration of work joints: of the slider 5 and slider 9. Analysis of slider 5 movement graph (Figure 4,a) shows that the mechanism implements the specified law of movement of the working body (Figure 2). Slider 5 takes the upper position at $\varphi = \pi/2$, the lower position at $\varphi = 3\pi/2$. The forward and reverse moves of the slider occur at $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ and $\varphi \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. In the working lower position, slider 5 makes a uniform movement in the $\varphi \in (246^\circ, 282^\circ)$ interval.

The amplitude of the slider speed change at $\varphi^{(2)} = 186^\circ$ and $\varphi^{(4)} = 339^\circ$ remains the same (Figure 5, a). The amplitude of the change in the slider acceleration at $\varphi^{(1)} = 87^\circ$ and $\varphi^{(3)} = 264^\circ$ is 1.5 (Figure 6, a). At the interval $\varphi \in (53^\circ, 124^\circ)$, the acceleration of slider 5 is close to constant and the speed is linear.

Slider 9 makes a uniform movement in the interval $\varphi \in (66^\circ, 180^\circ)$. Acceleration is close to zero, speed is constant. The amplitude of forward slider movement is greater than the reverse by 4.7 times; speed – 2 times, acceleration – 1.5 times (Figures 4,b, 5,b, 6,b). There are no abrupt changes in kinematic parameters that cause shock loads.

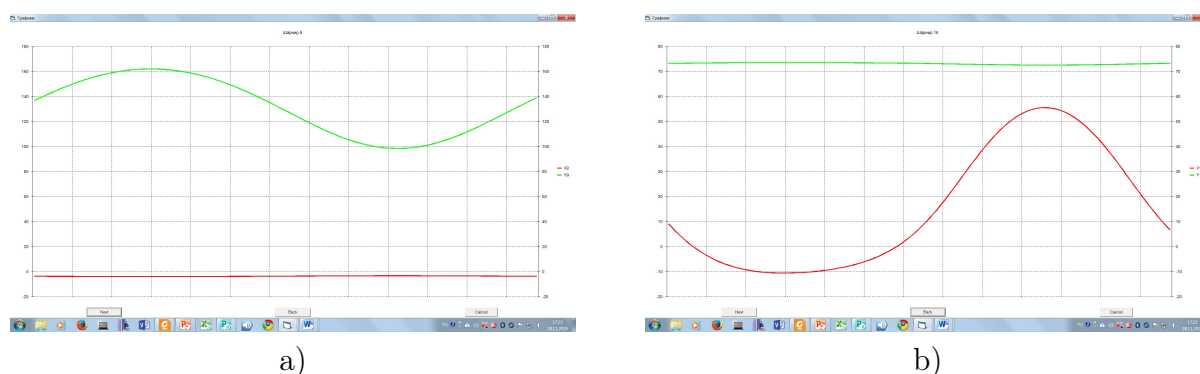


Figure 4: Analysis of the provisions of the stamping mechanism

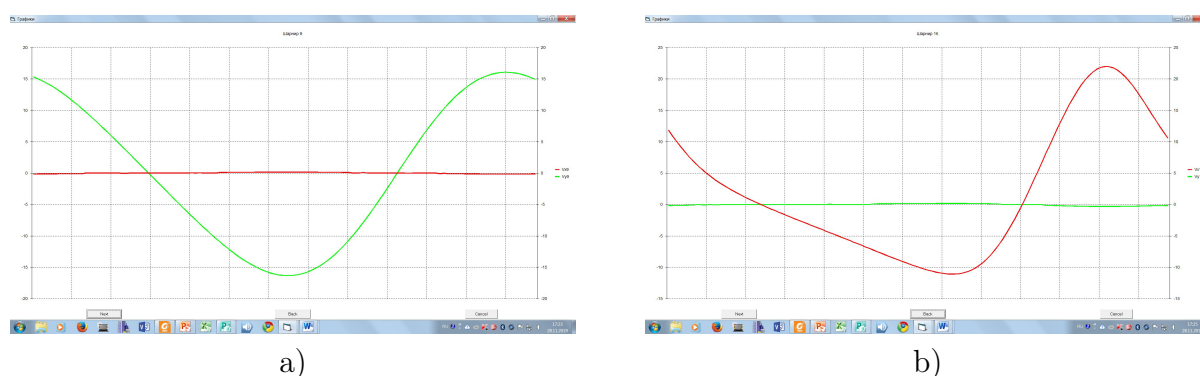


Figure 5: Analysis of the stamping mechanism speeds

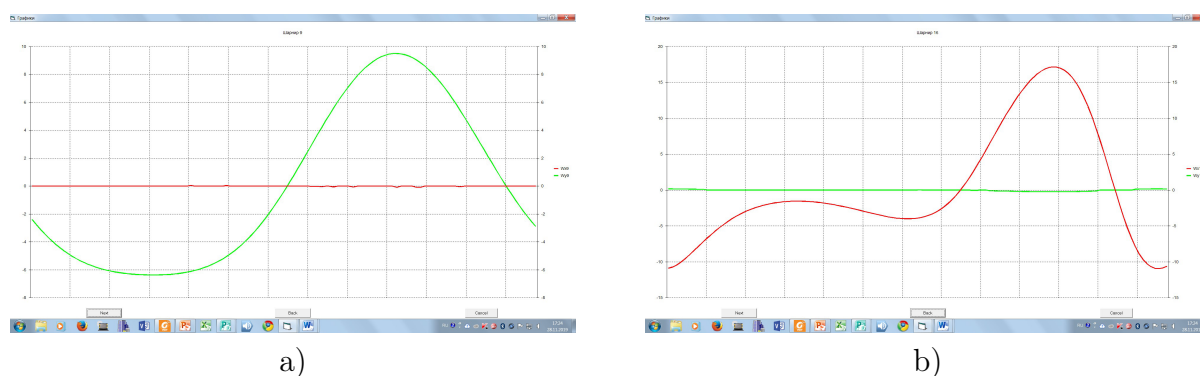


Figure 6: Analysis of the stamping mechanism acceleration

4 Conclusions

A method for kinematic synthesis of link mechanisms based on the mean-square minimization of the objective function has been developed, and a method for deriving this objective function is proposed taking into account the structural (constructive) features of the mechanism. Based on this method and the synthesis method for the three given positions of the slider and rocker of the four-link crank-slide mechanism, algorithms were constructed and Stephenson's stamping mechanism is synthesized with additional workpiece feeding mecha-

nism. Numerical modeling programs based on the Maple environment were developed, and verification calculations were performed to analyze the position, velocities, and accelerations in the ASIAN-2014 environment.

References

- [1] Bocharov Yu.A., *Kuznechno-shtampovochnoe oborudovanie* [Forging and stamping equipment] (M.: Academy, 2008): 480.
- [2] Tuleshov A., Jomartov A., "Vector method for kinetostatic analysis of planar linkages", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* Vol. 40 (2018): 55-69.
- [3] Tuleshov A., Jomartov A., Kaimov A., Modeling dynamics of planetary gear of crank press on SimulationX", *Proceedings of Second International Conference of IFToMM Italy, Cassino* (2018).
- [4] Tuleshov A.K., Dzhomartov A.A., Kumatova M.Z., "Model dvizheniya krivoshipnogo pressa na baze ryichazhnogo mehanizma 4-go klassa [The model of the movement of the crank press on the basis of the lever mechanism of the 4th class]", *Annotations of reports of the 7th All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics* Russian Federation, Ufa. 19-24 of August (2019): 56.
- [5] Tuleshov A., Jomartov A., Kumatova M., "Simulation of the crank press dynamics by SimulationX software", *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* No 2 (102) (2019): 22-33.
- [6] Erkan Kütük M., Canon Dülger L., "Gibridnaya press-sistema: voprosyi proektirovaniya dvizheniya i obratnoy kinematiki [Hybrid press system: the design of motion and inverse kinematics]", *Engineering Science and Technology, an International Journal* Volume 19, Issue 2 (2016): 846-856.
- [7] Tokuz L.C., "Hybrid machine modelling and control (Ph.D. thesis)", *Liverpool Polytechnic* (1992).
- [8] Dülger L.C., Kireççi A., "Hibrid Manipülatorün Modellenmesi ve Simülasyonu", *Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu* YTU, Istanbul (1995): 311-320.
- [9] Dülger L.C., Kireççi A., "A study on a hybrid actuator", *Mech. Mach. Theory* 35 (1999): 1141-1149.
- [10] Yuan Z., Gilmartin M.J., Douglas S.S., "Design of hybrid machines for nonuniform motion production", *Proc. Inst. Mech. Eng.* 219 (2005): 491-499.
- [11] Ouyang P.R., Li Q., Zhang W.J., "Design, modelling and control of a hybrid machine system", *Mechatronics* 14 (2004): 1197-1217.
- [12] Zhang K., "Optimization dynamics design of hybrid driving mechanisms", *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* Luoyang, Henan, China (2006): 1914-1919.
- [13] Connor A.M., Douglas S.S., Gilmartin M.J., "The synthesis of hybrid five bar path generating mechanisms using genetic algorithms", *Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications, IET, Sheffield* No 414 (1995): 313-316.
- [14] Dülger L.C., Kireççi A., Topalbekiroglu M., "Modeling and simulation of a hybrid actuator", *Mech. Mach. Theory* 38 (2003): 395-407.
- [15] Yu H., "Modelling and control of hybrid machine systems, a five-bar mechanism case", *Int. J. Autom. Comput.* 3 (2006): 235-243.
- [16] Li H., Zhang Y., "Seven bar mechanical press with hybrid driven mechanism for deep drawing; part 1: kinematics analysis and optimum design, part 2: dynamic modeling and simulation", *J. Mech. Sci. Technol.* 24 (11) (2010): 2153-2160, 2161-2167.
- [17] Li C.H., Tso P.L., "Experimental study on a hybrid driven press using iterative learning control", *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 48 (2008): 209-219.
- [18] Tso P.L., Li C.H., "Study of servo press with a flywheel", *J. Adv. Mech. Des. Syst. Manuf.* 2 (1) (2008): 1-11.
- [19] Tso P.L., "Optimal design of a hybrid-driven servo press and experimental verification", *J. Mech. Des.* 132 (3) (2010): 4.

-
- [20] Vulfson I.I., Kolovskiy M.Z., Peisakh E.Y., et al. "Mehanika mashin: uchebnoe posobie dlya vtuzov. Pod redaktsiey prof. G.A. Smirnova [Mechanics of machines: a manual for technical schools. Edited by prof. G.A. Smirnova]", *Moscow: Vysshaya Shkola Publishing House* (1996): 511.
- [21] Yevgrafov M.Z., Semyonov Y.A., Slousch A.V., "Teoriya mehanizmov i mashin: uchebnoe posobie [Theory of mechanisms and machines: a training manual]", *Moscow : Academia Publishing Center* (2006): 560.
- [22] Chval Z.M., Cechura M., "Optimization of Power Transmission on Mechanical Forging Press", *Procedia Engineering* (2014): 890-896.
- [23] Drakunov A.Y., Drakunov Y.M., "Interpolyatsionnyiy sintez mehanizma v sisteme Maple [Interpolation synthesis of a mechanism in the Maple system]", *Proceedings of the 7th International Conference "Problems of the Mechanics of Modern Machines"* Russia, Ulan-Ude (2018): 29-33.
- [24] Baranov G.G., *Theory of mechanisms and machines* (Moscow : Mashinostroyeniye, 1967): 508.
- [25] Dzhamalov N.K., "For "ATLAS, a complex of programs for the automated design of lever hoisting mechanisms", *Inclusion in the state register of Computer Programs (CAD)* NBo 5103 (2019).

¹А.Б. Қыдырбекулы , ²Г.Е. Ибраев 

¹д.т.н., профессор, E-mail: almatbek@list.ru,

²PhD докторант, E-mail: ybraev.alysher@mail.ru.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ РОТОРНЫХ СИСТЕМАХ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА УПРУГИХ ОПОРАХ

В данной работе исследуются причины возникновения самовозбуждающихся колебаний (автоколебаний) и их дальнейшее поведение, так как данные колебания являются основной причиной неустойчивости вертикальных роторных систем, установленных на подшипниках скольжения. Причиной возникновения самовозбуждающихся колебаний служат гидродинамические силы, возникающие за счет смазочного слоя между подшипником и его шипом. На основе классических методов теории колебаний и гипотезы Зоммерфельда о смазочном слое в подшипниках скольжения были получены нелинейные уравнения движения вертикальной роторной системы. Полученные нелинейные дифференциальные уравнения движения ротора и опор точного решения не имеют. Исследование проводится численными методами. Получены зависимости амплитуд ротора и опор от вязкости масла в подшипнике, от величины зазора, от массы опор, от жесткости и от коэффициентов демпфирования. Результаты исследования данной работы позволяют с достаточной точностью определить и прогнозировать все необходимые характеристики рабочего процесса данной системы. Результаты работы подтверждают физический смысл процесса, рассматриваемого в задаче, что может служить обоснованием использования данной математической модели при проектировании вертикальных роторных систем на подшипниках скольжения.

Ключевые слова: самовозбуждающиеся колебания, автоколебания, подшипник скольжения, гипотеза Зоммерфельда, роторная система, нелинейные уравнения.

¹А.Б. Қыдырбекулы, ²Г.Е. Ибраев

¹д.т.н., профессор, E-mail: almatbek@list.ru

²PhD докторант, E-mail: ybraev.alysher@mail.ru

Ал-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Серпінді тіректерді орналасқан вертикал роторлық жүйелердің автотербелістері

Берілген жұмыста сырғу мойынтіректерінде орналасқан вертикалды роторлық жүйелердің орнықсыздығының басты себебі болып табылатын өздігінен қозатын тербелістердің (автотербелістердің) пайда болу себебтері және олардың кейінгі түр өзгерісі зерттеледі. өздігінен қозатын тербелістердің себебі ретінде сырғу мойынтірегінің өзегі мен мойынтірегі арасындағы май қабатының бар болуына байланысты пайда болатын гидродинамикалық күштер болып табылады. Тербелістер теориясының классикалық әдістері мен Зоммерфельдтің сырғу мойынтіректеріндегі май қабаты туралы гипотезасы негізінде вертикал роторлық жүйенің бейсызық қозғалыс теңдеулері алынды. Ротор мен тіректердің алынған бейсызық дифференциал теңдеулерінің жалпы шешімі жоқ. Зерттеу сандық әдістер арқылы жүзеге асқан. Ротор мен тірек амплитудаларының демпферлеу коэффициенттерінен, қатаңдықтан, тіректер массасынан, саңылау шамасынан және мойынтіректегі майдың тұтқырлығынан тәуелді өрнектері алынған. Берілген жұмыстың зерттеу нәтижелері жеткілікті дәлдікпен берілген жүйенің барлық қажетті деген жұмыс үдерісінің сипаттамаларын анықтап және болжауға мүмкіндік береді. Жұмыс есепте қарастырылып жатырған үдерістің физикалық мағынасын растауына байланысты, нәтижелер сырғу мойынтіректерінде орналасқан вертикалды роторлық жүйелерді жобалау кезінде берілген математикалық модельді қолдануға негіздеме болып табылады.

Түйін сөздер: өздігінен қозатын тербелістер, автотербелістер, сырғу мойынтірегі, Зоммерфельд гипотезасы, роторлық жүйе, бейсызық теңдеулер.

¹А.Б. Кыдырбекұлы, ²Г.Е. Ибраев

¹Dr. Sc., Prof., E-mail: almatbek@list.ru

²PhD candidate, E-mail: ybraev.alysher@mail.ru

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

The self-oscillation in the vertical rotor system mounted on elastic supports

In this paper, we study the causes of self-excited oscillations (self-oscillations) and their further behavior, since these oscillations are the main cause of instability of vertical rotor systems mounted on sliding bearings. The cause of the self-excited oscillations are hydrodynamic forces arising from the lubricating layer between the bearing and its spike. Based on the classical methods of the theory of oscillations and the Sommerfeld hypothesis of a lubricating layer in sliding bearings, nonlinear equations of motion of a vertical rotor system were obtained. The obtained nonlinear differential equations of rotor motion and supports do not have an exact solution. The study is carried out by numerical methods. The dependences of the amplitudes of the rotor and bearings on the viscosity of the oil in the bearing, on the size of the gap, on the mass of the bearings, on the stiffness and on the damping coefficients are obtained. The results of the study of this work allow us to accurately determine and predict all the necessary characteristics of the working process of this system. The results of the work confirm the physical meaning of the process considered in the problem, which can justify the use of this mathematical model in the design of vertical rotor systems on sliding bearings.

Key words: self-excited oscillations, self-oscillations, sliding bearing, Sommerfeld hypothesis, rotor system, nonlinear equations.

1 Введение

Подшипники скольжения имеют ряд существенных преимуществ перед подшипниками качения. Они устойчивы для широкого спектра нагрузок и динамических возмущений, способны работать при более высоких скоростях вращения, имеют долгий срок службы и низкую стоимость, а также просты в эксплуатации.

В силу специфических свойств гидродинамических сил, возникающих из-за наличия смазочного слоя при вращении ротора в подшипниках скольжения, могут возникать самовозбуждающиеся колебания (автоколебания) с большими амплитудами, развивающиеся в широком диапазоне скоростей вращения. В связи с этим часто в промышленности и в производстве возникает необходимость разработки мер подавления и исследования поведения данного вида колебаний в зависимости от разных физических и геометрических параметров системы.

2 Обзор литературы

На сегодняшний день подшипники скольжения, встречающиеся во многих ротационных машинах в качестве узловых элементов и служащие для передачи энергии вращения, являются сложными элементами для динамического анализа, так как при определённых геометрических и рабочих параметрах они могут служить причиной возникновения, как говорилось выше, самовозбуждающихся [1, 2, 3], параметрических [3, 4] и хаотических колебаний [4, 5]. Так как при рабочих частотах системы, аналогичных рассматриваемой в данной работе модели, часто имеют место самовозбуждающиеся колебания, в статье исследуются условия возникновения и дальнейшее поведение данных колебаний.

Одним из первых исследователей, изучивших явление самовозбуждения и причины его возникновения, был Newkirk в 1924 г. [6]. Он совместно с Taylor провел первое экспериментальное исследование данного явления и объяснил причины возникновения самовозбуждающихся колебаний (автоколебаний) [7]. При изучении автоколебаний во многих случаях задача сводится к исследованию прецессионного движения системы. Приближенные решения при допущении того, что величина нагрузки на шип достаточно мала, впервые была получена Hagg [8] и Yukio Hori [9]. Работы по анализу прецессионного движения шипа в подшипнике, заполненного маслом, также были проведены Kesten [10].

Условия устойчивости положения равновесия роторной системы установленного на подшипниках скольжения, а также характер нестационарного движения при неустойчивом положении были исследованы в работе Someya [11]. Так же ряд таких авторов как Hagg, Boecker, Schnittger и Hori проводили экспериментальное исследование этих явлений [8, 9, 12, 13]. Относительно влияния вязкости масла и величины зазора в подшипнике в исследованиях заметны расхождения. Некоторые авторы такие как Schnittger отмечали преимущества низкой вязкости, так как она способствовала устойчивости шипа. Другие авторы как Boecker, Schnittger и Pinkus [14] отмечали, что устойчивости больше способствует высокая вязкость. Согласно третьей группе авторов, таких как Hummel [15] и Hagg, оба вышеперечисленных случая эквивалентны. Различные точки зрения также наблюдаются при исследованиях влияния ширины подшипника на динамику системы. Однако исследователи сходятся в том, что неуравновешенность ротора не оказывает никакого влияния на возникновение и интенсивность самовозбуждающихся колебаний. У некоторых авторов различными способами получались частота самовозбуждающихся колебаний [16, 17, 18, 19]. У большинства авторов частота самовозбуждающихся колебаний совпадала с собственной частотой ротора, в некоторых случаях, например, у Pinkus она возрастала с ростом скорости, тогда как в работе Schnittger экспериментально были получены результаты, в которых кривая частоты сначала убывала, а далее начинала возрастать [13, 14].

Экспериментальные исследования самовозбуждающихся колебаний в целом показали не только сложность данной задачи, но также выявили ряд особенностей данного явления. Наиболее важным из выявленных эффектов является "инерция" (затягивание), т.е. самовозбуждающиеся колебания после появления при определенной частоте продолжают существовать даже при понижении частоты вращения ротора ниже частот возникновения самовозбуждающихся колебаний [20, 21, 22, 23]. Другой особенностью является возможность возникновения самовозбуждающихся колебаний под действием кратковременного импульса, например, удара по ротору, при скоростях, лежащих ниже характерных скоростей при которых возникают самовозбуждающиеся колебания [24, 25].

3 Постановка задачи и уравнения движения

Рассмотрим вертикальный симметрично установленный на гибком валу относительно опор сплошной ротор массой m . Вал установлен на упругих опорах. Роторная система вращается на подшипниках скольжения массы m_0 с угловой скоростью ω (Рисунок 1). Эквивалентная жесткость упругого поля опор – c ; δ – величина зазора в подшипнике;

t – температура масла в подшипнике; μ – вязкость масла в подшипнике; d – диаметр шипа подшипника; L – длина подшипника; D – диаметр подшипника; l – длина вала; k_1, k_2 – коэффициенты демпфирования; e – дисбаланс ротора.

Для вывода уравнений движения введем неподвижную систему координат Oxy . Пусть в этой системе x_1, y_1 – координаты O_1 (центра упругой опоры), x_2, y_2 – координаты O_2 (центра шипа подшипника), x_3, y_3 – координаты O_3 (центра тяжести ротора), φ – полярный угол линии центров.

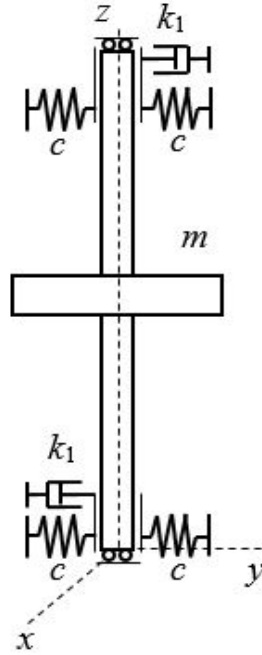


Рисунок 1: Роторная система, вращающаяся на подшипниках скольжения

Принимая во внимание, что

$$x_3 = x_2 + e \cos \omega t, \quad y_3 = y_2 + e \sin \omega t, \quad (1)$$

получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + cx_1 - 2(P_e \cos \varphi + P_\varphi \sin \varphi) &= 0, \\ m_0 \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 + cy_1 - 2(P_e \sin \varphi - P_\varphi \cos \varphi) &= 0, \\ m \ddot{x}_2 + k_2 \dot{x}_2 + 2(P_e \cos \varphi + P_\varphi \sin \varphi) &= m\omega^2 \cos \omega t, \\ m \ddot{y}_2 + k_2 \dot{y}_2 + 2(P_e \sin \varphi - P_\varphi \cos \varphi) &= m\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

где P_e и P_φ определяются из гипотезы Зоммерфельда, согласно которой на протяженность смазочного слоя между подшипником и шипом не накладываются никакие ограничения и определяются как [26]

$$P_e = \frac{12\pi\mu LR^3 \dot{\chi}}{\delta^2 (1 - \chi^2)^{3/2}}, \quad P_\varphi = \frac{12\pi\mu LR^3 \chi (\omega - 2\dot{\varphi})}{\delta^2 (2 + \chi^2) \sqrt{1 - \chi^2}}.$$

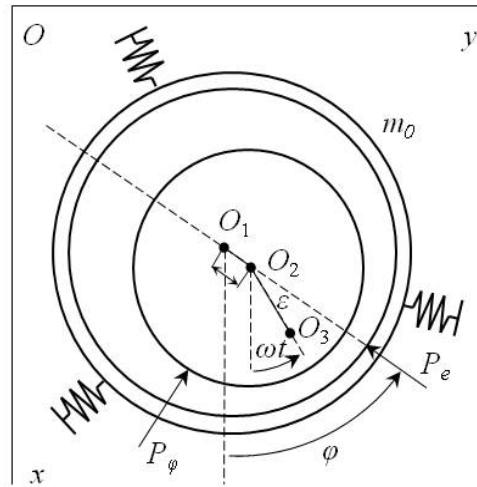


Рисунок 2: Подшипник скольжения

Первые два уравнения системы (2) являются уравнениями движения опоры под действием упругих сил sx_1 , sy_1 , сил демпфирования $k_1\dot{x}_1$, $k_1\dot{y}_1$ и сил реакции смазочного слоя P_e и P_φ , направленных в противоположном направлении одноимённым силам изображенным на рисунке 2. Вторые два уравнения системы (2) определяют уравнения движения ротора под действием сил реакции смазочного слоя P_e и P_φ и сил внешнего демпфирования $k_2\dot{x}_2$, $k_2\dot{y}_2$. Чтобы уравнения системы (2) совместно с уравнениями гидродинамических сил образовывали замкнутую систему, необходимо выразить эксцентриситет центра шипа e и полярный угол φ через координаты центра упругой опоры x_1 , y_1 и координаты центра шипа x_2 , y_2 . Из рисунка 2 видно, что

$$x_2 - x_1 = e \cos \varphi, \quad y_2 - y_1 = e \sin \varphi. \quad (3)$$

Тогда

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (4)$$

$$\dot{e} = \frac{(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)}{e}, \quad (5)$$

$$\sin \varphi = \frac{(y_2 - y_1)}{e}, \quad \cos \varphi = \frac{(x_2 - x_1)}{e}, \quad (6)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{e^2}. \quad (7)$$

Система уравнений (2) и уравнения (4)-(7) образуют совместно с выражениями для сил реакций смазочного слоя, вид которых зависит от принятой гипотезы, замкнутую систему нелинейных уравнений интегрирование которых в общем виде не является возможным.

4 Результаты и обсуждение

Расчёты проведены для роторной системы, вращающейся со скоростью от 0 до 20000 оборотов в минуту. Отметим, что при расчёте варьируется пять основных параметра, а именно вязкость жидкости в смазочном слое, масса опор, коэффициент демпфирования, коэффициент жесткости эквивалентного поля упругости и величина зазора в подшипнике, так как данные параметры являются основополагающими в вопросе исследования поведения самовозбуждающихся колебаний. Анализ колебаний был проведен на основе численного решения системы уравнений (2) классическими методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений, при следующих исходных данных: масса ротора – $m = 5$ кг, масса опор – $m_0 = 0.15$ кг, величина зазора в подшипнике – $\delta = 0.06$ мм, температура масла в подшипнике $t = 50^\circ\text{C}$ вязкость масла в подшипнике – $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло), диаметр шипа подшипника – $d = 20$ мм, длина подшипника – $L = 20$ мм, диаметр подшипника – $D = 20 + 2\delta$ мм, длина вала $l = 650$ мм, эквивалентная жесткость упругого поля опоры – $c = 29$ кг/с², коэффициенты демпфирования – $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с.

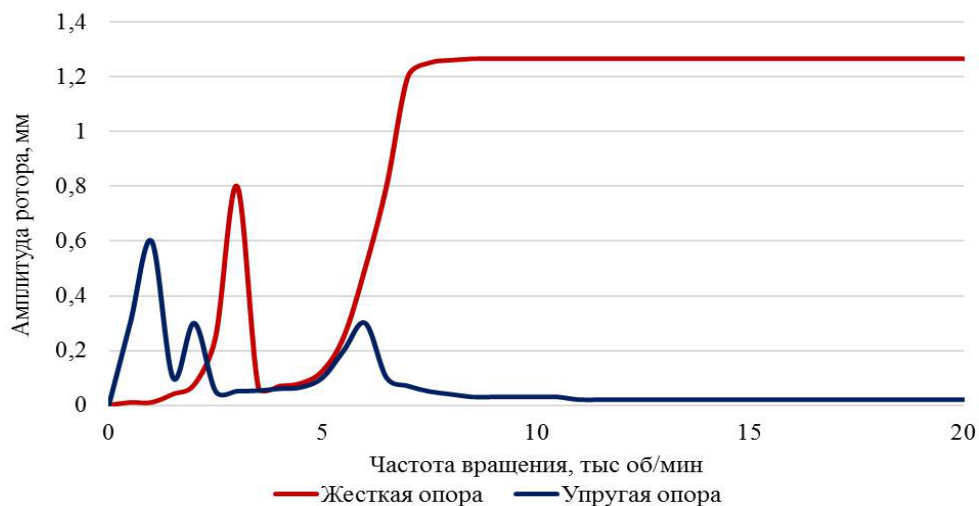


Рисунок 3: Амплитуды ротора при упругом и жестком закреплении в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло).

На рисунке 3 показаны амплитудно-частотные характеристики системы при зазоре $\delta = 0.06$ мм. Из рисунка видно, что при жестком креплении (красная линия) работоспособность системы ограничена скоростью вращения, примерно равной удвоенной критической скорости ротора. Начиная с 6000 об/мин в системе наступают интенсивные автоколебания в широком диапазоне частот. При упругом варианте креплений (синяя линия) уровень вибраций во много раз меньше. Ротор, установленный на упругих опорах, вообще не имеет зоны автоколебаний, и система приобретает способность к устойчивой работе на скоростях от 20 000 об/мин и выше, т.е. на скоростях, в двадцать раз превышающих первую критическую скорость. При

разбеге ротора после легкого и спокойного перехода через две критические скорости вращения обнаруживается первая зона самоцентрирования, в которой возможна работа с малыми амплитудами вибраций. Вторая, еще более широкая зона самоцентрирования расположена в диапазоне от 6000 до 20 000 об/мин. Наконец, из рисунка видно, что диапазон возможных скоростей устойчивого вращения ротора благодаря установке ротора в упругие опоры увеличился в три раза по сравнению с жестким креплением подшипников, причем, и это особенно важно, верхний предел скоростей вращения ротора не имеет принципиальных границ. При этом наблюдается что установка ротора в упругие опоры приводит к снижению уровня вибраций не только в областях самоцентрирования, но и при переходе через резонансные режимы. При этом виброперегрузки будут тем меньше, чем меньше жесткость опор.

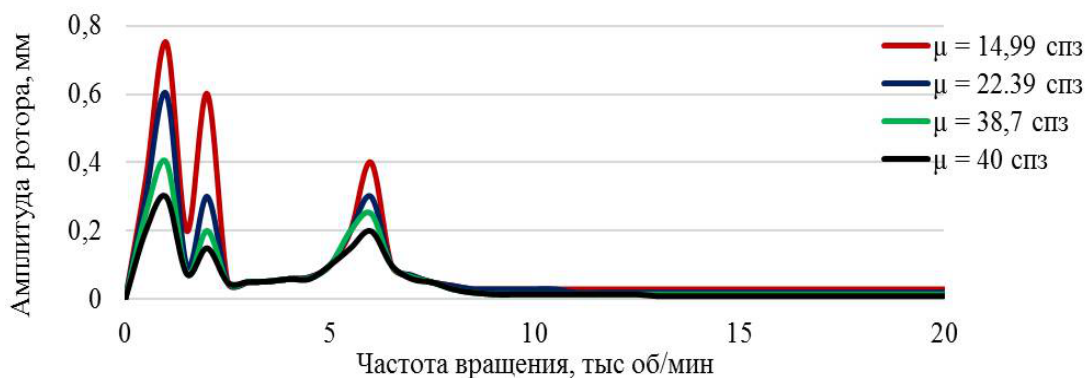


Рисунок 4: Амплитуды ротора при разных значениях вязкости жидкости в подшипнике в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз.

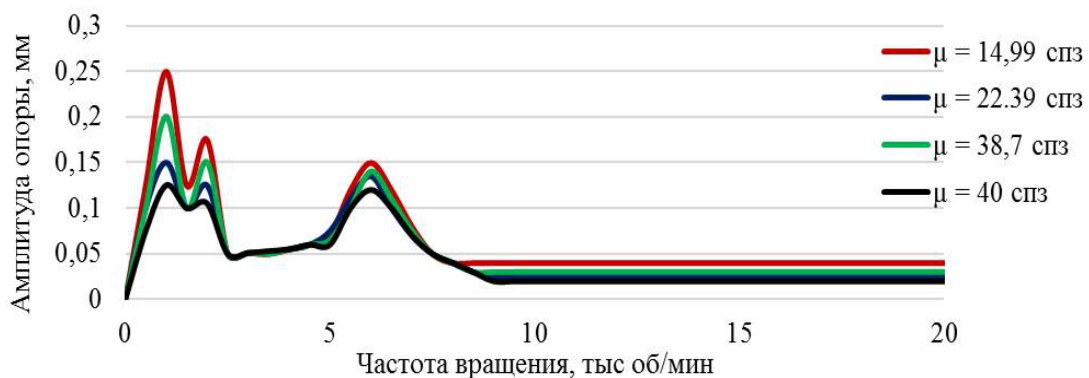


Рисунок 5: Амплитуды опоры при разных значениях вязкости жидкости в подшипнике в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз.

На рисунках 4 и 5 показаны амплитудно-частотные характеристики ротора и опоры в зависимости от типа масла находящегося во вкладыше подшипника скольжения,

когда $t = 50^\circ\text{C}$ $\delta = 0.06$ мм, давление 1 атм. В первом случае (красная линия), когда $\mu = 14.99$ спз (безводный глицерин) амплитуды как ротора, так и опоры имеют максимальные значения. Далее с увеличением вязкости жидкости амплитуды уменьшаются и имеют минимальные значения при максимальных значениях вязкости (черная линия), т.е. $\mu = 40$ спз (мазут). В данном случае оптимальные значения соответствуют случаю использования турбинного масла, т.е. когда $\mu = 22.39$ спз, так как дальнейшее увеличение вязкости может повлечь за собой нарушение теплового режима в подшипнике скольжения.

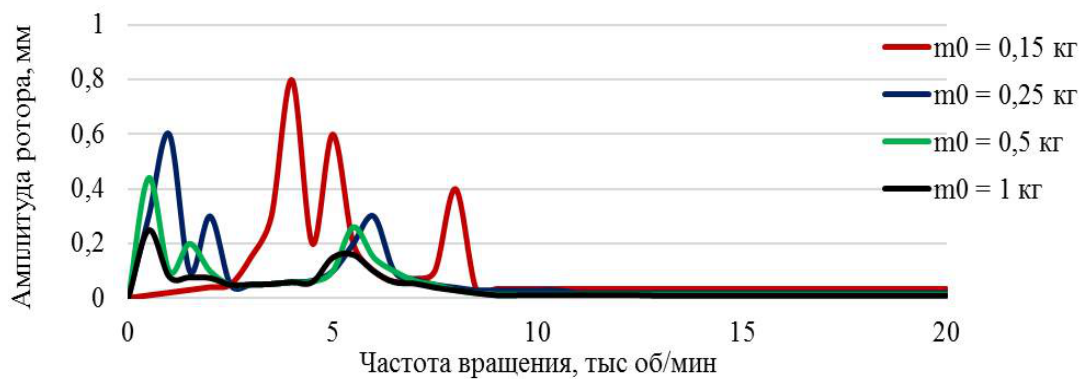


Рисунок 6: Амплитуды ротора при разных значениях массы опоры в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло).

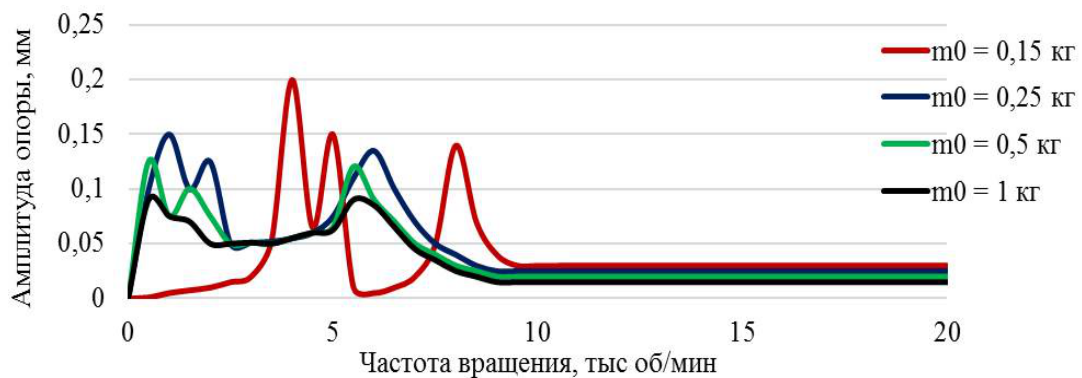


Рисунок 7: Амплитуды опоры при разных значениях массы опоры в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло).

На рисунках 6 и 7 показаны амплитудно-частотные характеристики ротора и опоры в зависимости от массы опоры. В обоих случаях амплитуды ротора и опоры с увеличением массы опоры демпфируются, так как опора при достаточно большой массе служит антигрузом и выполняет роль гасителя колебаний, т.е. имеет место явления

антирезонанса, например, когда $m_0 = 1$ кг (черная линия). Следует отметить, что с увеличением массы опоры критические частоты смещаются в сторону меньших угловых скоростей, тогда как сильных смещений участков самоцентрирования не наблюдается. С уменьшением массы опоры резонансные частоты смещаются в сторону больших угловых скоростей, к тому же увеличиваются и амплитуды, также сужается первый участок самоцентрирования, к примеру, случай, когда $m_0 = 0.15$ кг (красная линия).

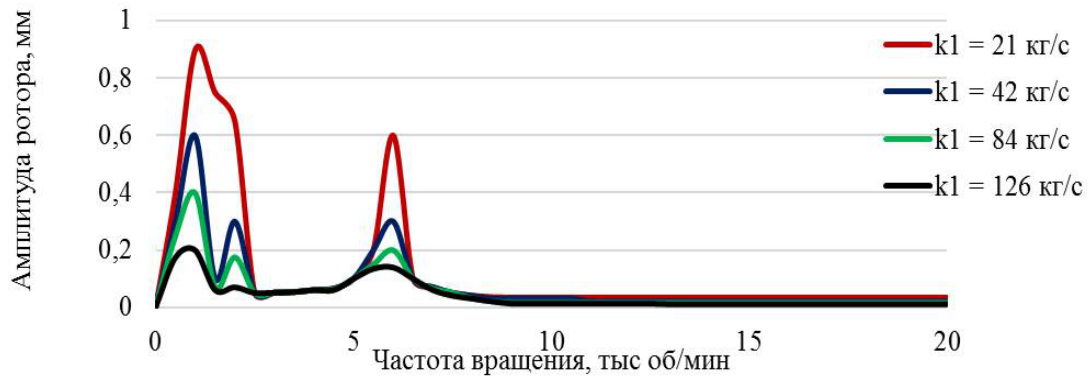


Рисунок 8: Амплитуды ротора при разных значениях коэффициента демпфирования k_1 в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ сПз (турбинное масло).

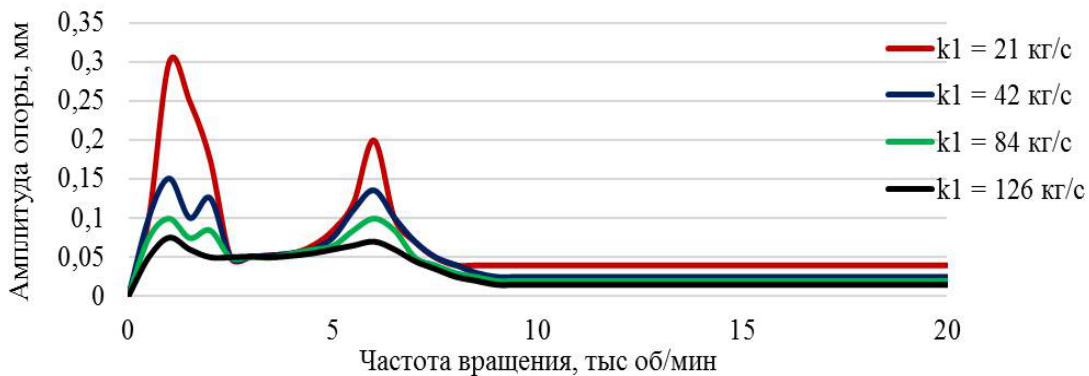


Рисунок 9: Амплитуды опоры при разных значениях коэффициента демпфирования k_1 в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ сПз (турбинное масло).

На рисунках 8 и 9 показаны амплитудно-частотные характеристики ротора и опоры в зависимости от коэффициента демпфирования, для зазоров $\delta = 0.06$ мм. Здесь амплитуды при переходе через резонансы резко снижаются. Причем наиболее эффективно демпфирующее действие упругих опор сказывается при переходе через первую и вторую критические скорости ротора. Влияние демпфирования опор на третью критическую скорость менее значительно. Увеличение амплитуд колебаний в зонах

самоцентрирования не наблюдается. В этих зонах по-прежнему наблюдается спокойная работа системы с малыми амплитудами вибраций.

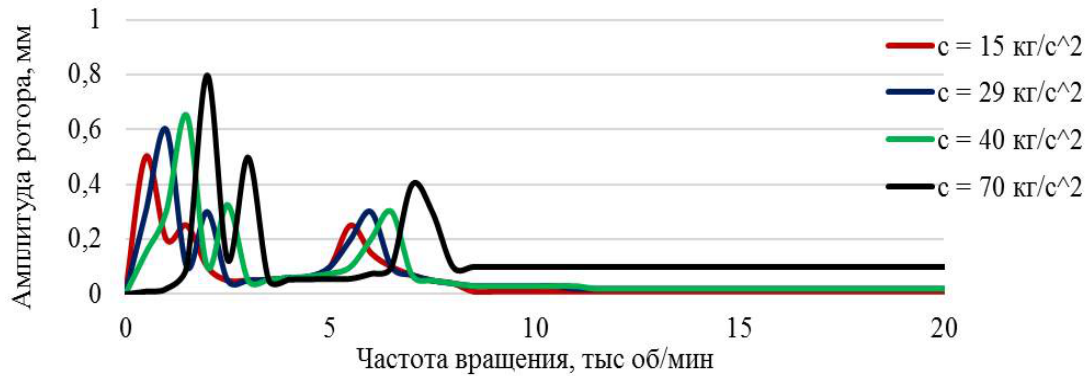


Рисунок 10: Амплитуды ротора при разных значениях коэффициента жесткости c в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло).

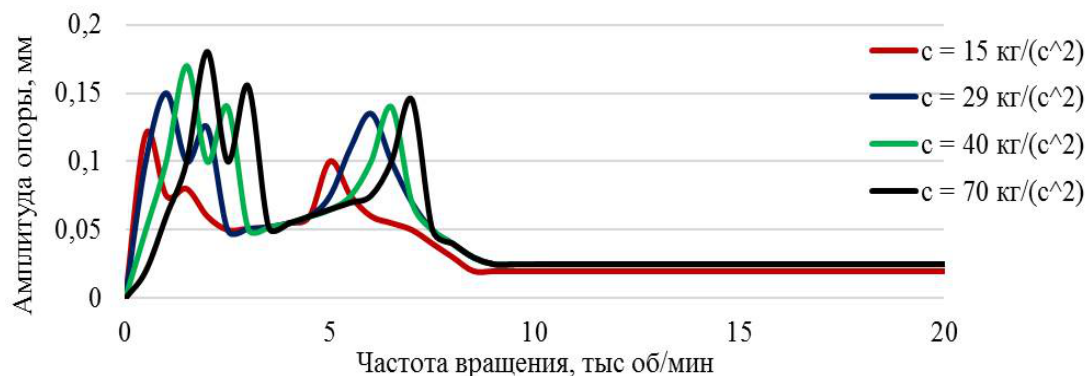


Рисунок 11: Амплитуды опоры при разных значениях коэффициента жесткости c в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $\delta = 0.06$ мм, $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло).

При разных значениях жесткости эквивалентного поля опор также наблюдается смещение амплитуд колебаний по оси частот и их изменение по величине (рисунки 10 и 11). Например, с увеличением жёсткости увеличиваются амплитуды как ротора, так и опор. Так же с увеличением коэффициента смещаются пики амплитуд в сторону больших угловых скоростей. В целом увеличение жесткости как было показано изначально (Рисунок 3) не лучшим образом сказывается на поведении системы, тогда как с увеличением податливости наблюдается обратная картина.

На рисунках 12 и 13 показаны амплитудно-частотные характеристики ротора и опоры в зависимости от толщины зазора в подшипнике скольжения. Как видно из рисунков увеличение толщины зазора отрицательно влияет на работу системы.

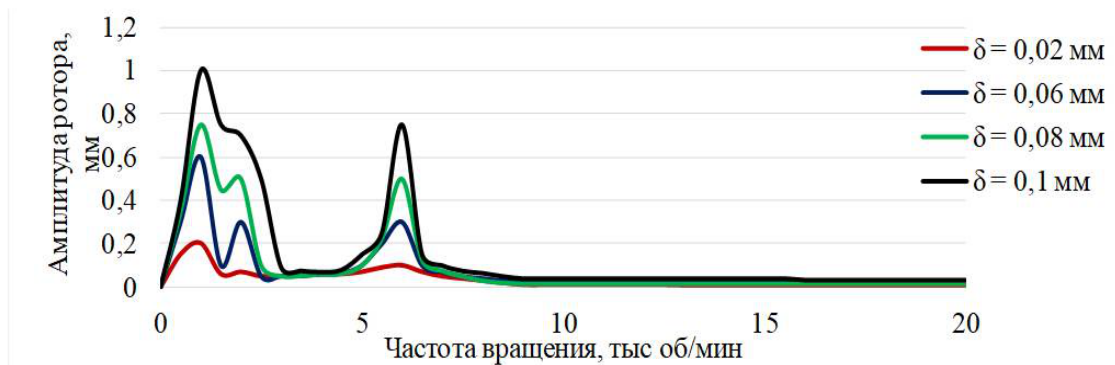


Рисунок 12: Амплитуды ротора при разных значениях толщины зазора δ в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло).

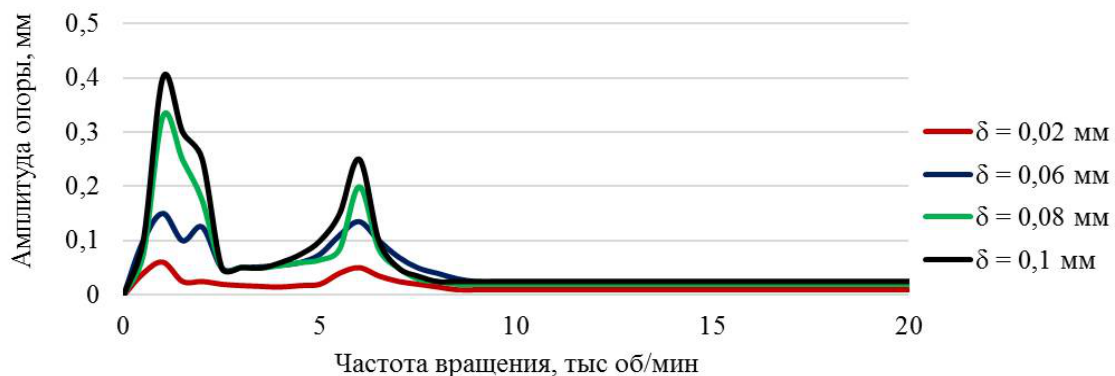


Рисунок 13: Амплитуды опоры при разных значениях толщины зазора δ в случае, когда $d = 20$ мм, $l = 650$ мм, $c = 29$ кг/с², $t = 50^\circ\text{C}$, $k_1 = 42$ кг/с, $k_2 = 6.59$ кг/с, $\mu = 22.39$ спз (турбинное масло).

Увеличение величины зазора приводит к увеличению амплитуды как ротора, так и опоры. С уменьшением толщины зазора наблюдается обратный эффект, т.е. минимальным значениям δ , соответствуют минимальные значения амплитуд. Но так как на практике малая толщина зазора влечет за собой нарушение теплового режима из-за нагрева [27], то оптимальным вариантом в этом случае является величина зазора $\delta = 0.06$ мм.

В первой резонансной зоне колебания диска и опор происходят в фазе, т.е. характер формы колебаний представляет собой цилиндрическую прецессию. Во второй зоне колебания опор происходят по отношению друг к другу в противофазе; при этом в районе диска форма колебаний имеет узел. Таким образом, во второй зоне форма колебаний представляет собой кососимметричную прецессию. В третьей резонансной зоне колебания опор по отношению друг к другу происходят по фазе, а у диска – в противофазе. Таким образом, третья форма колебаний представляет собой

двухузловую симметричную форму, характер которой напоминает первую форму колебаний безопорного вала. Следует отметить, что если расположение и характер первой и второй форм колебаний определяются в основном податливостью опор, то третья форма обусловлена изгибными колебаниями вала ротора. Итак, данные исследования показывают, что зоны повышенных вибраций представляют собой узкие резонансные зоны, обусловленные динамической и статической неуравновешенностями ротора.

5 Заключение

Установка роторов в упругие опоры приводит к полному подавлению автоколебаний, имевших место при жестком креплении подшипников скольжения, и колебания системы во всем диапазоне скоростей становятся чисто вынужденными. Эффективность демпфирования упругих опор исключительно высока и возрастает с уменьшением их жесткости. Самоцентрирование системы в зарезонансных зонах приводит к значительному снижению величин вибраций и виброперегрузок системы. Установка ротора в упругие опоры «линеаризует» динамическую систему «ротор - опоры». Также следует отметить что основным параметром определяющий тип колебаний является величина зазора подшипника скольжения, так как с его увеличением амплитуды будут увеличиваться, а при предельных его значениях самовозбуждающиеся колебания будут переходить в хаотический тип колебаний что отрицательно будет сказываться на устойчивости системы даже при больших частотах вращения. Согласно теории самоцентрирования [28], где показано что перегрузки в областях самоцентрирования определяются лишь величиной дисбаланса и жесткостью опор, можно сделать вывод, что виброперегрузки системы не будут практически возрастать даже при значительном значении дисбаланса ротора. Таким образом. при достаточной податливости опор, даже при больших дисбалансах, можно ожидать стабильной работы машины с умеренным уровнем виброперегрузок в широком диапазоне скоростей.

Список литературы

- [1] Muszynska A. Rotordynamics. – Boca Raton: Taylor & Francis, 2005. – 1054 p.
- [2] Greenhill L.M. Critical Speeds Resulting from Unbalance Excitation of Backward Whirl Modes / L.M. Greenhill, G.A. Cornejo // Design Engineering Technical Conferences (DETC'95), September 17-20, 1995, Boston Massachusetts, USA: Proceedings. – Boston: ASME, 1995. – Vol. 3, Part B (DE-Vol. 84-2). – P. 991-1000.
- [3] Yamamoto T., Ishida Y. Linear and nonlinear rotor dynamics. – New York, John Wiley and Sons, 2001. – 326 p.
- [4] Leung A. Y. T. and Kuang J. L. Chaotic Rotations of a Liquid - Filled Solid // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 302, № 3. – P. 540-563.
- [5] Adams M.L. Rotating machinery vibration. – NY: MarcelDekker, 2001. – 354 p.
- [6] Newkirk B. L. Shaft whipping // General Electric Review. March, 1924.
- [7] Newkirk B. L., Taylor H. D. Shaft whipping due to oil action in journal bearings // General Electric Review, August, 1925.
- [8] Hagg A. C. The influence of oil-film journal bearings on the stability of rotating machines // Journal of Applied Mechanics, September, 1946.

- [9] Yukio Hori. A theory of oil whip // J. of Applied Mechanics, June, 1959.
- [10] Kesten J. Stabilité de la position de l'arbre dans un palier à graissage hydrodynamique. Wear. – 1960. – No 5.
- [11] Someya T. Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenälsen, unwunthfreien Welle. – Ingenieur-Archiv, 1963, 33.
- [12] Boecker G. F., Sternlicht B. Investigation of Translatory fluid whirl in vertical machines. – Trans. of the ASME, January, 1956.
- [13] Schnittger J. R. Development of a smooth running double-spool, gas-turbine rotor system // ASME Paper No 58-A-197. – 1958.
- [14] Pinkus O. Experimental investigation of resonant whip // Trans. of the ASME, July, 1956.
- [15] Hummel Ch. Kritische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager. – VDI-Forschungsheft, 1926. – P. 287.
- [16] Олимпиев В.И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения // Изв. АН СССР, Отд. техн. наук. – 1960. – № 3. – С. 24-29.
- [17] Capriz G. On the vibrations of shafts rotating on lubricated bearings // Ann. Mat. Pura Appl. – 1960. IV, Ser. 50. – P. 223.
- [18] Tondl A. Experimental investigation of self-excited vibrations of rotors due to the action of lubricating oil film in journal bearings. Monographs and Memoranda of the National Research Institute of Heat Engineering, Prague. – 1961. – No 1.
- [19] Tondl A. Einige Ergebnisse experimenteller Untersuchungen der Zapfenbewegung in Lagern // Revue de mécanique appliquée, 1961, tome VI, No 1.
- [20] Dick J. Alternating loads on sleeve bearings // Philosophical Magazine, 1944, vol. 35.
- [21] Shawki G. S. A. Whirling of a journal bearing – experiments under no-load conditions // Engineering, February 25, 1955.
- [22] Shawki G. S. A. Analytical study of journal-bearing performance under variable loads // Trans. of the ASME, 1956, No 3.
- [23] Shawki G. S. A. Jour // Proc. of the Inst. of Mech. Eng. – 1957. – Vol. 171, No 28.
- [24] Cameron A. Oil whirl in bearings. Engineering, February 25, 1955.
- [25] Krämer E. Der Einfluss des Oilfilms von Gleitlagern auf die Schwingungen von Maschinenwellen // VDI-Berichte, 1959, Bd. 35.
- [26] Кельзон А.С. Динамика роторов в упругих опорах. – М.: Наука, 1982.
- [27] Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Изд.: Энергия, 1971.
- [28] Кельзон А.С. Самоцентрирование и уравнивание жесткого ротора, вращающегося в двух упругих опорах // ДАН СССР. – Т. 110, № 1. – 1956. – С. 31-33.

References

- [1] Muszynska A., *Rotordynamics* (Boca Raton: Taylor & Francis, 2005): 1054.
- [2] Greenhill L.M., "Critical Speeds Resulting from Unbalance Excitation of Backward Whirl Modes / L.M. Greenhill, G.A. Cornejo", *Design Engineering Technical Conferences (DETC'95)* September 17-20, 1995, " Boston Massachusetts, USA: Proceedings. – Boston: ASME Vol. 3, Part B (DE-Vol. 84-2) (1995): 991-1000.
- [3] Yamamoto T., Ishida Y., *Linear and nonlinear rotor dynamics* (New York, John Willey and Sons, 2001): 326.
- [4] Leung A. Y. T. and Kuang J. L., "Chaotic Rotations of a Liquid - Filled Solid", *Journal of Sound and Vibration* Vol. 302, No 3 (2007): 540-563.
- [5] Adams M.L., *Rotating machinery vibration* (NY: MarcelDekker, 2001): 354.

-
- [6] Newkirk B. L., "Shaft whipping", *General Electric Review* March (1924).
- [7] Newkirk B. L., Taylor H. D., "Shaft whipping due to oil action in journal bearings", *General Electric Review* August (1925).
- [8] Hagg A. C., "The influence of oil-film journal bearings on the stability of rotating machines", *Journal of Applied Mechanics* September (1946).
- [9] Yukio Hori, "A theory of oil whip", *J. of Applied Mechanics* June (1959).
- [10] Kesten J., "Stabilité de la position de l'arbre dans un palier à graissage hydrodynamique", *Wear* No 5 (1960).
- [11] Someya T., "Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenélsen, unwunchtfreien Welle", *Ingenieur-Archiv* 33 (1963).
- [12] Boecker G. F., Sternlicht B., Investigation of Translatory fluid whirl in vertical machines. – Trans, of the ASME, January, 1956.
- [13] Schnittger J. R., "Development of a smooth running double-spool, gas-turbine rotor system", *ASME Paper No 58-A-197* (1958).
- [14] Pinkus O., "Experimental investigation of resonant whip", *Trans. of the ASME* July (1956).
- [15] Hummel Ch., *Kritische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager* (VDI-Forschungsheft, 1926): 287.
- [16] Olimpiev V.I., "O sobstvennyih chastotah rotora na podshipnikah skolzheniya [On natural frequencies of the rotor supported on the sliding bearings]", *Izv. AN SSSR. Otd. Tekhn. Nauk* No 3 (1960): 24-29.
- [17] Capriz G., "On the vibrations of shafts rotating on lubricated bearings", *Ann. Mat. Pura Appl.* IV, Ser. 50 (1960): 223.
- [18] Tondl A., "Experimental invesrigation of self-excited vibrations of rotors due to the action of lubricating oil film in journal bearings", *Monographs and Memoranda of the National Research Institute of Heat Engineering, Prague* No 1 (1961).
- [19] Tondl A., "Einige Ergebnisse experimenteller Untersuchungen der Zapfenbewegung in Lagern", *Revue de mécanique appliquée* Tome VI, No 1 (1961).
- [20] Dick J., "Alternating loads on sleeve bearings", *Philosophical Magazine* Vol. 35 (1944).
- [21] Shawki G. S. A., "Whirling of a journal bearing - experiments under no-load conditions", *Engineering* February 25 (1955).
- [22] Shawki G. S. A., "Analytical study of journal-bearing performance under variable loads", *Trans. of the ASME* No 3 (1956).
- [23] Shawki G. S. A., "Journal bearing performance for combinations of steady, fundamental and harmonic components of load", *Proc. of the Inst. of Mech. Eng.* Vol. 171, No 28 (1957).
- [24] Cameron A., "Oil whirl in bearings", *Engineering* February 25 (1955).
- [25] Krämer E., "Der Einfluss des Oilfilms von Gleitlagern auf di Schwingungen von Maschinenwellen", *VDI-Berichte* Bd. 35 (1959).
- [26] Kelzon A.S., *Dinamika rotorov v uprugih oporah* [Dynamics of rotors in elastic supports] (M.: Nauka, 1982).
- [27] Tondl A., *Dinamika rotorov turbogeneratorov* [Dynamics of rotors of turbogenerators] (Izd.: Energiya, 1971).
- [28] Kelzon A.S., "Samotsentrirovanie i uravnovesivanie zhestkogo rotora, vraschayushegosya v dvuh uprugih oporah [Self-centering and balancing of a rigid rotor rotating in two elastic bearings]", *DAN SSSR* T. 110, No 1 (1956): 31-33.

¹**B.A. Belgibaev** , ²**V.V. Nikulin** , ³**A.A. Umarov** 

¹Doctor of Technical Sciences, Docent, Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan, E-mail: bbelgibaev@list.ru

²PhD doctor, Associate Professor, State University of New York,
Binghamton, USA, E-mail: vnikulin@binghamton.edu

³PhD student, Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan, E-mail: uaa_77@mail.ru

DESIGNING SMART GREENHOUSES, SATISFACTORY PRICE-QUALITY

Smart greenhouse is a revolution in agriculture, which creates a self-regulating microclimate suitable for plant growth through the use of sensors, actuators and control and management systems that optimize growth conditions and automate the growing process. The global smart greenhouse market was valued at approximately 680.3 million in 2016 and is expected to reach approximately 1.31 billion by 2022, an increase of 14.12% on average between 2017 and 2022.

However, high installation prices and high upfront investment costs can constrain greenhouse adoption in many underdeveloped and developing countries. Therefore, the urgent task is the development and implementation of smart greenhouses that are suitable for the wider population, which provide the population with vegetables and fruits seasonally or year-round. Improving the quality of service of greenhouses, controlling and monitoring microclimate processes is possible through the use of programmable logic controllers, modern smart, wireless and web technologies WSN and IoT.

The article is devoted to the design of the Home Smart Greenhouse system, the control device of which is implemented on the basis of NLC. The system allows you to perform a) control (monitoring) of microclimate processes in Online mode; b) fuzzy control in manual and automatic mode; c) adjust the parameters of the three microclimate processes: cooling, watering and lighting. The described NLC model adequately reflects the microclimate control process in the greenhouse. As a result of using the system, the productivity of the farmer user is increased, thereby helping the farmer user control the plant growth process and take the necessary measures to care for them. The developed system meets the criterion of price-quality, that is, it is simultaneously accessible to the population, and at the same time has an acceptable quality of service, using wireless network and web technologies (WSN, IoT) and fuzzy control. The cost of the system is 86.75 (the price is not higher than the minimum wage of Kazakhstan), the economic effect of using the system is 25, the payback period of the greenhouse is 4 seasons.

Key words: smart greenhouse, price-quality criterion, fuzzy logic controller (NLC), WSN, IoT, ESP 32, Matlab.

¹Б.А. Бельгибаев, ²В.В. Никулин, ³А.А. Умаров

¹Т.ғ.д., доцент, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ, Қазақстан, E-mail: bbelgibaev@list.ru

²PhD докторы, ассоциативті профессор, Нью Йорк мемлекеттік университеті,
Бингхтон қ., АҚШ, E-mail: vnikulin@binghamton.edu

³PhD докторанты, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: uaa_77@mail.ru

Сапа-баға критерийін қанағаттандыратын ақылды жылыжайды жобалау

Ақылды жылыжай – датчиктерді, атқарушы құралдар мен бақылау/басқару жүйелерін пайдаланып, өсімдіктерге ыңғайлы микроклимат жасайтын және өсу процесін оңтайлы етіп, автоматтандыру қызметін атқаратын ауыл шаруашылығындағы төңкеріс. Ақылды жылыжайдың әлемдік нарығы 2016 ж. 680,3 млн. доллар құрап, 2022 ж. 1,31 млрд. долларға жетеді деген болжам бар, яғни, 2017-2022 жж. аралығында орташа есеппен 14,12% өсуі мүмкін.

Алайда, орнатуға және алғашқы инвестицияларға кететін шығындар әлсіз дамыған және дамып келе жатқан мемлекеттерде жылыжайлады ендіру процесін шектейді. Сондықтан, халықты мауысым бойы немесе жыл бойы көкөністер мен жеміс-жидектермен қамтамасыз ететін қолжетімді ақылды жылыжай құру және ендіру өзекті мәселе болып табылады. Жылыжайларды сапалы қамтамасыз ету, бақылау және басқару бағдарламаланатын логикалық контроллерлер, заманауи смарт, WSN/IoT сымсыз және веб технологияларды пайдалану арқылы мүмкін болады.

Мақала "Үйдегі ақылды жылыжай" жүйесін жобалауға арналады, оның басқару құралы анық емес логикалық контроллер (АЕЛК) негізделген. Жүйе келесі қызметтерді атқарады: а) Online тәртібінде микроклимат процестерін бақылау (мониторинг); ә) қолмен және автоматты тәртіпте микроклимат процестерін басқару; б) микроклиматтың үш процестерінің параметрлерін реттеу: суыту, суару және жарықтандыру.

Сипатталған АЕК моделі жылыжайдайдағы микроклимат процестерін басқаруды дұрыс, ақылға сай көрсетеді. Жүйені пайдалану нәтижесінде пайдаланушы-бағбанның еңбек өнімділігі өседі, ол өсімдіктің өсу процесін бақылап, өсімдікке күтім жасау бойынша тиісті шаралар қабылдай алады.

Құрастырылған жүйе баға-сапа критерийін қанағаттандырады, яғни, пайдаланушы үшін қолжетімді және заманауи смарт, WSN/IoT сымсыз және веб технологияларды пайдалану арқылы жеткілікті деңгейде сапалы болып табылады. Жүйенің бағасы 86.75 (бағасы қазақстандықтың ең кіші жалақысынан аз), жүйені пайдаланудың экономикалық тиімділігі - 25, өтеу мерзімі - 4 мауысым.

Түйін сөздер: ақылды жылыжай, баға-сапа критерийі, анық емес логикалық контроллер (АЕЛК), WSN, IoT, ESP 32, Matlab.

¹Б.А. Бельгибаев, ²В.В. Никулин, ³А.А. Умаров

¹д.т.н., доцент, Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: bbelgibaev@list.ru

²доктор PhD, ассоциативный профессор, Нью-Йоркский государственный университет,
г. Бингхэмптон, США, E-mail: vnikulin@binghamton.edu

³PhD докторант, Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: uaa_77@mail.ru

Проектирование смарт теплицы, удовлетворяющей критерию цена-качество

Смарт теплица – это революция в сельском хозяйстве, которая создает саморегулирующийся микроклимат, подходящий для роста растений, благодаря использованию датчиков, исполнительных механизмов и систем контроля и управления, которые оптимизируют условия роста и автоматизируют процесс выращивания. Мировой рынок смарт теплиц оценивался примерно в 680,3 млн долларов США в 2016 году и, как ожидается, достигнет примерно 1,31 млрд долларов США к 2022 году, увеличившись в среднем на 14,12% в период между 2017 и 2022 годами.

Однако высокие цены на установку и высокие первоначальные инвестиционные затраты могут сдерживать внедрение теплиц во многих слаборазвитых и развивающихся странах. Поэтому актуальной задачей является разработка и внедрение доступных широкому населению смарт теплиц, посезонно или круглогодично обеспечивающих население овощами и фруктами. Повышение качества обслуживания теплиц, мониторинг и управление процессов микроклимата возможно за счет применения Программируемых логических конт-

роллеров, современных смарт, беспроводных и веб технологии WSN и IoT.

Статья посвящена проектированию системы "Домашняя смарт теплица", устройство управления которой реализовано на базе нечеткого логического контроллера (НЛК). Система позволяет выполнять а) контроль (мониторинг) процессов микроклимата в режиме Online; б) нечеткое управление в ручном и автоматическом режиме; в) регулировать параметры трех процессов микроклимата: охлаждение, полив и освещение.

Описанная модель НЛК адекватно отражает процесс управления микроклиматом в теплице. В результате использования системы повышается производительность труда пользователя-фермера, тем самым помогая пользователю-фермеру контролировать процесс роста растения и принимать необходимые меры по уходу за ними.

Разработанная система удовлетворяет критерию цена - качество, то есть является одновременно доступной населению, и в то же время имеет приемлемое качество обслуживания, используя технологии беспроводных сетей и веб (WSN, IoT) и нечеткого управления. Стоимость системы составляет 86.75 (цена не выше минимальной заработной платы казахстанца), экономический эффект от использования системы - 25, срок окупаемости теплицы - 4 сезона.

Ключевые слова: смарт теплица, критерий цена-качество, нечеткий логический контроллер (НЛК), WSN, IoT, ESP 32, Matlab.

1 Introduction

Greenhouse farming is one of the leading branches of agriculture. Public health directly depends on the development of this sector of the economy. Since the development of agriculture is an important problem of each state, huge funds are allocated to this industry. However, the problem of the lack of fresh vegetables/fruits, that is, the problem of import substitution, remains a big problem in many countries [17, 22].

Smart greenhouse is a revolution in agriculture, which creates a self-regulating microclimate suitable for plant growth through the use of sensors, actuators and control and management systems that optimize growth conditions and automate the growing process. The global smart greenhouse market was estimated at approximately 680.3 million in 2016 and is expected to reach approximately 1.31 billion by 2022, an increase of 14.12% on average between 2017 and 2022 [20].

However, high installation prices and high upfront investment costs can constrain greenhouse adoption in many undeveloped and developing countries. Therefore, the urgent task is the development and implementation of smart greenhouses that are suitable for the wider population, which provide the population with vegetables and fruits seasonally or year-round. Improving the quality of service of greenhouses, controlling and monitoring microclimate processes is possible through the use of programmable logic controllers, modern smart, wireless and web technologies WSN and IoT. Therefore, the urgent task is the development and implementation of smart greenhouses that are suitable for the wider population, which provide the population with vegetables and fruits seasonally or year-round. Improving the quality of service of greenhouses, controlling and monitoring microclimate processes is possible through the use of programmable logic controllers, modern wireless and web technologies WSN and IoT [22].

A greenhouse is a closed-type agroecological system in which energy processes are strictly determined by the technological process of growing plants, taking into account the influence of the environment. The complexity of modeling agroecosystem processes is that they include a large number of subsystems of various physical, chemical and biological nature. The general

scheme of the theoretical model of the plant production process consists of four blocks: energy and mass transfer in the soil-plant-atmosphere system, photosynthesis, respiration, and the processes of growth, development and movement of organic substances inside the plant [10].

Since agricultural systems are extremely complex structures and practically exclude the possibility of analytical solutions, you should use simulation modeling associated with repeated testing of the model with the necessary input data in order to determine their impact on the output criteria for evaluating the system. Simulation is perceived as a "last resort" method. However, in most cases, we recognize the need to resort to this tool, since the studied systems and models are too complex and need to be presented in an accessible and understandable way for the user.

2 Literature review

The existing technical solutions of smart greenhouses can be divided into two groups: industrial, which have a high price and are not accessible to the general user, and household (home) ones, which are inexpensive and affordable for the population, but which have limitations on productivity and functionality.

Industrial solutions of leading manufacturers based on the Simatic S7-1200 from Siemens [21] are very expensive (465) and are designed for complex automation, private firms' solutions [15, 25] are also not available to the general public (Smart standard VENT - 772), although designed for home use.

The way out of the situation is independent research and development of the project, which makes it possible to choose the necessary functionality and having a product price lower than market ones. Models of solutions using fuzzy control and have various functionalities, such as modelling and simulation [3], monitoring based on Micaz [13], irrigation based on Raspberry Pi [7], monitoring based on ESP 32 [1], processing and analysis of crop data using IoT [8], control based on Arduino Uno [2, 8, 11], fuzzy control [4, 9, 12, 14, 16, 19], adaptive control [6, 19], temperature control of the greenhouse [16], web monitoring [2, 11], automatic drip irrigation system [5, 23], phytomonitoring [24].

The development of an effective smart system for managing agricultural processes in a greenhouse with a lack of measurement information and a variety of factors affecting the result of regulation is possible based on the apparatus of fuzzy logic (NL) and neural networks (NN). To obtain the input data of the sample, an experiment was carried out on specially developed real equipment of the Home Smart Greenhouse system (the configuration of the system is described in paragraphs 3.1-3.3).

In the work, the Home Smart Greenhouse system is proposed, the control device of which is implemented on the basis of ESP 32 using a fuzzy logic controller (NLC). The previous embodiment of the proposed system is described in [1] and has only the function of monitoring processes in the greenhouse, that is, it lacks a control function using NLC.

The developed system meets the criterion of price - quality, that is, it is simultaneously accessible to the population, and at the same time has an acceptable quality of service, using wireless network technologies and Web WSN, IoT and smart management.

As a result of using the system, the productivity of the farmer user is increased, thereby helping the farmer user control the plant growth process and take the necessary measures to care for them.

3 Material and methods

3.1 Architecture of the Home Smart Greenhouse system

The system architecture has three levels (Fig. 1): 1st level – application level. At this level, operations are performed to manage the object and display reports using the interface tools (control buttons, charts, and histograms). 2nd level – the level of processing and data transfer. At this level, data exchange operations between devices are implemented. ESP32 microcontrollers with built-in Wi-Fi and Bluetooth modules are used.

The first module ESP32 (1) acts as a transmitter – it receives a signal from the sensors of the control object and transmits a signal to the second module ESP32 (2), which plays the role of a receiver. The ESP32 (1) and ESP32 (2) modules together perform two-way data exchange, providing measurement and control operations, interacting with the third level. 3rd level is the level of the object. The greenhouse has greenhouse environmental sensors.

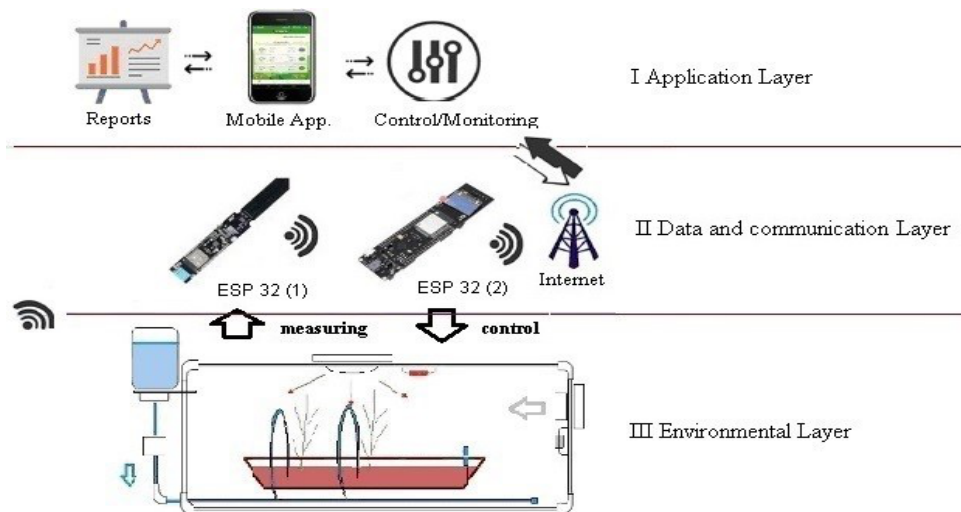


Figure 1: System Architecture

3.2 Control and management processes in "Home smart greenhouse"

The control object is a home mini-greenhouse, which considers three technological processes: heating/cooling, lighting and drip irrigation (Fig. 2).

The main element of the system is the control device (CU).

The drip irrigation system works this way. Water is filled in the tank (1). CU (11) controls the water supply (control action u_2), that is, opens/closes the water valve (2) by turning on/off the controller relay. When the valve opens, water flows down (blue arrow), passing through the main pipeline (3) and the dropper (4), and water the plant that is in the pot (brown vessel). Information about the state of soil x_2 is measured by a moisture sensor (5) and transmitted to the controller, the CU is received.

The cooling system is described as follows. The CU controls the air supply to the greenhouse, forming the control action u_1 , by turning on/off the fan (6) through the relay. Air

supply is indicated by a gray arrow. The temperature sensor (7) measures the temperature and air humidity of the greenhouse x_1 and transmits data to the controller CU.

The lighting system controls the light mode of the greenhouse. The UE generates a control action u_3 , which turns on/off the spotlight (8) via the controller relay. Light intensity data x_3 is measured by a light sensor (9) and transmitted to the controller CU.

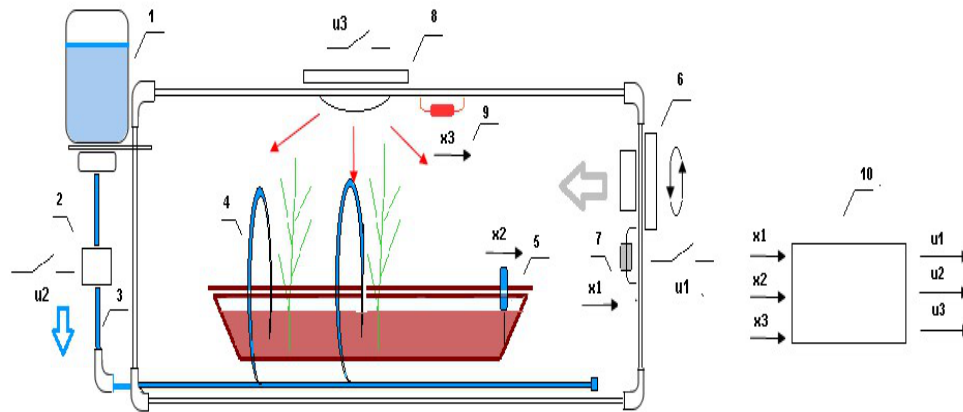


Figure 2: Technological processes in mini greenhouse

3.3 Control device based on a fuzzy logic controller

CU implemented on the basis of NLC [18]. A fuzzy inference is an approximation of the "inputs - output" relationship based on linguistic statements like "IF - THEN" and operations on fuzzy sets. The typical structure of the model based on fuzzy inference (NLC) is shown in Fig. 3.

It contains the following blocks:

- a *fuzzifier* that converts a fixed vector of influencing factors X into a vector of fuzzy sets \tilde{X} needed to perform fuzzy inference;
- a *fuzzy knowledge base* containing information about the dependence $Y = f(X)$ in the form of linguistic rules of the type "IF - THEN";
- a *machine of fuzzy inference*, which, based on the rules of the Knowledge Base, determines the value of the output variable in the form of a fuzzy set \tilde{Y} corresponding to fuzzy values of the input variables \tilde{X} ;
- a *defuzzifier* that converts the output fuzzy set \tilde{Y} into a clear number Y .

A zero-order Sugeno-type model is considered, in it the relationship between the input variables $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ and the output y is determined by the following fuzzy knowledge base:

$$\text{IF } (x_1 = a_{1,j1}) \text{ AND } (x_2 = a_{2,j1}) \text{ AND } \dots \text{ AND } (x_n = a_{n,j1})$$

OR $(x_1 = a_{1,j2})$ AND $(x_2 = a_{2,j2})$ AND ... AND $(x_n = a_{n,j2})$

...

OR $(x_1 = a_{1,jk(j)})$ AND $(x_2 = a_{2,jk(j)})$ AND ... AND $(x_n = a_{n,jk(j)})$

where $a_{1,jp}$ is the linguistic term by which the variable in the line with the number jp ($p = \overline{1, k_j}$) is evaluated; k_j – the number of lines – conjunctions in which the output y is evaluated by a linguistic term b_j ; m is the number of terms used to linguistically evaluate the output variable y .

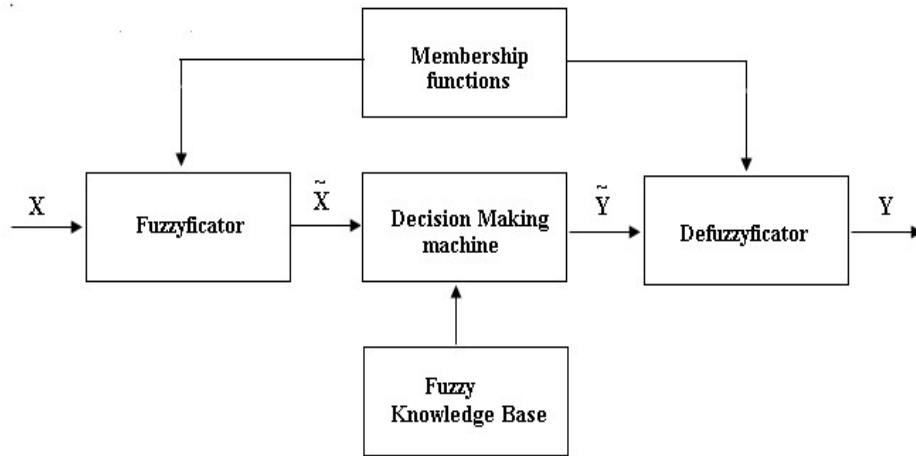


Figure 3: NLC structure

Using the operation (OR) and (AND), we will rewrite the fuzzy Knowledge Base in a more compact form:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j} \bigcap_{i=1}^n (x_i = a_{i,jp}) \rightarrow y = b_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

All linguistic terms in the Knowledge Base (2) are represented as fuzzy sets defined by the corresponding membership functions.

Fuzzy term membership function of x_i is

$$a_{1,jp}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, k_j} : \\ a_{1,jp} = \int_{\underline{x_i}}^{\overline{x_i}} \mu_{jp}(x_i)/x_i, \quad x_i \in [\underline{x_i}, \overline{x_i}] \quad (2)$$

The degree of belonging of the input vector $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ to fuzzy terms d_j from the Knowledge Base (2) is determined by the following system of fuzzy logical equations:

$$\mu_{d,j}(X^*) = \bigwedge_{p=1, k_j} \bigvee_{i=1, n} [\mu_{jp}(x_i^*)], \quad j = \overline{1, m} \quad (3)$$

where \wedge (\vee) is the operation from the s -norm (t -norm), that is, from the set of implementation: for the operation OR (AND). The following operations are most often used: OR – finding the maximum, AND – finding the minimum.

The output of model y is determined by a linear combination:

$$y = b_{j,0} + b_{j,1} \cdot x_1 + b_{j,2} \cdot x_2 + \dots + b_{j,n} \cdot x_n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

where $b_{j,i}$ are some numbers.

In the model under consideration (Zero-order Sugeno), the conclusions of the Knowledge Base rules are given by functions in which all the coefficients of the input variables in the linear "input-output" laws are equal to zero. The output of model (2) – (4) $y = b_j, j = \overline{1, m}$ correspond to the control signals $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ of the NLC (Fig. 2 and 3), i.e.

$$y = \{u_1(t); u_2(t); u_3(t)\}. \quad (5)$$

Let us consider in more detail the operation algorithm of the control unit. The basis of UU is the Knowledge Base, which contains the Databases and the Rule Base. The initial Rule Base is set by an expert. The process of the system includes three stages: Monitoring data; Signal transmission via WiFi/Bluetooth; Management (data processing using NLC).

At the first start-up, in the conditions of an operating greenhouse, the Database is filled with actual values characterizing the state of the microclimate. After filling in the database of previous states and the rule base, the system goes into the operating mode of controlling the microclimate of the greenhouse.

Table 1 provides a description of the linguistic variables of the model (2) – (5). The model has 5 inputs and 3 outputs. Since air temperature and air humidity are measured by one DHT11 sensor, these two physical quantities are denoted by the same variable $x_1(t)$. The fourth variable is the start time of the irrigation system t_{zap} .

Table 1: Linguistic variables and their scope

Linguistic variables	Variable and their intervals	Range	Type of membership function	Variable designation
I n p u t s – $X = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), t\}$				
Air temperature (air_temp), C	$L = [10, 12, 18];$ $Z = [16, 20, 24];$ $H = [22, 28, 30]$		Triangular	$x_1(t)^*$
Air humidity (air_hum) %	$L = [40, 42, 60];$ $Z = [45, 55, 65];$ $H = [50, 68, 70]$		Triangular	$x_1(t)^*$
Light (light), lk	$L = [100, 150, 500];$ $Z = [300, 450, 600];$ $H = [400, 750, 800]$		Triangular	$x_2(t)$
Irrigation time (uakit), hour	$t_{zap} = 20:00;$ (Runs at 20:00)		Singleton	t
Soil humidity (top_hum), %	$L = [40, 45, 60];$ $Z = [50, 65, 80];$ $H = [70, 85, 90]$		Triangular	$x_3(t)$

O u t p u t s - $y = \{u_1(t); u_2(t); u_3(t)\}$				
Actuator On/Off	1,	{0; 1}	Singleton	$u_1(t)$
Actuator On/Off	2,	{0; 1}	Singleton	$u_2(t)$
Actuator On/Off	3,	{0; 1}	Singleton	$u_3(t)$

The purpose of the NLC is to develop control actions $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ for the corresponding actuator based on the monitoring data $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ and the built-in rules of the Expert Knowledge Base described in Table 2.

Table 2: Rules from the Knowledge Base

	IF	THEN
Rule 1	air_temp is Low AND air_hum is Hi	Actuator 1 is On
Rule 2	air_temp is Hi AND air_hum is Low	Actuator 1 is Off
Rule 3	light is Hi AND uaqit is NOT K	Actuator 2 is Off
Rule 4	light is Low AND uaqit is NOT K	Actuator 2 is On
Rule 5	air_temp is Low AND air_hum is Hi AND top_hum is Hi AND uaqit is K	Actuator 3 is Off
Rule 6	air_temp is Hi AND air_hum is Low AND top_hum is Low AND uaqit is K	Actuator 3 is On

Table 3 shows the results of monitoring using the system "Home smart greenhouse". They are obtained using the signal sensors of the ESP 32 Transmitter (see paragraphs 2.3 and 2.4). The monitoring process was carried out for 162 hours (database update frequency – every 3 hours).

Table 3: Monitoring results using the "Home smart greenhouse" system

Air temperature,	Air humidity, %	Light, lk	Soil humidity, %	Irrigation time (h)
16	63	0	55	0
15	70	0	58	3
13	82	136	52	6
14	82	375	48	9
17	66	476	42	12
18	64	524	40	15
19	65	497	45	18
20	56	464	66	21
14	44	0	62	24
14	68	0	60	0
13	73	0	57	3

13	68	117	52	6
18	60	321	55	9
20	59	476	50	12
20	57	424	51	15
20	65	222	62	18
14	60	316	81	21
15	78	0	72	24
15	78	0	70	0
14	73	0	65	3
13	70	117	60	6
20	58	321	58	9
22	54	408	55	12
21	63	363	48	15
20	65	190	53	18
19	58	460	68	21
14	74	0	64	24
14	74	0	63	0
11	70	0	60	3
11	61	195	57	6
18	49	536	50	9
22	44	680	45	12
24	41	606	50	15
24	42	318	53	18
21	56	470	58	21
13	55	0	62	24
13	55	0	60	0
12	44	0	57	3
10	39	195	54	6
20	38	536	49	9
26	31	680	45	12
27	32	606	48	15
27	36	593	47	18
25	48	568	52	21
16	45	0	55	24
16	45	0	57	0
16	44	0	60	3
15	38	195	63	6
24	32	536	60	9
28	31	680	53	12
29	29	363	50	15
20	42	338	55	18
16	59	316	81	21
19	37	0	78	24

4 Results and discussions

The simulation results are reflected in the form of the NLC structure (Fig. 4), the rules of the Knowledge Base (Fig. 5), the values of the fuzzy logical inference of the system for three IM1, IM2 and IM3 (Fig. 6, 7, 8 and 9).

NLC is a Multi Input Multi Output (MIMO) system in which there are 5 inputs and 3 outputs (Fig. 4). Inputs: Air Temperature, Humidity, Illumination, Soil Humidity and Watering Time. Outputs: state IM1, IM2 and IM3 (see Table 2). The Knowledge Base contains 6 rules (see Table 3).

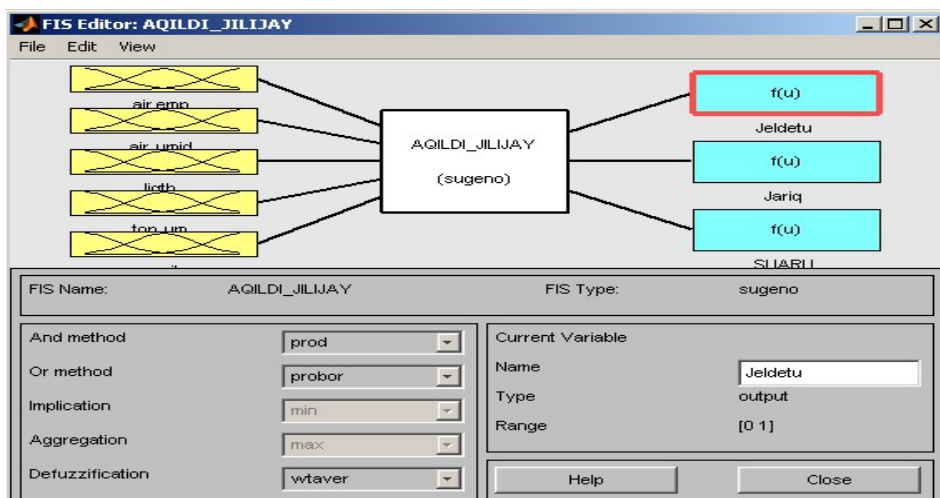


Figure 4: The structure of the NLC model in Matlab

An example of creating a Knowledge Base based on Table 3 in the Matlab environment is shown in Fig. 5. Here the variable On means to turn on the corresponding IM, the variable Off to turn off the corresponding IM.

Let us explain the calculated control values in Fig. 6-9.

For example, with an input vector $x_1 = \{15.12; 66.71; 620.7; 69.88; 12.06\}$ NLC output $y_1 = \{u_1 = 0; u_2 = 0.5; u_3 = 0\}$ (rule 1 is fulfilled, that is, at low air temperature and high air humidity – the fan must be turned off and rule 3, that is, at high daylight – the projector must be turned off).

With the input vector $x_2 = \{27.32; 44.02; 450; 65; 11.5\}$ NLC output $y_2 = \{u_1 = 0.734; u_2 = 0.5; u_3 = 0\}$ (rule 2 is fulfilled, that is, high air temperature and low air humidity – the fan must be turned on).

With the input vector $x_3 = \{19.51; 55; 193.9; 65; 11.5\}$ NLC output $y_3 = \{u_1 = 0; u_2 = 0.5; u_3 = 0\}$ (rule 4 is satisfied, that is, during the day in low light – the spotlight must be turned on).

For example, with an input vector $X_4 = \{27.8; 44.76; 193.9; 46.71; 22.16\}$ NLC output $y_4 = \{u_1 = 0.53; u_2 = 0.5; u_3 = 0\}$ (rule 2 is fulfilled, that is, at high air temperature and low air humidity – the fan must be turned on and rule 6, that is, at high air temperature and low air humidity and low soil moisture after 20:00 hours – the irrigation valve must be enable).

Monitoring data (input vector) for 162 hours are shown in Fig. 10-A in the form of graphs. The values of the logical output of the NLC (output vector) – control signals of actuators are shown in Fig. 10-B – in graphs.

In Fig. 11 shows the monitoring process using the mobile application of the Home Smart Greenhouse system in ONLINE mode.

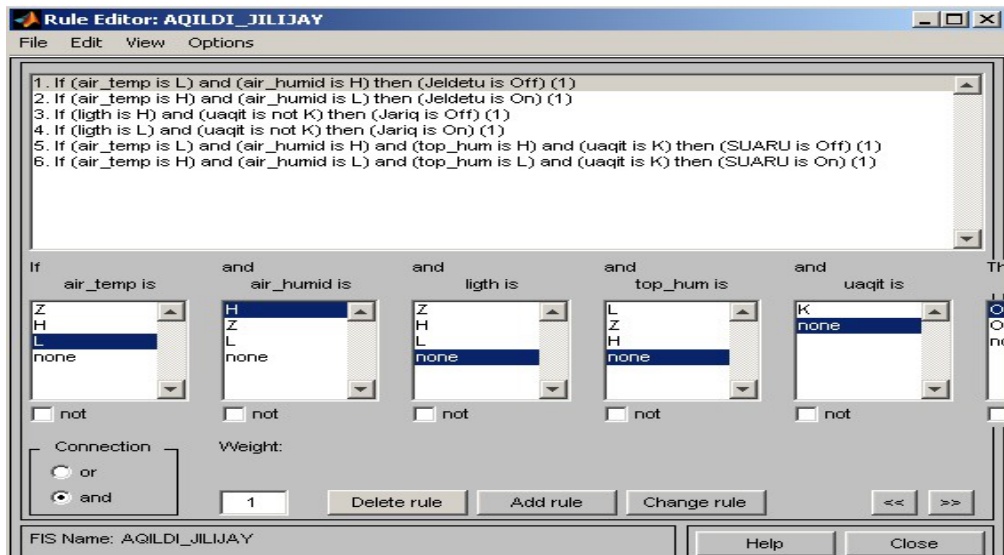


Figure 5: Rules from the NLC Knowledge Base in the Matlab environment

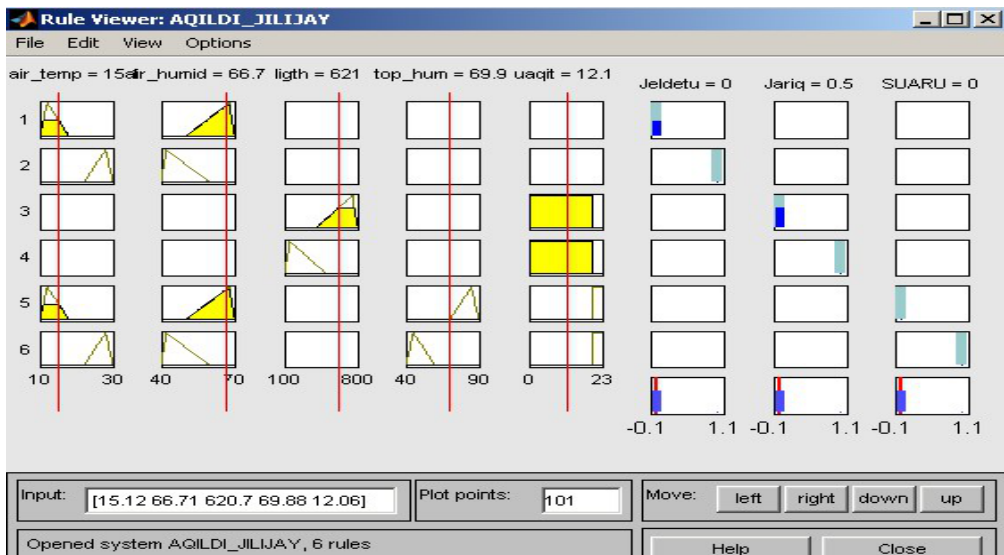


Figure 6: NLC fuzzy output: rules 1 are complied with (Fan off) and rule 3 (Spotlight off)

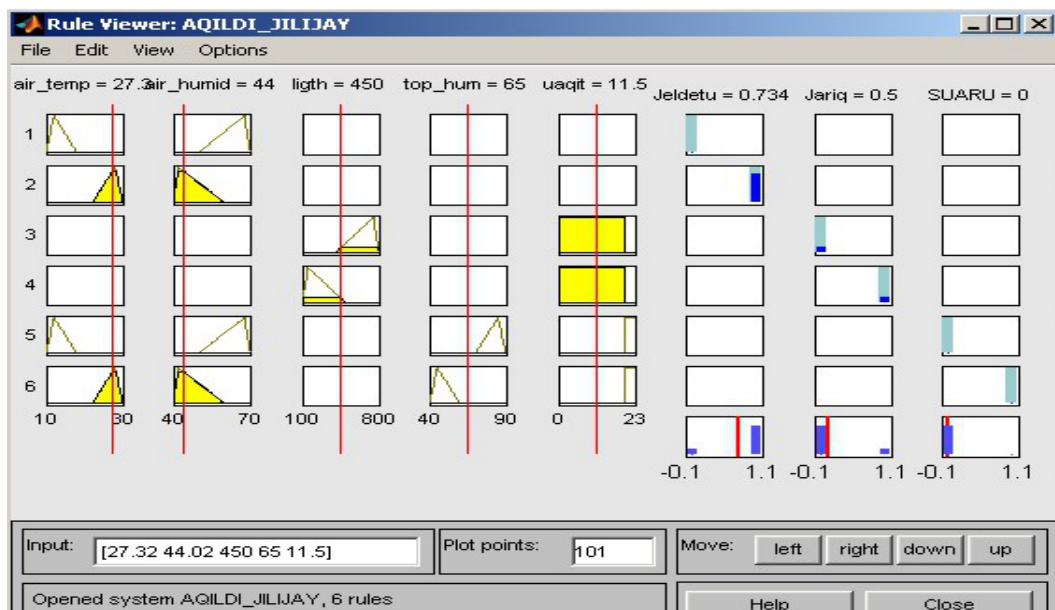


Figure 7: Fuzzy NLC output: rule 2 is fulfilled (Fan is on)

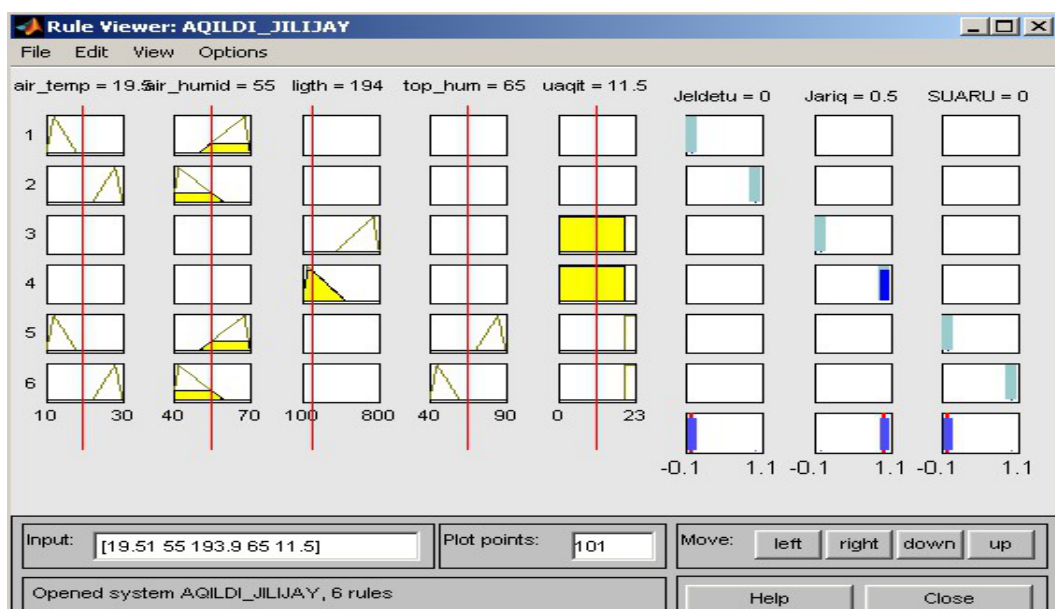


Figure 8: Fuzzy NLC output: rule 4 is fulfilled (Spotlight is on)

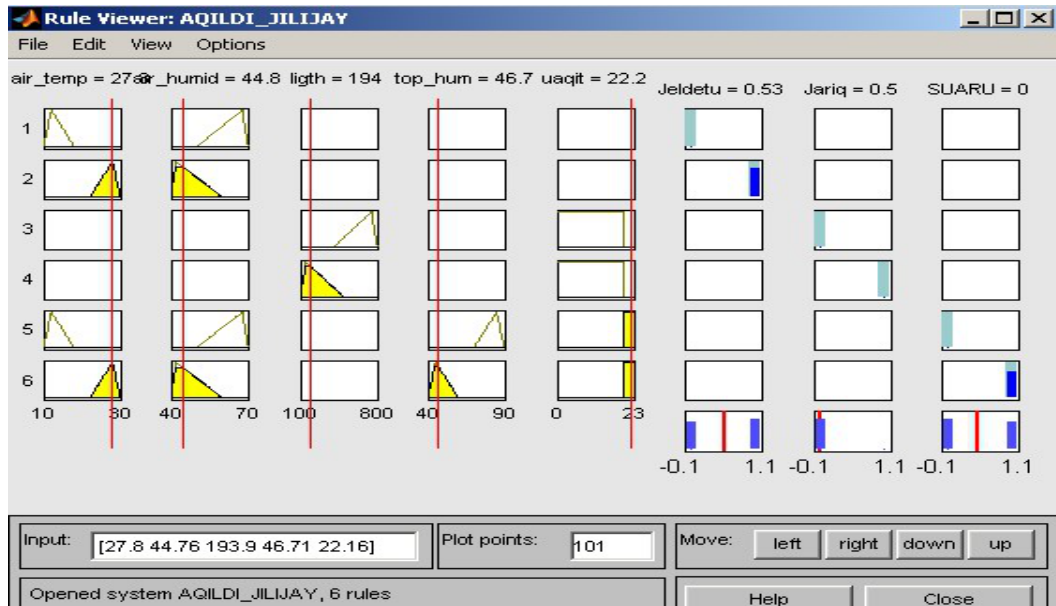


Figure 9: Fuzzy NLC output: rule 2 is fulfilled (fan is on) and rule 6 (watering valve on)

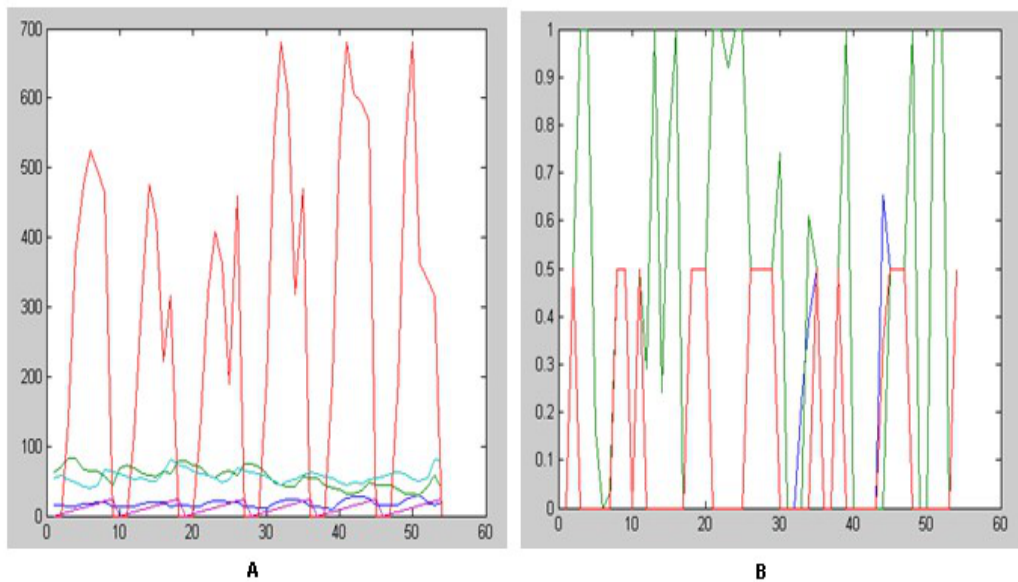


Figure 10: A – Monitoring data for 162 hours; B – the logical output of the NLC (output vector) – control signals of actuators



Figure 11: Mobile application "Akyldy zhylyzhay" , in the process of work

5 Conclusion

The paper proposes an approach to the development of the Home Smart Greenhouse system, the control device of which is implemented on the basis of NLC in the form of the Sugeno model. The system allows you to perform:

- 1) control (monitoring) of the microclimate processes in Online mode;
- 2) fuzzy control in manual and automatic mode;
- 3) adjust the parameters of the three microclimate processes: cooling, watering and lighting.

The main element of the system is a control device based on NLC. The device is based on the ESP 32 microcontroller using wireless networks and web technology (WSN, IoT) and fuzzy control.

The described NLC model adequately reflects the microclimate control process in the greenhouse. As a result of using the system, the productivity of the farmer user is increased, thereby helping the farmer user control the plant growth process and take the necessary measures to care for them.

The developed system meets the criterion of price-quality. The cost of the system is 86.75 (the price is not higher than the minimum wage of Kazakhstan), the economic effect of using the system is 25, the payback period of the greenhouse is 4 seasons.

References

- [1] Amantur Umarov, Murat Kunelbayev, Maksat Satymbekov et al., "Micro climate Monitoring System For A Home Greenhouse As Part Of ESP32", *International Conference on Renewable Energy & Emerging Technologies (ICREET)* 2019. doi:0.1617/vol6iss11pid101035.
- [2] Carlos Robles, Jesús Callejas, Aura Polo, "Low-Cost Fuzzy Logic Control for Greenhouse Environments with Web Monitoring", *Electronics* 6, 71, 2017. doi:10.3390/electronics6040071.
- [3] Didi Faouzi, N. Bibi-Triki, B. Draoui, A. Abene, "Modeling and simulation of fuzzy logic controller for optimization of the greenhouse microclimate management", *Agricultural science and technology* Vol. 9, No 2, 2017. doi: 10.15547/ast.2017.02.024.
- [4] Doaa M. Atia, Hanaa T., "El-madany Analysis and design of greenhouse temperature control using adaptive neuro-fuzzy inference system", *Journal of Electrical Systems and Information Technology* 4 (2017): 34-48.
- [5] Georgios Nikolaou, Damianos Neocleous, Nikolaos Katsoulas, Constantinos Kittas, "Irrigation of Greenhouse Crops", *Horticulturae* 5, 7, 2019. doi:10.3390/horticulturae5010007.
- [6] Giuseppina Nicolosi, Roberto Volpe, Antonio Messineo, "An Innovative Adaptive Control System to Regulate Microclimatic Conditions in a Greenhouse", *Energies* 10, 722, 2017. doi:10.3390/en10050722.
- [7] Ishak S.N., Abd Malik N.N., Abdul Latiff N.M. et. al. "Smart Home Garden Irrigation System Using Raspberry Pi", *IEEE 13th Malaysia International Conference on Communications (MICC)* (2017).
- [8] Jirapond Muangprathub, Nathaphon Boonnam, Siriwan Kajornkasirat, Narongsak Lekbangpong, Apirat Wanichsombat, Pichetwut Nillaor, "IoT and agriculture data analysis for smart farm", *Computers and Electronics in Agriculture* 156 (2019): 467-474.
- [9] Kais Said, Qays Jebur, "Design a Multi-Choice Fuzzy Control System of the Greenhouse", *Journal of Engineering* Volume 21-2 (2015): 103-118.
- [10] Klapwijk D., "Kasklimaat plantengroei en groeibeheersing onder glas [Microclimate and plant growth management]", *Amsterdam: Elsevier* (1971).
- [11] Lukas Bajer, Ondrej Krejcar, "Design and Realization of Low Cost Control for Greenhouse Environment with Remote Control", *IFAC-PapersOnLine* 48-4 (2015): 368-373.
- [12] Manel Jomaa, Mehdi Abbes, Fernando Tadeo, Abdelkader Mami, "Greenhouse Modeling, Validation and Climate Control based on Fuzzy Logic", *Engineering, Technology & Applied Science Research* Vol. 9, No. 4 (2019): 4405-4410.
- [13] Mustafa Alper Akkaç, Radosveta Sokullu, "An IoT-based greenhouse monitoring system with Micaz motes", *Procedia Computer Science* 113 (2017): 603-608.
- [14] Rafiuddin Syam, Wahyu H. Piarah and Budi Jaelani, "Controlling Smart Green House Using Fuzzy Logic Method", *International Journal on Smart Material and Mechatronics* Vol. 2 No. 2 (2015).
- [15] Reallab, "Sistema kontrolya i upravleniya mikroklimatom v ovoshchekhranilishche "Agroterm" [Climate control and management system in the vegetable store "Agroterm"]", *Nauchno-issledovatel'skaya laboratoriya avtomatizacii i proektirovaniya Automation and Design Research Laboratory* <https://www.reallab.ru/>.
- [16] Revathi S., Sivakumaran N., "Fuzzy Based Temperature Control of Greenhouse", *IFAC-PapersOnLine* 49 (1) (2016): 549-554.
- [17] Richard Grabowski, "The failure of import substitution: Reality and myth", *Journal of Contemporary Asia* Vol. 24, Issue 3, 1994. <https://doi.org/10.1080/00472339480000181>.
- [18] Shtovba S.D., "Proektirovanine nechenkih sistem sredstvami Matlab [Designing fuzzy systems using Matlab]", *Moscow: Telekom* (2007).
- [19] Mohamed S., Hameed I.A., "A GA-Based Adaptive Neuro-Fuzzy Controller for Greenhouse Climate Control System", *Alexandria Engineering Journal* 57 (2015): 773-779.
- [20] "Smart greenhouse last edited 16 Sep 2018, https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/Smart_greenhouse.
- [21] Siemens AG 2018, Greenhouse control with Simatic S7-1200. Entry ID: 109757060, Vol 1, 05/2018. <http://www.support.industry.siemens.com/cs/ww/en/view/109757060>.

- [22] Umarov A., "Auildin ruhani jangirui: shagin jilijaylar [Spiritual revival of the village: mini greenhouses]", "*Kazakh uni*" *Respublicalik kogamdik saiasi gazetii-ulttik portal* ["*Kazakh uni*" *republican social newspaper-national portal*], last edited 17 July 2018. <https://qazaquni.kz/2018/07/17/87636.html>.
- [23] Usman Ahmad, Dwa Made Subrata and Chusnul Arif, "Speaking Plant Approach for Automatic Fertigation System in Greenhouse" , *International Journal of Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition* Vol. 4, Issue 3 (2011).
- [24] Uwe Schuch, Dennis Danneh, "Microclimate control in greenhouses based on phytomonitoring data" , *Humboldt University of Berlin, Biosystem Engineering division* (2013).
- [25] Viktor Petin, "Arduino i Raspberry Pi v proektah Internet of Things [Arduino and Raspberry Pi in Internet of Things projects]" , *Sankt-Peterburg*, 2016. <http://www.bhv.ru>.

MPНТИ 20.51.19

<https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.15>¹А.Т. Бектемесов, ²В.Е. Власюк¹PhD, E-mail: a.bektemessov@turan-edu.kz²магистрант, E-mail: vve.ru1996@gmail.com

Университет «Туран», г. Алматы, Казахстан

ПРОЕКТИРОВАНИЕ УМНОГО ДОСТУПА АВТОМОБИЛЕЙ НА ТЕРРИТОРИЮ УНИВЕРСИТЕТА "ТУРАН"

С развитием общества все более важным становится проблема обеспечения безопасности жизнедеятельности человека во всех ее аспектах. В данной работе рассмотрены программные и технические средства для создания автоматического распознавания объектов, в частности автомобильных номеров. Цель работы. Разработка системы автоматического доступа транспортных средств на территорию парковки университета «Туран». Данная работа демонстрирует возможность использования обучаемых систем в контрольно пропускных пунктах, используя при этом микрокомпьютер RaspberryPi 3 Model B, который отличается своей мобильностью и модульностью. Областью исследования является компьютерное зрение и машинное обучение используемое средства математической статистики, численных методов, методов оптимизации. В результате работы создана модель демонстрирующая работоспособность системы. Система работает на мини компьютере, используя камеру Raspberry для распознавания номеров, сервопривод для демонстрации работы системы СКУД. При попадании в область видимости камеры, срабатывает системы считывание, при помощи алгоритмов происходит распознавание номера и проверка его по базе и в случае успешной проверки, происходит открытие шлагбаума. Данный компьютер имеет возможность обучаться дальше на реальном объекте.

Ключевые слова: автоматизированный доступ, компьютерное зрение, СКУД, машинное обучение.

¹А.Т. Бектемесов, ²В.Е. Власюк¹PhD, E-mail: a.bektemessov@turan-edu.kz²магистрант, E-mail: vve.ru1996@gmail.com

«Туран» университеті, Алматы қ., Қазақстан

«Туран» университетінің аумағына көліктердің кіру рұқсатын беретін ақылды жүйесін жобалау

Қоғамның дамуымен адамның тіршілік әрекетінің қауіпсіздігін қамтамасыз ету проблемасы оның барлық аспектілерінде неғұрлым маңызды болып отыр. Бұл жұмыста объектілерді, атап айтқанда автомобиль нөмірлерін автоматты тану үшін бағдарламалық және техникалық құралдар қарастырылған. «Туран» университетінің тұрақ аумағына көліктердің автоматты кіру жүйесін әзірлеу. Бұл жұмыс үйренуші жүйелерді бақылау өткізу пункттерінде пайдалану мүмкіндігін көрсетеді, бұл ретте өзінің мобильділігі мен модульділігі арқылы ерекшеленетін raspberry 3 Model B микрокомпьютері қолданылады. Зерттеу саласы компьютерлік көру және математикалық статистиканың қолданылатын құралдарын, сандық әдістерді, оңтайландыру әдістерін машинамен оқыту болып табылады. Жұмыс нәтижесінде жүйенің жұмысқа қабілеттілігін көрсететін модель жасалды. Жүйе нөмірлерді тану үшін raspberry камерасын, кіруді басқару жүйесінің жұмысын көрсету үшін сервопривод арқылы шағын компьютерде жұмыс істейді. Камераның көріну аймағына түскен кезде оқу жүйесі іске қосылады, алгоритмдердің көмегімен нөмірді тану және оны база бойынша тексеру жүргізіледі және тексеру сәтті болған жағдайда шлагбаум ашылады. Бұл компьютер нақты объектіде әрі қарай оқу мүмкіндігіне ие.

Түйін сөздер: автоматтандырылған кіру, компьютерлік көргіштік, СКУД, машинналық оқу.

¹А.Т. Bektemessov, ² V.E. Vlassyuk

¹PhD, E-mail: a.bektemessov@turan-edu.kz

²магистрант, E-mail: vve.ru1996@gmail.com

Turan University, Almaty, Kazakhstan

Designing smart access for transports to the territory of «Turan» University

With the development of society, the issue of ensuring human security in all its aspects has become increasingly important. This scientific article considers software and technical means for creating automatic recognition of objects, in particular car numbers. Purpose of the work. Development of a system of automatic access of vehicles to the parking area of «Turan» University. This work demonstrates the possibility of using trainee systems at checkpoints, while using a microcomputer RaspberryPi 3 Model B, which is characterized by its mobility and modularity. The field of research is computer vision and machine learning used means of mathematical statistics, numerical methods, optimization methods. As a result of the work, a model has been created that demonstrates the operability of the system. The system runs on a mini computer, using a Raspberry camera for number recognition, a servo motor to demonstrate the operation of the access control system. When the camera enters the area of visibility, the reading system is activated, the number is recognized by algorithms and checked by base, and in case of successful check, the barrier is opened. This computer is able to learn further at a real site.

Key words: automated access, computer vision, access control, machine learning

1 Введение

Для обеспечения безопасности студентов, преподавателей и работников университета, а также их личных транспортных средств. В ходе выполнения проекта необходимо было спроектировать автоматизированную систему контроля доступа с исполнительными устройствами, которая позволит в автоматическом режиме пропускать транспортные средства, имеющие доступ на территорию парковки университета. Посредством машинного зрения автоматически определять область с номером автомашины и оцифровывать сам номер для дальнейшей работы с ним. Одним из факторов актуальности работы является микрокомпьютер RaspberryPi 3 Модель B [1, 2, 3], на котором была построена система контроля доступа. Преимущества использования данного компьютера заключается в том, что:

- мобильные размеры позволяют монтировать центральный узел системы непосредственно в шлагбаум или занимать минимальное количество пространства;
- цена в среднем в 3 раза меньше по сравнению со стационарными компьютерами используемых в аналогичных системах;
- позволяет использовать разные модули для усовершенствования системы.

Главной целью является разработка системы по автоматизации доступа транспортных средств на территорию парковки университета «Туран». Построить макет, наглядно демонстрирующий работоспособность системы.

В соответствии с поставленной целью были определены следующие задачи:

1. Изучить проблему контроля доступа;

2. Изучить и выбрать доступные программные и аппаратные средства для реализации проекта;
3. Спроектировать и разработать базу данных;
4. Разработка системы считывания номерных знаков посредством компьютерного зрения;
5. Объединить программный и аппаратный комплекс в единую информационную систему;
6. Построить прототип, демонстрирующий работу проекта.

Для того что бы произвести более подробное изучение, охватить как можно большую аудиторию, состоящую из студентов, преподавателей и работников ВУЗа, получить большое количество данных для анализа мы создали анонимный опрос «Парковка университета «Туран». Опрос находился в открытом доступе с февраля по май, мы получили ответы от 427 человек. В котором большую часть респондентов составили учащиеся университета. В ходе анализа ответов опроса мы так же узнали, что парковкой чаще пользуются в после обеденное время, данных ответов составило 60%, на втором месте до обеденное время 25,7% и кто пользуется парковкой целый день 14,3%. Одна третья часть опрошиваемых ответили нам что часто сталкиваются на парковке с посторонними людьми на личном автотранспорте. Большая часть опрошиваемых, редко, но замечали посторонних людей и только 23% не когда не видела посторонних людей. Как мы видим, из рисунка 1. Одна третья часть опрошиваемых ответила нам что часто сталкиваются на парковке с посторонними людьми на личном автотранспорте. Большая часть опрошиваемых, редко, но замечали посторонних людей и только 23% не когда не видела посторонних людей. Исходя из данных опроса, было выяснено, что больше половины опрошенных людей, считают, что необходимость в такой системе есть.



Рисунок 1: Наблюдение респондентов по нахождению посторонних людей на территории парковки университета

2 Обзор литературы

По результатам исследования было решено создать проект на одноплатном, миниатюрном, полноценном и тихом компьютере размером с банковскую карту RaspberryPi 3 model B. Благодаря которому можно управлять различными устройствами. Использование данного компьютера сокращает бюджет проекта, и расширяет горизонт его дальнейшего развития, модульность проекта позволяет производить обновление, ремонт и замену технических и программных частей проекта, не подвергая изменениям целой системы. Преимущество использование Raspberry Pi. Компьютер имеет на борту привычные ПК составляющие: процессор, оперативную память, разъем HDMI, композитный выход, USB, Ethernet, Wi-Fi и Bluetooth. Главное преимущество RaspberryPi — 40 контактов ввода/вывода общего назначения (GPIO). К ним мы будем подключать периферию для взаимодействия с внешним миром: исполнительные устройства и сенсоры любого вида. Штатной операционной системой для RaspberryPi является Linux [4, 5, 6]. Она устанавливается на microSD карту, а та — в специальный слот на плате.

Для проекта была выбрана операционная система Raspbian. Это официальная операционная система для Raspberry Pi, она разработана специально для этого устройства и имеет все необходимое программное обеспечение. Raspbian основана на ARM версии Debian 8 Jessie [7, 8]. Основной целью работы являлось создание собственного программного продукта, разработанного специально для Казахстана, со спецификой местных номеров. Так как в Казахстанских номерах используется свой шрифт, размер и расположение букв и цифр. Необходимо было написать конфигурацию под Казахстанские номера. Произвести обучение программы, для более точного и быстрого распознавание номера. Выбрав язык разработки Python [9, 10, 11] из-за читаемости кода и наличием определенных библиотек, подходящих для разработки. Так же немаловажно было выбрать функциональную и удобную среду разработки. Выбор пал на PyCharm [12, 13], среда разработки от компании JetBrains.

3 Материал и методы

Для того чтобы оператор мог просматривать данные по въезду, управлять контрольно-пропускным пунктом, а именно в тот момент, когда подъезжает автомобиль с номерами, не занесенными в базу данных. Было создан клиентский интерфейс, где оператор имеет возможность управлять СКУД, для того чтобы сделать доступ к этому интерфейсу независимым, от устройства, платформы, операционной системы, было решено написать веб-страницу. Подключение к ней можно будет осуществить как локально, так и через интернет. Выбирая язык для написания веб-страницы, мы взглянули на мировую практику и оказалось, что более 80% сайтов в мире использует PHP. Хранения номеров необходимо производить в базе данных, а также использовать систему управления базами данных. Для решения данной задачи подходят реляционные базы данных. Данные будут организованы в виде набора таблиц, состоящих из столбцов и строк. В таблицах хранится информация об объектах, представленных в базе данных. Работать с базой данных осуществлялось с помощью декларированного языка программирования SQL, язык структурированных запросов, с таким функционалом как: создание,

модификация, управление данными в реляционной базе данных и работой с системой управления базами данных MySQL [14]. Но изучая MySQL и альтернативные СУБД, нами было найдена СУБД MariaDB [15]. Ее преимущество — это производительность. Из обычной камеры в нашей системе, было создано настоящее компьютерное зрение. Для этого нам необходимо было использовать библиотеку с открытым исходным кодом, которая предоставляет возможность работать с алгоритмами компьютерного зрения, обрабатывать изображения. Подходящая библиотека, работающая на Python, с необходимым для нас набором инструментов для реализации наших целей проекта это OpenCV [16, 17]. Модель алгоритма нашей системы приведен в виде UML схемы (Рисунок 2).

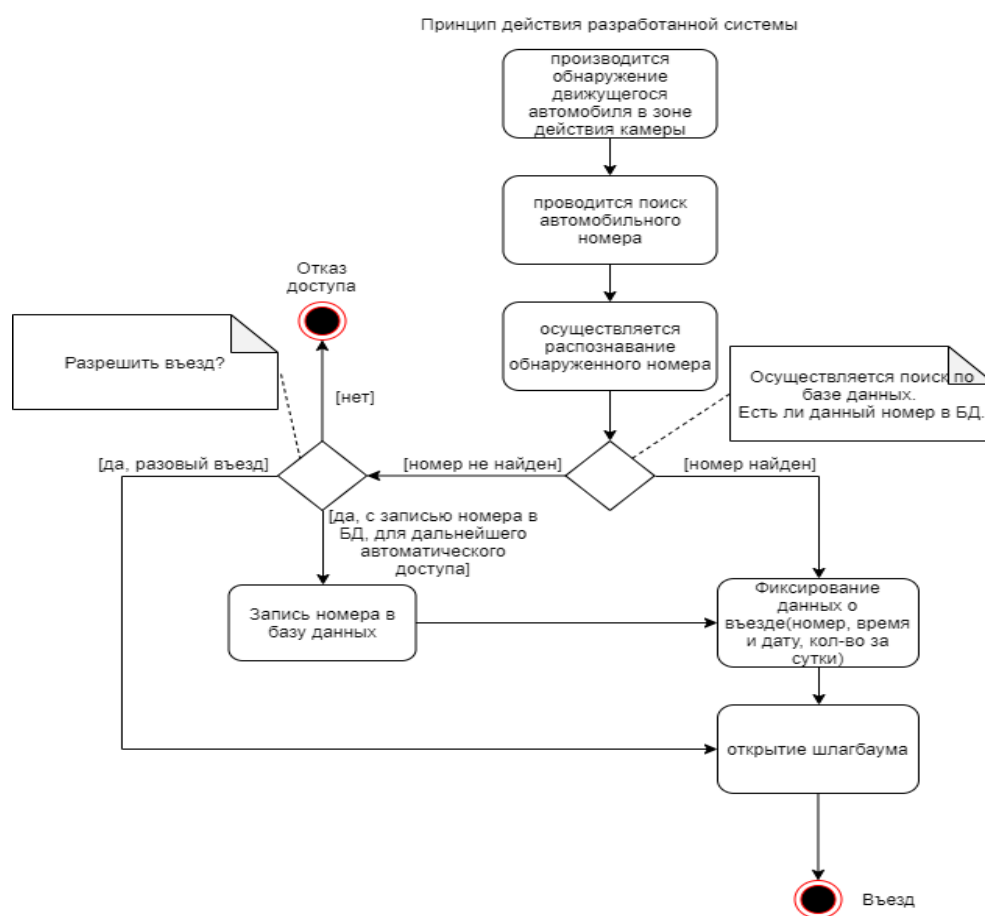


Рисунок 2: Принцип действия разработанной системы

4 Результаты и обсуждение

Далее нам необходимо было, что бы наша система не только могла выступать как компьютерное зрение, находить необходимые для нас объекты, но и могла считывать с них информацию, а затем ее оцифровать для дальнейшей работы с ней. Для достижения

этой цели нам необходимо было использовать одну из OCR (Optical Character Recognition) библиотек. OCR, или оптическое распознавание текста, представляет собой механическое или электронное преобразование изображений напечатанного текста в машинный. После настройки библиотеки и обучению ее на нахождение объектов на изображении или в видеопотоке. Нам нужно было найти не просто область на фото в которой встречается искомый объект, но и отделить все его точки от других объектов или фона. Эта разновидность задач называется «Instance Segmentation». Так же обучить нашу систему работать с конфигурацией, которую мы написали под Казахстанские номера.

5 Заключение

Используя технические и программные средства, создан полноценный макет для демонстрации работоспособности нашей системы. Обучив систему распознавать номера, получили положительные результаты в тестах. Для точного распознавания, необходимо проводить обучение на более обширной базе автомобильных номеров. Для повторного обучения системы и достижения высоких результатов безошибочного определения номеров, имеется возможность собрать достаточную базу автомобильных номеров и картинок, сделанных нашей системой.


Список литературы

- [1] Петин В.А. Микрокомпьютеры Raspberry Pi // Практическое руководство, БХВ-Петербург. -2015. - Т.2, - С.46-47.
- [2] Саймон М. Raspberry Pi // Сборник рецептов. Решение программных и аппаратных задач. O'Reilly, - 2017. - С.354-368.
- [3] Cook M., Evans J., Craft B. Raspberry Pi Projects For Dummies // O'Reilly. -2015. - С.264-276.
- [4] Membrey P., Hows D. Learn Raspberry Pi 2 with Linux and Windows 10 // O'Reilly. - 2015. - Vol.3, - P.125-167.
- [5] Старовойтов А.А. Настройка аппаратных средств в Linux // БХВ-Петербург. - 2006. - Т.2, - С.60-75.
- [6] Hammell B. Arduino Meets Linux. The Users Guide to Arduino // Yun Development. - 2015. - P.15-23.
- [7] Hertzog R., Mas R. The Debian Administrator's Handbook, Debian Jessie from Discovery to Mastery // Freexian. - 2015. - P. 351 - 364.
- [8] Williams J.G. Debian GNU/Linux Desktop Survival Guide // Togaware. - 2015. - P. 254 - 256.
- [9] Guido S., Muller A. Introduction to Machine Learning with Python. A Guide for Data Scientists // O'Reilly & Associates. - 2017. - Т.1, - P. 59- 64.
- [10] Маккинни У. Python и анализ данных // ДМК Пресс. - 2015. - Т.1 - С. 282-283.
- [11] Лутц М. Изучаем Python // Символ-Плюс. - 2011. -Т.4, - С. 564-568.
- [12] www.jetbrains.com/ru-ru/pycharm. Дата обращения: 15.08.2019.
- [13] <https://devpractice.ru/files/books/python/Python.Lessons.pdf>. Дата обращения: 16.08.2019.
- [14] Когаловский М.Р. Энциклопедия технологий баз данных // М.:Финансы и статистика - 2012. -Т.2, - С. 120-125.
- [15] Мартишин С., Симонов В., Храпченко М. Базы данных. Практическое примечание СУБД SQL и NoSQL // Учебное пособие, Форум, Инфра-М - 2016. - С. 160-176.

- [16] Guido S., Muller A. Learning OpenCV 3 Computer Vision with Python // Second Edition, O'Reilly Media - 2017. - Vol.2, - P. 564-570.
- [17] Beyeler M. Machine Learning for OpenCV: Intelligent image processing with Python // Packt Publishing - 2017. - P. 215-235.

References

- [1] Petin V.A., "Mikrokompyutery Raspberry", *Prakticheskoye rukovodstvo*, BKHV-Peterburg Vol.2, (2015): 46-47.
- [2] Saymon M., "Raspberry Pi. Sbornik retseptov", *Resheniye programmnykh i apparatnykh zadach* O'Reilly (2017): 354-368.
- [3] Cook M., Evans J., Craft B., "Raspberry Pi Projects For Dummies", *O'Reilly* (2015): 264-276.
- [4] Membrey P., Hows D., "Learn Raspberry Pi 2 with Linux and Windows 10", *O'Reilly* Vol.3, (2015): 125-167.
- [5] Starovoytov A.A., "Nastroyka apparatnykh sredstv v Linux", *BKHV-Peterburg* Vol.2, (2006): 60-75.
- [6] Hammell B., "Arduino Meets Linux", *The Users Guide to Arduino Yun Development* (2015): 15-23.
- [7] Hertzog R., Mas R., "The Debian Administrator's Handbook", *Debian Jessie from Discovery to Mastery* (2015): 351-364.
- [8] Williams J.G., "Debian GNU/Linux Desktop Survival Guide", *Togaware*, (2015): 254-256.
- [9] Guido S., Muller A., "Introduction to Machine Learning with Python", *A Guide for Data Scientists*, Vol.1, (2017): 59-64.
- [10] Makkinni U., "Python i analiz dannykh", *DMK Press*, Vol.1, (2015): 282-283.
- [11] Lutts M., "Izuchayem Python, Simvol-Plyus", - Vol.4, (2011): 564-568.
- [12] www.jetbrains.com/ru-ru/pycharm, Accessed date: 08/15/2019
- [13] <https://devpractice.ru/files/books/python/Python.Lessons.pdf>, Accessed date: 08/16/2019
- [14] Kogalovskiy M.R., "Entsiklopediya tekhnologiy baz dannykh", *M.:Finansy i statistika*, Vol.2, (2012): 120-125.
- [15] Martishin S., Simonov V., Khrapchenko M., "Bazy dannykh", *Prakticheskoye primechaniye SUBD SQL i NoSQL. Uchebnoye posobiye*, Infra-M (2016): 160-176.
- [16] Guido S., Muller A., "Learning OpenCV 3 Computer Vision with Python", *Second Edition*, *O'Reilly Media* Vol.2, (2017): 564-570.
- [17] Beyeler M., "Machine Learning for OpenCV: Intelligent image processing with Python", *Packt Publishing* (2017): 215-235.

¹R.G. Biyashev, ²A. Smolarz, ³K.T. Algazy , ⁴A.Khompyshev

¹Doctor of Technical Sciences, Institute of Information and Computational Technologies of the RK MES CS, Almaty, Kazakhstan, E-mail: brg@ipic.kz

²Doctor of Technical Sciences, Lublin University of Technology, Lublin, Poland, E-mail: a.smolarz@pollub.pl

³PhD student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: kunbolat@mail.ru

⁴PhD student, Institute of Information and Computational Technologies of the RK MES CS, Almaty, Kazakhstan, E-mail: ardabek@mail.ru

ENCRYPTION ALGORITHM "QAMAL NPNS" BASED ON A NONPOSITIONAL POLYNOMIAL NOTATION

Processing, storage, and transmission of information are important processes in modern society. The practical application of cryptography has become an integral part of the life of modern society. In Kazakhstan, for the protection of the electronic information are mainly used foreign software and hardware-software tools. Therefore, the development of Kazakhstan cryptographic protection tools is certainly necessary. This article describes the new Qamal NPNS encryption algorithm, which is a modification of the previously developed Qamal encryption algorithm. The modification lies in the use of a transformation based on a non-positional polynomial notation (NPN). To build a new encryption algorithm, an SP-network is also used. The theoretical justification of the appropriateness of applying the NPN and the results of the analysis of the encryption algorithm are given. Algebraic cryptanalysis for multiplication in non-positional polynomial notations was considered separately. The study of the algorithm strength for separate procedures showed good results, which suggest the cryptographic strength of the developed algorithm.

Key words: cryptography, encryption, S-box, non-positional polynomial notation, SP-network.

¹Р.Г. Бияшев, ²А. Смоларш, ³К.Т. Алгазы, ⁴А. Хомпышев

¹Т.ғ.д., ҚР БЖҒМ ҒК, Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: brg@ipic.kz

²Т.ғ.д., Люблин Техникалық университеті, Люблин қ., Польша, E-mail: a.smolarz@pollub.pl

³докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: kunbolat@mail.ru

⁴докторант, ҚР БЖҒМ ҒК, Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: ardabek@mail.ru

«QAMAL NPNS» шифрлеу алгоритмінің позициялы емес полиномдық санау жүйесін пайдаланған модификациясы

Ақпаратты өңдеу, сақтау және алмасу қазіргі қоғамдағы маңызды процесс болып табылады. Криптографияны іс жүзінде қолдану қазіргі қоғам өмірінің ажырамас бөлігіне айналды. Қазақстанда электронды ақпаратты қорғау үшін негізінен шетелдік бағдарламалық және аппараттық-бағдарламалық құралдар қолданылады. Сондықтан да қазақстандық криптографиялық қорғаудың құралдарын әзірлеу қажет. Бұл мақалада бұрын әзірленген Qamal шифрлеу алгоритмінің жаңа модификациясы сипатталады. Модификация позициялы емес полиномдық санау жүйелеріне (ПЕПСЖ) негізделген шифрлеу алгоритмін құру үшін SP желісі қолданылған. Сонымен қатар шифрлеуде ПЕПСЖ пайдалану мақсатының дұрыстығына теориялық түсініктеме берілді және шифрлеу алгоритмін талдау нәтижелері келтірілді. Позициялық емес полиномдық санау жүйелеріндегі көбейтуге арналған алгебралық криптоталдау нәтижелері бөлек көрсетілген. Сонымен қатар, алгоритмде пайдаланылған басқа да процедураларға арналған беріктілігін зерттеу жұмыстары жақсы нәтижелер көрсетті. Бұл өз кезегінде әзірленген алгоритмнің криптографиялық берік болатындығына болжам жасауға негіз болып табылады.

Түйін сөздер: криптография, шифрлеу, S блок, позициялы емес полиномдық санау жүйесі, SP жүйесі.

¹Р.Г. Бияшев, ²А. Смоларш, ³К.Т. Алгазы, ⁴А. Хомпыш

¹д.т.н., Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: brg@ipic.kz

²д.т.н., Люблинский Технический университет, г. Люблин, Польша, E-mail: a.smolarz@pollub.pl

³докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: kunbolat@mail.ru

⁴докторант, Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: ardabek@mail.ru

Алгоритм шифрования "QAMAL NPNS" с использованием непозиционной полиномиальной системы счисления

Обработка, хранение и передача информации являются важными процессами в современном обществе. Практическое применение криптографии стало неотъемлемой частью жизни современного общества. В Казахстане для защиты электронной информации применяются в основном зарубежные программные и аппаратно-программные средства. Поэтому разработка казахстанских средств криптографической защиты безусловно является необходимой. В данной статье описывается новый алгоритм шифрования «Qamal NPNS», который является модификацией ранее разработанного алгоритма шифрования «Qamal». Модификация заключается в использовании преобразования, основанного на непозиционной полиномиальной системе счисления (НПСС). Для построения нового алгоритма шифрования также применяется SP-сеть. Приводятся теоретическое обоснование целесообразности применения НПСС и результаты анализа алгоритма шифрования. Отдельно приведены результаты алгебраического криптоанализа для умножения в непозиционных полиномиальных системах счисления. Исследование стойкости алгоритма для отдельных процедур показало хорошие результаты, что предполагает криптостойкость разрабатываемого алгоритма.

Ключевые слова: криптография, шифрование, S-блок, непозиционная полиномиальная система счисления, SP-сеть.

1 Introduction

The science of secret transmission of information arose in ancient times. The development of writing and communications has greatly advanced its formation. The advent of affordable internet has taken cryptography to a new level. Due to the increasing dependence of society on information technology and the need to ensure information security, the use of cryptographic methods has become relevant for almost everyone. However, secrecy can be inferior in importance to ensuring integrity, authenticity and other aspects of security. The invention of new principles of cryptography and the emergence of the so-called public key cryptography gave a powerful impetus to the widespread use of this science for the needs of civil society, business, banking and other fields of activity [1].

Cryptographic information protection is one of the main subsystems of any information protection system. The processes of handling, storage, transmission and use of information become dominant in the life of modern society [1-3]. All specific tasks of cryptography substantially depend on the level of development of engineering and technology, on the means of communication used, and the methods of transmitting information [4, 5].

2 Literature review

The security of sensitive information has begun to be governed primarily by the key. The encryption algorithm itself is considered to be known to the enemy and available for study,

but the algorithm provides for the use of an unknown to the adversary key, on which the applied information transformations substantially depend [3-6].

Claude Shannon was the first who with mathematical rigor formulated questions about the absolute and theoretical strength of ciphers. Namely, to what extent a cryptosystem is resistant to an attacker with unlimited resources [7]. Requirements for perfect secrecy: 1) the key is truly random (equally probable); 2) the key is exactly as long as the message that is encrypted; 3) the key is used one time only. In case of violation of at least one of these conditions, the cipher ceases to be completely unbreakable, and there appear possibilities in principle to break it. But these conditions make a completely unbreakable cipher very expensive and impractical. Before using such a cipher, it is necessary to provide all subscribers with a sufficient supply of random keys and exclude the possibility of their repeated use. And this is extremely difficult and expensive to do [5, 6]. Therefore, completely unbreakable ciphers are used only in communication networks with a small amount of transmitted information, and these are usually networks for transmitting sensitive or critical information.

Most typically, legitimate users are forced to use not completely unbreakable ciphers to protect their information. Symmetric block encryption algorithms have gained wide use, and now they are the main cryptographic means to ensure confidentiality in the processing of information in modern information and telecommunication systems [5-7].

The main types of block ciphers are a Feistel network and a substitution-permutation network (SP-network). An SP-network is a block cipher in which the transformation of each round is a combination of substitutions (S-boxes) and permutations. Two fundamental principles for constructing cryptographic transformations, confusion and diffusion, proposed by Claude Shannon in 1949, can clearly be implemented in the structure of SP-network [7-9]. Recall that confusion means complicating all kinds of connections between the plaintext and the ciphertext. Examples of SP-networks are the ciphers IDEA, AES (Rijndael), Serpent, Kuznyechik [10-13]. Every day there are more and more such examples. It is the new practical applications of cryptography that are one of the sources of its development.

For Kazakhstan, information and communication technologies play a big part in the development of the young state. In 2017, the Cybersecurity Concept was adopted. The objectives of the Concept are to achieve and maintain the level of security of electronic information resources, information systems, and the information and communication infrastructure from external and internal threats, ensuring sustainable development of the Republic of Kazakhstan in the context of global competition [14].

In recent years, the Institute of Information and Computational Technologies of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan has carried out research on the study of symmetrical block encryption algorithms for electronic messages and has developed various modifications, including those based on non-positional polynomial notations (NPNs) [15-21]. These works, in turn, will contribute to the creation of domestic cryptographic information protection facilities.

3 Materials and methods

The paper [19] introduced the new symmetric block encryption algorithm Qamal. The Qamal algorithm scheme is shown in Figure 1 (a). The encryption algorithm includes pairing a plaintext with a key using the bitwise addition (XOR) operation, a substitution S-box, and

mixing procedures Mixer1 and Mixer2.

The considered algorithm is a modification of the above one, where a non-positional polynomial notation is used (Figure - 1 (b)). Instead of the operation of pairing (addition) a key modulo 2 (XOR operation) to a plaintext block, multiplication by the NPN is performed. For this reason, the algorithm was named Qamal NPNS. The developed algorithm supports a fixed block and a key length of 128 bits. This is yet another difference from the basic algorithm.

Building an NPN is the selection of its bases designated as working bases. Let some irreducible polynomials be chosen as such bases:

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x) \quad (1)$$

Let us denote their degrees by m_1, m_2, \dots, m_S respectively. The polynomials (1), considering their arrangement, form a single system of bases. The main working range of the NPN is the polynomial $P^m(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_S(x)$ of degree $m = \sum_{i=1}^S m_i$. In the NPN, any polynomial $F(x)$ whose degree is fewer than m has a unique non-positional representation in the form of a sequence of residues of its division by the bases(1):

$$F(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_S(x)), \quad (2)$$

where $\alpha_i \equiv F(x) \pmod{p_i(x)}$, $i = 1, \dots, S$. The positional notation of $F(x)$ is restored by its nonpositional form (2) [22-25]:

$$F(x) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x) B_i(x)$$

where

$$B_i(x) = \frac{p^m(x)}{p^i(x)} M_i(x) \equiv 1 \pmod{p_i(x)}. \quad (3)$$

The polynomials $M_i(x)$ are selected in such a way as to satisfy the congruence in (3). In the case of only the transmission and storage of information, the positional form of the polynomial $F(x)$ according to the formula:

$$F(x) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x) P_i(x)$$

where

$$P_i(x) = \frac{p^m(x)}{p^i(x)}. \quad (4)$$

Each working base must have a degree not higher than the value of L (in our case, 128). The bases (1) are selected from among all irreducible polynomials of degree m_1 to m_S with the condition that equation (4) holds:

$$k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_S m_S = L. \quad (5)$$

In the equation (5), $0 < k_i < n_i$, $i = 1, \dots, S$ are unknown coefficients and the number of selected irreducible polynomials of degree m_i . One specific set of these coefficients is a solution of (5) and defines one system of working bases, n_i is the number of all irreducible polynomials of degree m_i , $1 \leq m_i \leq L$, $S = k_1 + k_2 + \dots + k_S$ is the number of selected working

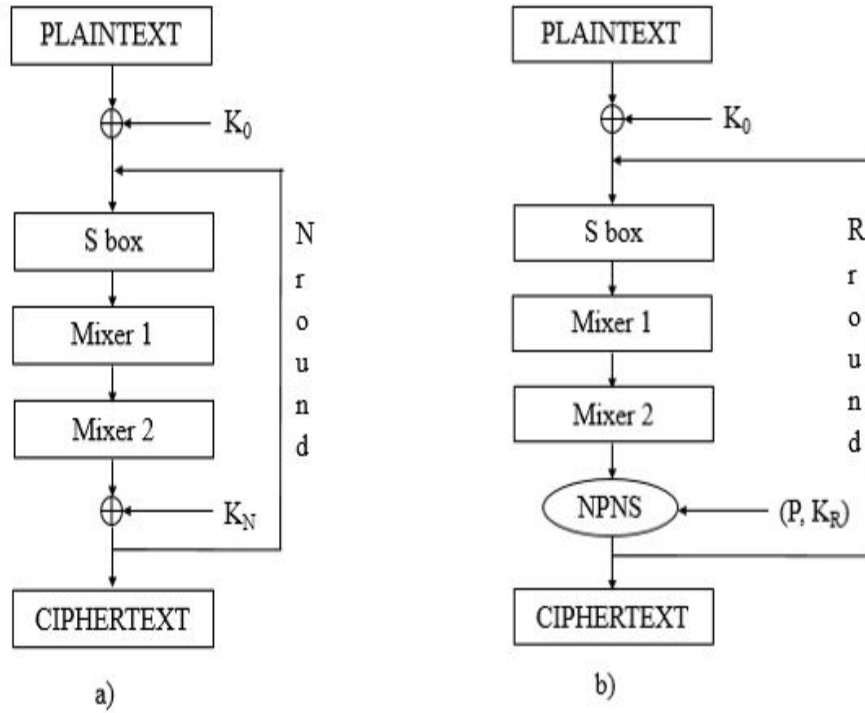


Figure 1: Qamal encryption algorithm scheme, b) Qamal NPNS encryption algorithm scheme

bases. Complete residue systems modulo polynomials of degree m_i include all polynomials of degree at most m_{i-1} , for the notation of which m_i bits are required.

Encryption. The used key sequence of L bits long is also interpreted as the sequence of remainders $k_1(x), k_2(x), \dots, k_S(x)$, but from dividing some other polynomial $K(x)$ by the same working bases of the system:

$$K(x) = k_1(x), k_2(x), \dots, k_S(x). \quad (6)$$

where $K(x) \equiv k(x)(\text{mod} p_i(x))$, $i = 1, \dots, S$. Then, as a cryptogram $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_S(x)$, some encryption function $H(F(x), K(x))$ can be considered:

$$H(x) = \omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_S(x). \quad (7)$$

where $H(x) \equiv \omega_i(x)(\text{mod} p_i(x))$, $i = 1, \dots, S$.

In accordance with the operations in the NPN, the operations in the functions $F(x)$, $K(x)$, $H(x)$ are performed in parallel modulo the polynomials (1) selected as the working bases of the NPN.

For encryption, elements of the residue sequence $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_S(x)$ in the cryptogram are used, which are the least remainders on dividing the products $\alpha_i(x)k_i(x)$ by the corresponding bases $p_i(x)$, if the multiplication operation is used as the function $H(F(x), K(x))$ [22-25]:

$$\alpha_i(x)k_i(x) \equiv \omega_i(x)(\text{mod} p_i(x)), i = 1, \dots, S. \quad (8)$$

Decryption. When decrypting the cryptogram $H(x)$ using the known key $K(x)$, for each value $k_i(x)$, we calculate, as follows from (8), the reciprocal (inverse) polynomial $k_i^{(-1)}(x)$ from the following congruence:

$$k(x)k_i^{(-1)}(x) = 1(\text{mod}p_i(x)), i = 1, \dots, S \quad (9)$$

The result is the polynomial

$$K^{(-1)}(x) = (k_1^{(-1)}(x), k_2^{(-1)}(x), \dots, k_S^{(-1)}(x))$$

which is inverse to the polynomial $K(x)$. Then the elements of the residue sequence (2) in accordance with (8) and (9) are restored by the congruence:

$$\alpha_i(x) = k_i^{(-1)}(x)\omega_i(x)(\text{mod}p_i(x)), i = 1, \dots, S$$

Thus, in the considered model of the encryption algorithm for an electronic message of a given length L bits in the NPN, the complete key is the selected system of the polynomial working bases $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$ and the inverse key $K^{(-1)}(x) = (k_1^{(-1)}(x), k_2^{(-1)}(x), \dots, k_S^{(-1)}(x))$ to decrypt the message.

Round keys. The round-key generation algorithm remains the same as in the basic algorithm [19]. The round keys K_i are generated from the cipher key K_0 using the key extension procedure. As a result, an array of round keys is formed, from which the required round key is then directly selected.

The complete key in the developed encryption algorithm modification is comprised of the chosen system of polynomial bases $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$, the key $K(x) = (k_1(x), k_2(x), \dots, k_S(x))$ obtained while generating a pseudo-random sequence, and the inverse key $K^{(-1)}(x) = (k_1^{(-1)}(x), k_2^{(-1)}(x), \dots, k_S^{(-1)}(x))$ calculated according to expression (9).

4 Results and discussions

4.1 Encryption algorithm analysis

The main methods for analyzing the strength of such algorithms include brute force attacks, statistical and algebraic methods. Brute force attacks are to check all possible keys by using them to decrypt the ciphertext and then to verify whether the result obtained represents a plaintext.

Statistical methods for purposes of analysis use some statistical dependence of the algorithm, which is performed for the correct key with a greater frequency than for a false key.

The basis of algebraic methods is the building of a system of linear equations in which the elements of plaintext and key are selected as variables. When solving the system of equations using the linearization method, the possibility of finding key elements in parts is considered.

Keyspace calculation. In the algorithm, the key consists of two parts that are generated independently of each other. The length of each key is 128 bits. One part of the key is a pseudo-random sequence generated for the bitwise addition operation and for the non-positional encryption system. In an NPN, the second part of the key is the selected set of polynomial bases $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$. It is known that the number of operations to

enumerate all candidate keys with a length of 128 bits is equal to 2^{128} . The cryptographic strength of the encryption algorithm based on an NPN is determined by the number of all possible and different options for choosing complete keys. The cryptostrength of encryption of a message of a given length L is calculated by the formula [26]:

$$Q_k = 2^L \cdot \sum_{k_1, k_2, \dots, k_S} (k_1 + \dots + k_S)! C_{n_1}^{k_1} \dots C_{n_S}^{k_S} \quad (10)$$

To find the exact value of Q_k for each L , it is necessary to calculate the number of irreducible polynomials of degrees up to L and the compositions of L .

The number of irreducible binary polynomials of degree L is calculated by the following formula [26]:

$$I_L = \frac{1}{L} \sum_{d \mid L} \mu(d) 2^{L/d} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid L} \mu(L/d) 2^d$$

where d are divisors of L , $\mu(x)$ is the Mobius function defined as follows:

$$\begin{cases} 0, & \text{if } x \text{ has a squared prime factor} \\ (-1)^k, & \text{if } x \text{ is the product of } k \text{ different numbers} \\ +1, & \text{if } x=1 \end{cases}$$

Table 1 shows the values of I_L from 1 to 32. If $L = 128$, then $I_L \approx 2^{122}$.

Table 1: Values of I_L from 1 to 32

I	I_L	I	I_L	I	I_L	I	I_L
1	2	9	56	17	7,710	25	1,342,176
2	1	10	99	18	14,532	26	2,580,795
3	2	11	186	19	27,594	27	4,971,008
4	3	12	335	20	52,377	28	5,586,395
5	6	13	630	21	99,858	29	18,512,790
6	9	14	1,161	22	190,557	30	35,790,267
7	18	15	2,182	23	364,722	31	69,273,666
8	30	16	4,080	24	698,870	32	134,215,680

It is known from the theory of numbers that in the general case for the number L there are 2^{L-1} compositions, of which exactly C_{L-1}^{k-1} ones have the length of k .

Based on this fact, the total number of complete keys was calculated for different values of L . For L equal to 16, 32, and 64, the number of enumeration operations is 2^{34} , 2^{69} , and 2^{138} , respectively. Taking into account these calculations, it is suggested that when L takes the value of 128, the number of enumeration operations is close to 2^{276} .

4.2 Algebraic analysis results

Algebraic methods are based on the algebraic properties of an information transformation algorithm. The strength of algorithms against statistical methods depends on the amount of

accumulated information about plaintexts and the corresponding converted texts. Algebraic methods usually do not require a lot of statistics when using the same key.

Algebraic cryptanalysis for multiplication in non-positional polynomial notations was considered separately. For multiplication in an NPN, a partial attack was used. Earlier studies had been conducted in this direction [27]. The system of equations binding the key, plaintext, and ciphertext in the encryption scheme based on an NPN for one irreducible polynomial is given below:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{n-1}d_{n-1} \oplus k_n s_{n-2} = 0 \\ c_{n-1}d_{n-2} \oplus c_{n-2}d_{n-1} \oplus k_n s_{n-3} \oplus k_{n-1} s_{n-2} = 0 \\ \dots \\ c_{n-1}d_1 \oplus c_{n-2}d_2 \oplus \dots \oplus c_1 d_{n-1} \oplus k_n s_0 \oplus k_{n-1} s_1 \oplus \dots \oplus k_2 s_{n-2} = 0 \\ c_{n-1}d_0 \oplus c_{n-2}d_1 \oplus \dots \oplus c_0 d_{n-1} \oplus k_{n-1} s_0 \oplus \dots \oplus k_1 s_{n-2} = a_{n-1} \\ c_{n-2}d_0 \oplus c_{n-3}d_1 \dots \oplus c_0 d_{n-2} \oplus k_{n-2} s_0 \oplus k_{n-3} s_1 \oplus \dots \oplus k_0 s_{n-2} = a_{n-2} \\ \dots \\ c_2 d_0 \oplus c_1 d_1 \oplus c_0 d_2 \oplus k_2 s_0 \oplus k_1 s_1 \oplus k_0 s_2 = a_2 \\ c_1 d_0 \oplus c_0 d_1 \oplus k_1 s_0 \oplus k_0 s_1 = a_1 \\ c_0 d_0 \oplus k_0 s_0 = a_0 \end{array} \right.$$

Here $c = (c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0)$ is a numerical sequence of the given ciphertext, $a = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0)$ is a sequence of characters of the unknown plaintext, $k = (k_n, k_{n-1}, \dots, k_2, k_1, k_0)$, $d = (d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_2, d, d_0)$, and $s = (s_{n-2}, s_{n-3}, \dots, s_2, s_1, s_0)$ are the sequences of unknown variables.

In this context, the input data are random sequences resulting from other transformations. It was shown in [25] that after one cycle, each bit of the intermediate result depends on each bit of the plaintext and on the key. Minimal changes in the plaintext or in the key lead to changes of about 50% of the bits (an avalanche effect). In view of the above, an attack in parts is impractical.

In the case of an algebraic attack, provided that the ciphertext and plaintext are known, the number of search operations for finding the key lies within the following interval [27]:

$$\sum_{i=1}^s I(m_i) \leq J(m) < \prod_{i=1}^s I(m_i)$$

where $I(m_i)$ is the number of irreducible polynomials of degree fewer than m_i , $J(m)$ is the number of search operations for complete keys of length m .

5 Conclusion

The study of the cryptostrength of the algorithm begins with the cryptanalysis of each transformation separately. Then, depending on the results obtained, an analysis of the entire algorithm, i.e. for the whole round transformation, is conducted.

The basis of algebraic methods is combining a set of equations describing the internal transformations in the cipher system, and solving the simultaneous equations. Typically,

these internal transformations include linear and non-linear parts. Developers of modern encryption systems often use S-boxes, which due to their non-linearity significantly increase the level of strength of such encryption systems against algebraic cryptographic attacks. In addition, in order to complicate the use of analytical approaches, iterative (round) schemes are widely used, when the transformation output is again fed to the input a certain number of times.

The study of the algorithm strength for separate procedures showed good results, which suggest the cryptographic strength of the developed algorithm and the possibility to study the algorithm comprehensively, i.e. considering all transformation procedures and rounds. Work in this direction is ongoing. The results will be presented in the following publications.

6 Acknowledgments

This work was supported by a targeted funding program «Development of software and hardware and software for cryptographic protection of information during its transmission and storage in infocommunication systems and general purpose networks» from the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (registration number 0118PK01064).

References

- [1] Kamol Lek, Naruemol Rajapakse, "Cryptography: Protocols, Design, and Applications", *Nova Science Publishers* (2012): 242.
- [2] Keith Martin, "Everyday Cryptography: Fundamental Principles and Applications", *Oxford University Press* (2012): 560.
- [3] Gatchenko N.A., Isaev A.S., Yakovlev A.D., "Kriptograficheskaya zashchita informatsii [Cryptographic protection of information]", *Spb: NIU ITMO* (2012): 142.
- [4] Camel Tanougast, "Progress in Data Encryption Research", *Nova Science Publishers Inc* (2013): 158.
- [5] Yaschenko V.V., "Vvedeniye v kriptografiyu [Introduction to Cryptography]", *SPb: Peter* (2001): 348.
- [6] Douglas R. Stinson, Maura B. Paterson, "Cryptography: Theory and Practice", *Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group* (2019): 580.
- [7] Tokareva N.N., "Symmetric Cryptography [Simmetrichnaya kriptografiya]", *NSU, Novosibirsk* (2012): 234.
- [8] Wenbo Mao, "Modern Cryptography: Theory and Practice", *Prentice Hall PTR* (2003): 648.
- [9] Bruce Schneier, "Applied Cryptography: Protocols, Algorithms, and Source Code in C", *John Wiley & Sons* (1996): 784.
- [10] William Stallings, "Cryptography and Network Security: Principles and Practice", *Pearson; 6 edition* (2013): 752.
- [11] F.L.Bauer, "Decrypted Secrets. Methods and maxims of cryptology", *Springer-Verlag Berlin, Fourth, Revised and Extended Edition* (2006): 555.
- [12] L. K. Babenko, E. A. Ischukova, "Sovremennyye algoritmy blochnogo shifrovaniya i metody ikh analiza [Modern Block Encryption Algorithms and Methods of their Analysis]", *Moscow, Helios, ARV* (2006): 376.
- [13] Alferov A.P., Zubov A.Yu., Kuzmin A.S., Cheremushkin A.V., "Osnovy kriptografii [Fundamentals of cryptography]", *M.: Helios ARV* (2001): 479.
- [14] Alferov A.P., Zubov A.Yu., Kuzmin A.S., Cheremushkin A.V., "Kontseptsiya kiberbezopasnosti "Kibershchit Kazakhstana"[Concept of Cybersecurity "Cyber Shield of Kazakhstan]", *Approved by Decree of the Government of the Republic of Kazakhstan* (2017): 407.

-
- [15] R. G. Biyashev, S. E. Nyssanbayeva, "Algorithm for Creation a Digital Signature with Error Detection and Correction", *Cybernetics and Systems Analysis* Vol. 48, No. 4, (2012): 489-497.
- [16] Biyashev R., Nyssanbayeva S., Kapalova N., "The Key Exchange Algorithm on Basis of Modular Arithmetic", *Proceedings of International Conference on Electrical, Control and Automation Engineering (ECAE2013), Hong Kong ? Lancaster, U.S.A.: DEStech Publications*, (2013): 16.
- [17] Kapalova N., Haumen A., "The model of encryption algorithm based on non-positional polynomial notations and constructed on an SP-network", *Open Engineering*, Volume 8, Issue 1, (2018): 140-146.
- [18] Amerbayev V.M., Biyashev R.G., Nyssanbaeva S.E., "Use of nonpositional notations in cryptographic protection", *Izv. Nat Acad. of Sciences Resp. Kazakhstan, Ser. Phys.-Mat*, No 3 (2005): 84-89.
- [19] Amerbayev V.M., Biyashev R.G., Nyssanbaeva S.E., "Use of nonpositional notations in cryptographic protection", *Izv. Nat Acad. of Sciences Resp. Kazakhstan, Ser. Phys.-Mat*, No 3 (2005): 84-89.
- [20] Otchet o nauchno-issledovatel'skoy rabote «Razrabotka programmnykh i programmno-apparatnykh sredstv dlya kriptograficheskoy zashchity informatsii pri yeye peredache i sokhraneni v infokommunikatsionnykh sistemakh i po obshchim» [Research report "Development of software and firmware means for cryptographic protection of information during its transfer and storage in information and communications systems and general-purpose networks."], (2018), State reg. No. 0118RK01064.
- [21] Kapalova N., Dyusenbayev D., "Security analysis of an encryption scheme based on nonpositional polynomial notations", *Open Engineering*, No. 6, (2016): 250-258.
- [22] Amerbayev V. M., Biyashev R. G., Nyssanbayeva S. E., "Primeneniye nepozitsionnykh sistem schisleniya pri kriptograficheskoy zashchite [Implementation of Non-positional Notations for Cryptographic Security]", *News of the National Academy of Science of the Republic of Kazakhstan, Physical-mathematical series, Almaty: Gylym*, No. 3, (2005): 84-89.
- [23] Biyashev R. G., Nyssanbayeva S. E., "Algoritm formirovaniya elektronnoy tsifrovoy podpisi s vozmozhnost'yu obnaruzheniya i ispravleniya oshibok [Algorithm for creating a digital signature with error detection and correction]", *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 48, No. 4, (2012): 14-23.
- [24] Biyashev R., Nyssanbayeva S., Kapalova N., Khakimov R., "Modular models of the cryptographic protection of information", *International Conference on Computer Networks and Information Security (CNIS2015), Changsha, China*, (2015): 393-398.
- [25] Biyashev, R.G., Kalimoldayev M.N., Nyssanbayeva, S.E., Kapalova N.A., Dyusenbayev, D.S., Algazy K.T., "Development and analysis of the encryption algorithm in nonpositional polynomial notations", *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, No. 6(2)(2018): 19-33.
- [26] Biyashev R.G., Nyssanbayeva S.E., Kapalova N.A., "Sekretnyye klyuchi dlya nepozitsionnykh kriptosistem. Razrabotka, issledovaniye i primeneniye [Private keys for non-positional cryptosystems. Development, research, and application]", *LAP LAMBERT Academic Publishing*, (2014): 126.
- [27] Kapalova N., Dyusenbayev D., "Security analysis of an encryption scheme based on nonpositional polynomial notations", *Open Engineering*, No. 6, (2016): 250-258.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал «Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика» (в английской версии «Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science Series») принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}2\epsilon$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственный секретарь редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы (название вуза, центра без сокращений), рабочий или моб. телефон, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$ или формат eps [см. п.7]. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 7 страниц.
Структура статьи.

Первая страница:

- 1) Первая строка - номер МРНТИ (IRSTI) (можно взять здесь: <http://grnti.ru/>), выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
- 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 3) Автор(ы) статьи - Инициалы и фамилия, место работы (аффилиация), город, страна, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
- 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

Стандартные разделы статьи: **Введение, Обзор литературы, Материал и методы, Результаты и обсуждение, Заключение, Благодарности (если имеются) , Список литературы** (названия разделов не менять)

- 6) **Введение.** Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания

опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором аспекте.

7) **Обзор литературы.** В разделе обзор литературы должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

8) **Материал и методы.** Раздел должен состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

9) **Результаты и обсуждение.** В этом разделе приводятся анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) **Заключение.** Обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) **Благодарности** (если имеются). Например: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант «Наименование темы гранта», 2018-2020 годы).

12) **Список литературы/References.** (оба списка, если статья на русском или казахском. Если статья на английском, то только один список по стилю Чикаго). Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50% на английском языке. В случае наличия в списке литературы работ, представленных на кириллице, необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) → название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке (год в круглых скобках) → страницы. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossijskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4 (2011): 8-30. Список литературы представляется по мере цитирования, и ТОЛЬКО

те работы, которые цитируются в тексте. Ссылки на литературу оформляются в квадратных скобках с указанием номера литературы. Стиль оформления "Список литературы" на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления" (требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления "References" романизированного списка литературы (см. выше), а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений согласно Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
 - б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
 - в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
 - г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов $\LaTeX 2\epsilon$ и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета `Latexcad`. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера `Conversion Artist`. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ -CONTENS

1-бөлім	Раздел 1	Section 1
Математика	Математика	Mathematics
<i>Aldibekov T.M., Aldazharova M.M.</i>		
On a diagonal system of the first-order partial differential equations from two independent variables		3
 <i>Kusherbaeva U.R., Abduakhitova G.A., Assadi A.</i>		
On continuous solutions of the model homogeneous Beltrami equation with a polar singularity		10
 <i>Oinarov R., Omarbayeva B.K., Temirkhanova A.M.</i>		
Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights		19
 <i>Stanzhytskyi O.N., Karakenova S.G., Zhumatov S.S.</i>		
On a comparison theorem for stochastic integro-functional equations of neutral type		30
 <i>Адиева А.Ж., Байарыстанов А.О.</i>		
Об одном переопределенном весовом дифференциальном неравенстве типа Харди второго порядка		46
 <i>Айсагамиев С.А., Корнебай Г.Т.</i>		
Интегральное уравнение в теории оптимального быстрогодействия линейных систем с ограничениями		59
 <i>Кангужин Б.Е., Сеитова А.А.</i>		
О вырожденных краевых задачах Штурма-Лиувилля на геометрических графах		79
 <i>Хомпыш Х., Шакир А.</i>		
Обратная задача для определения правой части псевдопараболического уравнения		87
2-бөлім	Раздел 2	Section 2
Механика	Механика	Mechanics
<i>Abdyldaev E.K., Nogaibayeva M.O.</i>		
Mathematical modeling of the problem of compression of a rock sample with friction at the end		99
 <i>Alimzhanov A.M., Shetiyeva K.Zh.</i>		
Research of the stress state of an element of a thick-wall pipeline under conditions of power and corrosion effect		109
 <i>Azhikhanov N.T., Zhumagulov B.T., Turymbetov T.A., Bekbolatov A.B.</i>		
Stressed-deformed state of two drifts in a tilted layered cracked array in the conditions of elastic deformations		

of rocks 120

Bissembayev K., Sultanova K.

Study of forced vibrations transition processes of vibration protection devices with rolling-contact bearings 129

Tuleshov A.K., Merkibayeva B.M., Akhmetova B.I.

Kinematic analysis and synthesis of the lever mechanism of crank press stamping 145

Кыдырбекулы А.Б., Ибраев Г.Е.

Об автоколебаниях в вертикальных роторных системах, установленных на упругих опорах 160

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Информатика

Информатика

**Computer
Science**

Belgibaev B.A., Nikulin V.V., Umarov A.A.

Designing smart greenhouses, satisfactory price-quality 174

Бектемесов А.Т., Власюк В.Е.

Проектирование умного доступа автомобилей на территорию университета "Туран" 191

4-бөлім

Раздел 4

Section 4

**Колданылмалы
математика**

**Прикладная
математика**

**Applied
Mathematics**

Бияшев Р.Г., Смоларш А., Алгазы К.Т., Хомпыш А.

Алгоритм шифрования "QAMAL NPNS" с использованием непозиционной полиномиальной системы счисления 198

К сведению авторов 208