

ISSN 1563 – 0277
eISSN 2617 – 4871

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№2 (106)

Алматы
«Қазақ университеті»
2020

Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан, свидетельство №16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет №766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год.
Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.

Редакционная коллегия

научный редактор – *Б.Е. Кангуржин, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби,*
заместитель научного редактора – *Д.И. Борисов, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия,*
ответственный секретарь – *С.М. Темешева, д.ф.-м.н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.*

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., Университет международного бизнеса, Казахстан
Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Бектемесов М.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан
Жакебаев Д.Б. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
Кыдырбекулы А.Б. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института аэродинамики, Германия
Мальшикин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия
Ракишева З.Б. – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания
Сагитов С.М. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Гетеборга, Швеция
Сукачев Ф.А. – профессор, академик АН Австралии, Университет Нового Южного Уэльса
Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
Темляков В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Южной Каролины, США
Токмагамбетов Н.Е. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Шиничи Накасукэ – PhD доктор, профессор, Университет Токио, Япония

Научное издание

Вестник. Серия математика, механика, информатика, № 2(106) 2020.

Редактор – С.М. Темешева. Компьютерная верстка – С.М. Темешева

ИБ N 13642

Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 10,4 п.л.

Заказ N 4501. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

© КазНУ им. аль-Фараби, 2020

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.01>**С.А. Айсағалиев, Ә.Ж. Шабенова*, С.К. Кетебаев**

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: Shabenova.aika@gmail.com**РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

Рассматриваются краевые задачи с фазовыми ограничениями для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия существования решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями из заданных множеств при наличии фазовых ограничений. Предложен метод построения решения краевой задачи с фазовыми ограничениями путем построения минимизирующих последовательностей в функциональном пространстве. Получена оценка скорости сходимости минимизирующих последовательностей. Основой предлагаемого метода решения краевых задач с фазовыми ограничениями является возможность сведения указанных задач к одному классу интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода относится к числу малоизученных проблем математики. Поэтому фундаментальные исследования по интегральным уравнениям и решение на их основе краевых задач дифференциальных уравнений является основным перспективным направлением в математике. Предлагается новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями имеющий многочисленные приложения в теории динамических систем. Научной новизной полученных результатов являются: формализация общей задачи динамических систем и приведение ее к краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями; найден новый критерий существования решения краевых задач в виде принципа погружения на основе теоремы существования и построение решения интегрального уравнения; создан новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений путем построения минимизирующих последовательностей для специальной начальной задачи оптимального управления.

Ключевые слова: краевые задачи, фазовые ограничения, оптимизационная задача, минимизирующие последовательности, интегральное уравнение.

С.Ә. Айсағалиев, Ә.Ж. Шабенова*, С.К. Кетебаев

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: Shabenova.aika@gmail.com**Фазалық шектеулері бар сызықтық жүйелердің шекаралық есептерінің шешімін тұрғызу
және шешімінің табылатындығы**

Сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін фазалық шектеулермен шекаралық есептер қарастырылады. Фазалық шектеулер болған кезде берілген жиындардан шекаралық шарттары бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептердің шешуінің болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Функционалдык кеңістіктегі минималды реттіліктер құру арқылы фазалық шектеулермен шекаралық есептердің шешімін құру әдісі ұсынылды. Минималды реттіліктің жинақталу жылдамдығының бағасы алынды. Фазалық шектеулермен шекаралық есептерді шешудің ұсынылған әдісінің негізі - берілген есептерді бірінші типтегі Фредгольм интегралдық тең-

деудің бір класына келтіру. Бірінші типтегі Фредгольм интегралдық теңдеуі - математиканың аз зерттелген мәселелерінің бірі. Сондықтан интегралдық теңдеулер бойынша іргелі зерттеулер және олардың негізінде дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешу математикадағы басты перспективалық бағыт болып табылады. Динамикалық жүйелер теориясында көптеген қолданысы бар фазалық шектеулері бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешудің жаңа әдісі ұсынылған. Нәтижелердің ғылыми жаңалығы: Динамикалық жүйелердің жалпы есептерін қалыптастыру және оны фазалық шектеулермен қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шеттік есептеріне келтіру; Шешімнің бар болу теоремасы мен интегралдық теңдеудің шешімін құруға негізделген батыру принципі түріндегі шекаралық есептердің шешімінің болуы үшін жаңа критерийі табылды; Сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешудің арнайы бастапқы оңтайлы басқару есебі үшін минимизация реттілігін құру арқылы жаңа әдіс жасалды.

Түйін сөздер: шекаралық есептер, фазалық шектеулер, оптимизация мәселесі, минимизациялау реті, интегралдық теңдеу.

S.A. Aisagaliev, A.Zh. Shabenova*, S.K. Ketebayev
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: Shabenova.aika@gmail.com

Integral equation in the theory of optimal speed of linear systems with constraints

Boundary-value problems with phase constraints for linear ordinary differential equations are considered. The necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the boundary value problems of linear ordinary differential equations with boundary conditions from given sets in the presence of phase constraints are obtained. A method is proposed for constructing a solution to a boundary value problem with phase constraints by constructing minimizing sequences in a functional space. An estimate of the convergence rate of minimizing sequences is obtained. The basis of the proposed method for solving boundary value problems with phase constraints is the ability to reduce these problems to one class of the Fredholm integral equation of the first kind. The Fredholm integral equation of the first kind is among the poorly studied problems of mathematics. Therefore, basic research on integral equations and the solution based on them of boundary value problems of differential equations is the main promising direction in mathematics. A new method is proposed for solving boundary value problems of linear ordinary differential equations with phase constraints, which has numerous applications in the theory of dynamical systems. The scientific novelty of the results is: Formalization of the general problem of dynamical systems and its reduction to boundary value problems of ordinary differential equations with phase constraints; A new criterion is found for the existence of a solution to boundary value problems in the form of the immersion principle based on the existence theorem and the construction of a solution to the integral equation; A new method has been created for solving boundary value problems of linear ordinary differential equations by constructing minimizing sequences for a special initial optimal control problem.

Key words: boundary value problems, phase constraints, optimization problem, minimizing sequences, integral equation.

1 Введение

Рассмотрим следующую краевую задачу для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)P(t)x + \mu(t), t \in I = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$x(t_0) = x_0 \in S_0 \subset R^n, x(t_1) = x_1 \in S_1 \subset R^n, \quad (2)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t); G(t) = x \in R^n | \omega(t) \leq L(t)x \leq \varphi(t), t \in I, \quad (3)$$

где $t_0, t_1, t_1 < t_0$ — фиксированные моменты времени, $A(t), B(t), P(t), t \in I$ — матрицы порядков $n \times n, n \times m, m \times n$ с кусочно-непрерывными элементами соответственно, $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ — заданная функция. При заданных условиях дифференциальное уравнение (1) для любого фиксированного $x_0 \in S_0$ имеет единственное решение которое является абсолютно непрерывной функцией, S_0, S_1 — заданные выпуклые замкнутые множества, $L(t), t \in I$ — заданная матрица порядка $s \times n$ с непрерывными элементами, $w(t), \varphi(t), t \in I$ — заданные вектор функции $s \times 1$.

Определение 1 Вектор функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1), t \in I, x_0 \in S_0, x_1 \in S_1$ называется решением краевой задачи (1)–(3), если $x(t_0) = x_0 \in S_0, x(t_1) = x_1 \in S_1$, функция $x(t; t_0, x_0, x_1) \in G(t), t \in I$.

Множества S_0, S_1 , в частности, могут быть замкнутыми шарами, гиперплоскостями. И в общем случае $S = S_0 \times S_1 = (x_0, x_1) \in R^{2n} | H_j(x_0, x_1) \leq 0, j = \overline{1, s_1}; H_j(x_0, x_1) = < \alpha_j, x_0 > + < e_j, x_1 > - \alpha_j = 0, j = \overline{s_1 + 1, p_1}$ где $H_j(x_0, x_1), j = \overline{1, s_1}$ — выпуклые функции относительно переменных $x_0, x_1, x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), \alpha_j \in R^n, e_j \in R^n, j = \overline{s_1 + 1, p_1}, \alpha_j, j = \overline{s_1 + 1, p_1}$ — заданные числа. Ставятся следующие задачи:

Задача 1 Найти необходимое и достаточное условия существования решения краевой задачи (1)–(3).

Иными словами, найти необходимое и достаточное условия существования решения уравнения $\dot{x} = A_1(t)x + \mu(t), t \in I$ при условиях (2), (3), где $A_1(t)x = A(t)x + S(t)P(t)$.

Задача 2 Построить решение краевой задачи (1)–(3).

Следовательно, построить решение уравнения $\dot{x} = A_1(t)x + \mu(t), t \in I$ при условиях (2), (3).

2 Обзор литературы

К краевым задачам вида (1)–(3) сводятся многие математические и физические задачи. Несмотря на актуальность решения краевых задач в настоящее время, отсутствуют методы решения краевой задачи (1)–(3). Одним из существенных результатов по исследованию краевых задач является работы С.К. Годунова и его учеников [1]. Известные результаты [2, 3] относятся к краевым задачам второго порядка и сводятся к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с помощью функции Грина.

Создание общей теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнении любого порядка со сложными граничными условиями при наличии фазовых, интегральных ограничений является актуальной проблемой. В статье предлагается один из методов решения данной проблемы.

Основой предлагаемого метода решения краевой задачи (1)–(3) является принцип погружения. Принцип погружения позволяет заменить исходную краевую задачу

с ограничениями на равносильную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Разрешимость и построения решения краевых задач с ограничением (1)–(3) осуществляется путем построения минимизирующих последовательности в гильбертовом пространстве для функционала специального вида. В этом заключается принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов исследования.

Статья является продолжением научных исследований автора по краевым задачам [4], по теории управляемости [5], интегральных уравнений и оптимального управления [6]. Ряд результатов по теории интегральных уравнений и ее приложений приведены в [7–25].

3 Материал и методы

3.1 Интегральное уравнение

Частным случаем интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$Ku = \int_b^a K(t, \tau)u(\tau)d\tau = f(t), t \in I = [t_1, t_2], \tau \in I_1 = [a, b],$$

является интегральное уравнение

$$K_1 w = \int_b^a K(t_*, \tau)w(\tau)d\tau = \beta, t_* \in I, \quad (4)$$

где $K(t_*, \tau) = K(\tau) = \|K_{ij}(\tau)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ — известная матрица с элементом из L_2 , $t_* \in [t_0, t_1]$ — фиксированная точка, $K_{ij}(\tau) \in L_2(I_1, R^1)$, $w(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ — искомая функция, $\beta \in R^n$.

Необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (4) следует из теоремы 1.

Теорема 1 *Интегральное уравнение (4) при любом $\beta \in R^n$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(a, b) = C = \int_b^a K(\tau)k^*(\tau)d\tau \quad (5)$$

порядка $n \times n$ является положительно определенной, где $()$ — знак транспонирования.*

Доказательство теоремы приведено в [6].

Общее решение интегрального уравнения (4) следует из теоремы 2.

Теорема 2 Пусть матрица C из (5) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (4) при любом $\beta \in R^n$ имеет вид

$$w(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta + p(\tau) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta, \tau \in I_1 = [a, b], \quad (6)$$

где $p(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$ — произвольная функция, $\beta \in R^n$ — любой вектор.

Доказательство теоремы можно найти в [6].

Основные свойства решений интегрального уравнения (4):

1. Функция $w(\tau)$, $t \in I_1$ может быть представлена в виде $w(\tau) = w_1(\tau) + w_2(\tau)$, где $w_1(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta$, $w_2(\tau) = p(\tau) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta$, $\tau \in I$. Функция $w_1(\tau)$ ортогональна $w_2(\tau)$ т.е. $w_1(\tau) \perp w_2(\tau)$ в $L_2(I_1, R^m)$;
2. Функция $w_1(\tau)$, $\tau \in I_1$ — частное решение интегрального уравнения (4), функция $w_2(\tau)$, $\tau \in I_1$ — общее решение однородного интегрального уравнения $\int_a^b K(\tau)w_2(\tau)d\tau = 0$;
3. Функция $w_1(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta$, $\tau \in I_1$ — является решением интегрального уравнения с минимальной нормой в $L_2(I_1, R^m)$;
4. Множество решений интегрального уравнения (4) является выпуклым множеством. В частности, $a = t_0$, $b = t_1$, $I = I_1 = (t_0, t_1)$.

3.2 Линейная управляемая система

Рассмотрим линейную управляемую систему следующего вида

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u(t) + \mu(t), t \in I, \quad (7)$$

$$y(t_0) = x_0 \in R^n, y(t_1) = x_1 \in R^n, \quad (8)$$

$$u(\cdot) \in L_2(I, R^m). \quad (9)$$

Пусть $\varkappa(t)$, $t \in I$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A(t)\zeta$. Определим матрицу

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt, \quad (10)$$

где $\Phi(t, \tau) = \varkappa(t)\varkappa^{-1}(\tau)$, $t \in I$, $\tau \in I$. Возникает вопрос: существует ли функция $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, которая переводит траекторию системы (7)–(9) из любого начального состояния $y(t_0) = x_0 \in R^n$ в любое желаемое конечное состояние $y(t_1) = x_1 \in R^n$.

Обычно функцию $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ называют управлением. Если существует такое управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ для которого $x(t_1) = x(t_1; t_0; x_0; u) = x_1$, то система (7)–(9) называется управляемой.

Теорема 3 Для того чтобы система (7)–(9) была управляемой необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0, t_1)$, определяемая по формуле (10), порядка $n \times n$ была положительно определенной.

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (7) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau, t \in I. \quad (11)$$

Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ которое переводит траекторию системы (7)–(9) из любого начального состояния $x_0 \in R^n$ в любое желаемое конечное состояние $x_1 \in R^n$ (в частности $x_0 \in S_0, x_1 \in S_1$) определяется из условия

$$y(t_1) = x_1 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)u(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\mu(t)dt.$$

Отсюда имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)u(t)dt = x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\mu(t)dt. \quad (12)$$

Так как $\Phi(t_1, t) = \Phi(t_1, t_0)\Phi(t_0, t), \Phi^{-1}(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_1)$, то соотношение (12) запишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)u(t)dt = \Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt = \beta. \quad (13)$$

Таким образом, искомое управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ является решением интегрального уравнения (13). Интегральное уравнение (13) может быть представлено в виде

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = \beta, K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B(t), t \in I.$$

Как следует из теоремы 1, интегральное уравнение (13) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt = W(t_0, t_1)$$

порядка $n \times n$ является положительно определенной где $\beta \in R^n$ — любой вектор. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что краевая задача (7)–(9). имеет решение тогда и только тогда, когда матрица $W(t_0, t_1) > 0$, где $W(t_0, t_1)$ определяется по формуле (10).

Теорема 4 Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ порядка $n \times n$ положительно определенная. Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию системы (7)–(9) из любой

начальной точки $x_0 \in R^n$ в любое желаемое конечное состояние $x_1 \in R^n$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) | u(t) = v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v), t \in I, \\ \forall v(\cdot) \in L_2(I, R^m)\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\lambda_1(t, x_0, x_1) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\beta$, $\beta = \Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt$,

$$N_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \quad (15)$$

функция $z(t, v), t \in I$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = A(t)z + B(t)v(t), z(t_0) = 0, v(\cdot) \in L_2(I, R^m). \quad (16)$$

Доказательство. Как следует из теоремы 2, общее решение интегрального уравнения (13) имеет вид (см. (6))

$$u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)\beta + p(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1) \int_a^b K(t_0, t)p(t)dt, t \in I,$$

где $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B(t)$, $C(t_0, t_1) = W(t_0, t_1)$, $p(t) = v(t)$, $t \in I = [t_0, t_1]$, $I_1 = I$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} u(t) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\beta + \\ + v(t) - B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt, t \in I, \\ \beta = \Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что решение дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$z(t) = z(t, v) = \Phi(t, t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)v(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)v(\tau)d\tau, \quad (18)$$

где $z(t_0) = 0$. Следовательно, $z(t_1) = z(t_1, v) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)v(t)dt =$

$$= \Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt = \Phi(t_0, t_1)z(t_1, v). \quad (19)$$

Из (17)–(19) следует, что искомое управление $u(t), t \in I$ определяется по формуле (14), где $\lambda_1(t, x_0, x_1), N_1(t)$ определяются по формуле (15). Когда произвольная функция $v(t), v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ пробегает все элементы пространства $L_2(I, R^m)$, получим множество U из (14). Теорема доказана.

Теорема 5 Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная, управление $u(t) \in U$. Тогда решение дифференциального уравнения (7) соответствующее управлению $u(t) \in U$ определяется по формуле

$$y(t) = z(t, v) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, v), t \in I, \quad (20)$$

где $z(t, v), t \in I$ – решение дифференциального уравнения (16),

$$\begin{aligned} \lambda_2(t, x_0, x_1) = & \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)x_0 + \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1)x_1 + \\ & + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt, \end{aligned}$$

$$N_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1),$$

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau, \quad (21)$$

$$W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t), t \in I.$$

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (7) определяется по формуле (11). Из (11), в частности, когда $u(t) \in U$ имеем

$$y(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)[v(\tau) + \lambda_1(\tau, x_0, x_1) + N_1(\tau)z(t_1, v)]d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau, t \in I.$$

Отсюда с учетом того, что $\lambda_1(\tau, x_0, x_1), N_1(t)$ определяются по формуле (15) получим

$$\begin{aligned} y(t) = & \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)v(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau W^{-1}(t_0, t_1)\beta - \\ & - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1)z(t_1, v) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau = z(t, v) + \\ & + \lambda_2(\tau, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, v), t \in I, z(t, v) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)v(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

где $\lambda_2(\tau, x_0, x_1), N_2(t)$ определяются по формуле (21).

Заметим что $y(t_0) = z(t_0, v) + \lambda(t_0, x_0, x_1) + N_2(t_0)z(t_1, v) = x_0, y(t_1) = z(t_1, v) + \lambda(t_1, x_0, x_1) + N_2(t_1)z(t_1, v) = x_1$ в силу того, что: $z(t_0, v) = 0, \lambda_2(t_0, x_0, x_1) = x_0, N_2(t_0) = 0, N_2(t_1)z(t_1, v) = -z(t_1, v), \lambda(t_1, x_0, x_1) = x_1$. Итак, доказано соотношение (21). Теорема доказана.

Возникает вопрос: при выполнении каких условий решение краевой задачи (1)–(3) совпадает с решением линейной управляемой системой (7)–(9) т.е. $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1) = y(t) = y(t, t_0, x_0, x_1), t \in I$. На данный вопрос дает ответ следующая лемма.

Лемма 1 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Для того чтобы решение краевой задачи с фазовыми ограничениями (1)–(3) функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1) = y(t) = y(t, t_0, x_0, x_1), t \in I$ необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$u(t) = P(t)y(t), u(t) \in U, \quad (22)$$

$$y(t) \in G(t) = \{y \in R^n | \omega(t) \leq L(t)y(t) \leq \varphi(t), t \in I\}, \quad (23)$$

$$x_0 \in S_0 \subset R^n, x_1 \in S_1 \subset R^n, \quad (24)$$

где функции $u(t), y(t), t \in I$ определяются формулами (14), (20) соответственно, функция $z(t) = z(t, v), t \in I$ – решение дифференциального уравнения (16).

Доказательство. Как следует из теорем 4,5 соотношения (14), (20) верны для любых $x_0 \in R^n, x_1 \in R^n$. Тогда включение $u(t) \in U$ и соответствующее решение $y(t) = y(t, u), t \in I, u \in U$ верны для значения $x_0 \in S_0 \subset R^n, x_1 \in S_1 \subset R^n$. Из уравнения управляемой системы (7)–(9) с учетом (22)–(24), получим

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)P(t)y + \mu(t), t \in I, \quad (25)$$

$$y(t_0) = x_0 \in S_0, y(t_1) = x_1 \in S_1, \quad (26)$$

$$y(t) \in G(t), t \in I. \quad (27)$$

Отсюда следует, что краевая задача с фазовыми ограничениями (25)–(27) совпадает с краевой задачей (1)–(3). Следовательно, $x(t) = y(t), t \in I$. Лемма доказана.

Из теорем 1–5 и леммы 1 следует, что решение исходной краевой задачи (1)–(3) может быть сведено к решению задачи оптимального управления: минимизировать функционал (см.(22)–(24))

$$J(v(\cdot), x_0, x_1, w(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} [|u(t) - P(t)y(t)|^2 + |w(t) - L(t)y(t)|^2] dt \rightarrow \inf \quad (28)$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), z(t_0) = 0, t \in I, \quad (29)$$

$$v(\cdot) \in L_2(I, R^m), x_0 \in S_0 \subset R^n, x_1 \in S_1 \subset R^n \quad (30)$$

$$w(t) \in W = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^s) | \omega(t) \leq w(t) \leq \varphi(t), t \in I\}, \quad (31)$$

где $u(t) = v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v), y(t) = z(t, v) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, v), t \in I, |\cdot|$ – евклидова норма.

Лемма 2 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Для того чтобы исходная краевая задача с фазовыми ограничениями (1)–(3) имела решение, необходимо и достаточно чтобы значение $J(v_*(\cdot), x_0^*, x_1^*, w_*(\cdot)) = 0$, где $(v_*(\cdot), x_0^*, x_1^*, w_*(\cdot)) \in X = L_2(I, R^m) \times S_0 \times S_1 \times W \subset H$, $H = L_2(I, R^m) \times R^n \times R^n \times L_2(I, R^s)$ – решение оптимизационной задачи (28)–(31).

Доказательство. Если $(v_*(\cdot), x_0^*, x_1^*, w_*(\cdot)) \in X$ – решение оптимизационной задачи (28)–(31), значение $J(v_*(\cdot), x_0^*, x_1^*, w_*(\cdot)) = 0$, то выполняются следующие равенства:

$$u_*(t) = v_*(t) + \lambda_1(t, x_0^*, x_1^*) + N_1(t)z(t_1, v_*) = P(t)y_*(t), t \in I, \quad (32)$$

$$w_*(t) = L(t)y_*(t), x_0^* \in S_0, x_1^* \in S_1, \quad (33)$$

где $y_*(t) = z(t, v_*) + \lambda_2(t, x_0^*, x_1^*) + N_2(t)z(t_1, v_*)$, $t \in I$. Так как $w_*(t) \in W$, то выполняется неравенство

$$\omega(t) = w_*(t) = L(t)y_*(t) \leq \varphi(t), t \in I. \quad (34)$$

Отсюда следует, что $y_*(t) \in G(t)$, $t \in I$, где $y_*(t)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{y}_*(t) = A(t)y_*(t) + B(t)P(t)y_*(t) + \mu(t), t \in I, y_*(t_0) = x_0^*, y_*(t_1) = x_1^*, \quad (35)$$

Функция $z(t, v_*)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t, v_*) = A(t)z(t, v_*) + B(t)v_*(t), z(t_0, v_*) = 0, v_*(\cdot) \in L_2(I, R^m). \quad (36)$$

Из (32)–(36) следует, что выполнены все условия леммы 1. Следовательно, $y_*(t) = x_*(t) = x_*(t, t_0, x_0^*, x_1^*)$, $t \in I$, где $x_*(t)$, $t \in I$ – решение исходной задачи (1)–(3). Лемма доказана.

Переход от исходной задачи (1)–(3) к задаче оптимального управления (28)–(31) называется принципом погружения.

3.3 Построение решения краевой задачи с фазовыми ограничениями

Рассмотрим решение задачи 2, путем построения минимизирующих последовательностей для оптимизационной задачи (28)–(31).

Заметим что:

$$\begin{aligned} u(t) &= v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v) = \\ &= v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + \mu_1(t) + N_1(t)z(t_1, v), t \in I, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$T_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1), T_2(t) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1),$$

$$\mu_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt;$$

$$y(t) = z(t, v) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, v) =$$

$$= z(t, v) + C_1(t)x_0 + C_2(t)x_1 + \mu_2(t) + N_2(t)z(t_1, v), t \in I, \quad (38)$$

где

$$C_1(t) = \Phi(t, t_0) W(t, t_1) W^{-1}(t_0, t_1), C_2(t) = \Phi(t, t_0) W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1),$$

$$\mu_2(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mu(\tau) d\tau - \Phi(t, t_0) W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \mu(t) dt.$$

Введем следующие обозначения:

$$F(q(t), t) = |u(t) - P(t)y(t)|^2 + |w(t) - L(t)y(t)|^2, \quad (39)$$

$$\Delta_1(q, t) = u(t) - P(t)y(t), \Delta_2(q, t) = w(t) - L(t)y(t),$$

$$q(t) = (v(t), x_0, x_1, w(t), z(t, v), z(t_1, v)) = (\theta(t), z(t, v), z(t_1, v)), \theta(t) = (v(t), x_0, x_1, w(t)).$$

Теперь оптимизационная задача (28) – (31) запишется в виде

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F(q(t), t) dt \rightarrow \inf, \theta \in X \subset H$$

где $z(t, v)$, $t \in I$ - решение дифференциального уравнения (29).

Лемма 3 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Тогда частные производные

$$F_v(q, t) = 2\Delta_1(q, t), F_w(q, t) = 2\Delta_2(q, t),$$

$$F_{x_0}(q, t) = [2T_1^*(t) - 2C_1^*(t)P^*(t)]\Delta_1(q, t) - 2C_1^*(t)P^*(t)L^*(t)\Delta_2(q, t),$$

$$F_{x_1}(q, t) = [2T_2^*(t) - 2C_2^*(t)P^*(t)]\Delta_1(q, t) - 2C_2^*(t)P^*(t)L^*(t)\Delta_2(q, t),$$

$$F_z(q, t) = -2P^*(t)\Delta_1(q, t) - 2P^*(t)L^*(t)\Delta_2(q, t),$$

$$F_{z(t_1)}(q, t) = [2N_1^*(t) - 2N_2^*(t)P^*(t)]\Delta_1(q, t) - 2N_2^*(t)P^*(t)L^*(t)\Delta_2(q, t). \quad (40)$$

Доказательство леммы непосредственно следует из (37) -(39).

Лемма 4 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$, множества S_0, S_1 -выпуклые. Тогда:

1) функционал (28) при условиях (29) -(31) является выпуклым;

2) производная $F_q(q, t) = (F_v, F_{x_0}, F_{x_1}, F_w, F_z, F_{z(t_1)})$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F_q(q + \Delta q, t) - F_q(q, t)\| \leq K |\Delta q|, \quad \forall q, q + \Delta q \in R^N,$$

где $K = \text{const} > 0$, $\Delta q = (\Delta v, \Delta x_0, \Delta x_1, \Delta w, \Delta z, \Delta z(t_1))$, $N = m + 4n + s$.

Доказательство следует из (40), где все частные производные являются линейной функцией от $q \in R^N$, функция $F(q, t) = q^*E(t)E^*(t)q + 2q^*E^*(t)\Lambda_1(t) + \Lambda_1^*(t)\Lambda(t)$, где $E(t)$ - матрица порядка $N \times N$, $\Lambda_1(t)$, $t \in I$ - вектор функция $N \times 1$, $F_{q,q}(q, t) = 2E(t)E^*(t) \geq 0$, $t \in I$.

Теорема 6 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Тогда функционал (28) при условиях (29)–(31) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент

$$J'(v, x_0, x_1, w) = J'(\theta) = \left(J'_v(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_w(\theta) \right) \in H,$$

в любой точке $\theta \in X \subset H$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} J'_v(\theta) &= F_v(q(t), t) - B^*(t)\psi(t) \in L_2(I, R^m), \\ J'_{x_0}(\theta) &= \int_{t_0}^{t_1} F_{x_0}(q(t), t) dt \in R^n, \quad J'_{x_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{x_1}(q(t), t) dt \in R^n, \\ J'_w(\theta) &= F_w(q(t), t) \in L_2(I, R^s), \end{aligned} \quad (41)$$

где частные производные определяются по формуле (40), функция $z(t) = z(t, v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (29), а функция $\psi(t)$, $t \in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = F_z(q(t), t) - A^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} F_{z(t_1)}(q(t), t) dt. \quad (42)$$

Кроме того, градиент $J'(\theta)$, $\theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \leq K_1 \|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \quad (43)$$

где $K = \text{const} > 0$ – постоянная Липшица.

Доказательство аналогичной теоремы имеется в [4].

Используя утверждение теоремы 6, на основе формулы (41) – (43) строим следующие последовательности

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n), \quad x_{0n+1} = P_{S_0} \left[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n) \right], \\ x_{1n+1} &= P_{S_1} \left[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n) \right], \quad w_{n+1} = P_W \left[w_n - \alpha_n J'_w(\theta_n) \right], \end{aligned} \quad (44)$$

$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{K_1 + 2\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$, в частности, при $\varepsilon_1 = K_1/2$. $\alpha_n = 1/K_1 = \text{const} > 0$, $K_1 > 0$ – постоянная Липшица из (43), $\theta_n = (v_n, x_{0n}, x_{1n}, w_n) \in X$, S_0, S_1, W – выпуклые замкнутые множества, $P_S[\cdot]$ – проекция точки на множестве S .

Теорема 7 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$, множества S_0, S_1, W – выпуклые замкнутые, последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ определяется по формуле (44).

Тогда:

- 1) числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает;
- 2) $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

Если, кроме того, множество $M(\theta_0) = \{\theta \in X / J(\theta) \leq J(\theta_0)\}$ ограничено, то:

3) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей, $\lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta)$;

4) множество $X_* = \left\{ \theta_* \in X \mid J(\theta_*) = \min_{\theta \in X} J(\theta) = J_* \right\} \neq \emptyset$, \emptyset – пустое множество;

5) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ слабо сходится к множеству X_* , $v_n \xrightarrow{c\lambda} v_*$, $x_{0n} \rightarrow x_0^*$, $x_{1n} \rightarrow x_1^*$, $w_n \xrightarrow{c\lambda} w_*$ при $n \rightarrow \infty$, $\theta_* = (v_*, x_0^*, x_1^*, w_*) \in X_*$;

6) справедлива оценка скорости сходимости $0 \leq J(\theta_n) - J_* \leq \frac{c}{n} = 1, 2, \dots, C = \text{const} > 0$;

7) краевая задача (1) – (3) имеет решение тогда и только тогда, когда значение $J(\theta_*) = 0$ при этом $x_*(t) = y_*(t) = z(t, v_*) + \lambda_2(t_1, x_0^*, x_1^*) + N_2(t) z(t_1, v_*)$, $x_*(t) \in G(t)$, $t \in I$, $w_*(t) = L(t)x_*(t)$, $t \in I$.

Доказательство аналогичной теоремы можно найти в [5].

4 Заключение

Предлагается новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями имеющих многочисленные приложения в теории динамических систем.

Научной новизной полученных результатов является:

формализация общей задачи динамических систем и приведение ее к краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями;

найден новый критерий существования решения краевых задач в виде принципа погружения на основе теоремы существования и построение решения интегрального уравнения;

создан новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений путем построения минимизирующих последовательностей для специальной начальной задачи оптимального управления;

Список литературы

- [1] Годунов С.К., Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Том 1: Краевые задачи (Издательство Новосибирского университета, 1994), 264.
- [2] Тихонов В.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения (М: Наука, 1985), 213.
- [3] Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т.4, часть II (М: Наука, 1981), 550.
- [4] Айсагалиев С.А., Калимолдаев М.А., "Конструктивный метод решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений", Дифференциальные уравнения Т. 51, 2 (2015): 147-160.
- [5] Айсагалиев С.А., "Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений", Дифференциальные уравнения Т.27, 9 (1991): 1475-1486.
- [6] Айсагалиев С.А., Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений: Избранные труды (Алматы: Қазақ университеті, 2016), 397.

- [7] Айсағалиев С.А., А.П. Белогуров, "Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением", *Сибирский математический журнал* т. 53, 1 (2011): 3-21. (англ.пер. Aisagaliev S.A., Belgorod A.P. "Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control", *Siberian Mathematical Journal* Vol. 53, 1 (2012): 13-28.
- [8] Айсағалиев С.А., *Теория управляемости динамических систем* (Алматы: Қазақ университеті, 2014), 158.
- [9] Aisagaliev S.A., "Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems", *Journal of Computer and Systems. Sciences International* 32 (1.5) (1994): 73-80.
- [10] Айсағалиев С.А., Кабидолданова А.А., *Оптимальное управление динамических систем* (Palmarium Academic Publishing/Германия, Verlag, 2012), 288.
- [11] Айсағалиев С.А., Кабидолданова А.А., "Об оптимальном управлении линейными системами линейным критерием качества и ограничениями", *Дифференциальные уравнения* Т. 48, 6 (2012): 826-838 [англ.пер. S.A.Aisagaliev and A.A. Kabisoldanova, "On the Optimal Control of Linear Systems with Linear Performance Criterion and Constraints", *Differential Equations* Vol. 48, 6 (2012): 832-844.]
- [12] Айсағалиев С.А., Т.С. Айсағалиев, *Методы решения краевых задач* (Алматы: Қазақ университеті, 2002), 348.
- [13] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа* (М.: Наука, 1989), 624.
- [14] Краснов М.Л., *Интегральные уравнения* (М.: Наука, 1975), 304.
- [15] Тихонов А.Н., В.Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач* (М.: Наука, 1986), 288.
- [16] Лаврентьев М.М., *О некоторых некорректных задачах математической физики* (М.: Наука, 1986), 288.
- [17] Иванов В.К., "Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода", *Дифференциальные уравнения* 3 (1967): 21-32.
- [18] Фридман В.М., "Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода", (УМН XI, вып. I, 1956): 56-85.
- [19] Морс Ф.М., Г.Фешбах, *Методы математической физики* Т.2. (М.: Издательство иностранной литературы, 1958), 932.
- [20] Айсағалиев С.А., "Общее решение одного класса интегральных уравнений", *Математический журнал* Т. 5, 4 (18) (2005): 17-34.
- [21] Айсағалиев С.А., *Конструктивная теория краевых задач оптимального управления* (Алматы: Қазақ университеті, 2007), 328.
- [22] Айсағалиев С.А., А.П. Белогуров, И.В. Севрюгин, "К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных", *Вестник КазНУ сер. мат., мех., инф.* 1 (68) (2011): 3-16.
- [23] Айсағалиев С.А., *Лекции по оптимальному управлению* (Алматы: Қазақ университеті, 2007), 278.
- [24] Айсағалиев С.А., Ж.Х.Жунусова, "Разрешимость и построение решения уравнения Фредгольма первого рода", *Вестник КазНУ, сер.мат., мех., инф.* 1 (88) (2016): 3-16.
- [25] Aisagaliev S.A., Aisagaliev S.S., Kabisoldanova A.A., "Solvability and construction of solution of integral equation", *Bulletin math., mech., comp. science series* 2 (89) (2016): 3-18.

References

- [1] Godunov S.K., *Ordinary differential equations with constant coefficients, Vol. 1, Boundary Value Problems* (Novosibirsk University Press, 1994), 264.
- [2] Tihonov V.N., Vasilieva A.B. and Sveshnikov A.G., *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], (M: Science, 1985), 213.
- [3] Smirnov V.I., *Kurs vysshei matematiki* [Course of higher mathematics], Vol. 4, part II, (M: Science, 1981), 550.

-
- [4] Aysagaliev S.A. and Kalimoldaev M.A., "Konstruktivnyi metod resheniya kraevoi zadachi obyknovennykh differentsialnykh uravnenii [A constructive method for solving the boundary value problem of ordinary differential equations]", *Differential equations* Vol. 51, 2 (2015): 147-160.
- [5] Aysagaliev S.A., "Upravlyaemosst' nekotoroi sistemy differentsialnykh uravnenii [Controllability of a certain system of differential equations]", *Differential Equations* Vol. 27, 9 (1991): 1475-1486.
- [6] Aysagaliev S.A., *Problemy kachestvennoi teorii differentsialnykh uravnenii: Izbrannye trudy [Problems of the qualitative theory of differential equations: Selected works]* (Almaty: Kazakh University, 2016), 397.
- [7] Aysagaliev S.A. and Belgorod A.P., "Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control", *Siberian Mathematical Journal* Vol. 53, 1 (2012): 13-28.
- [8] Aysagaliev S.A., *Teoriya upravlyaemosti dinamicheskikh sistem [The theory of controllability of dynamic systems]* (Almaty: Kazakh University, 2014), 158.
- [9] Aysagaliev S.A., "Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems", *Journal of Computer and Systems. - Sciences International*. 32 (1.5) (1994): 73-80.
- [10] Aysagaliev S.A. and Kابدoldanova A.A., *Optimalnoe upravlenie dinamicheskikh sistem [Optimal control of dynamic systems]* (Palmarium Academic Publishing / Germany, Verlag, 2012), 288.
- [11] S.A. Aysagaliev and A.A. Kابدoldanova, "On the Optimal Control of Linear Systems with Linear Performance Criterion and Constraints", *Differential Equations* Vol. 48, 6 (2012): 832-844.
- [12] S.A. Aysagaliev and T.S. Aysagaliev, *Metody resheniya kraevykh zadach [Methods for solving boundary value problems]* (Almaty: Kazakh University, 2002), 348.
- [13] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V., *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]*, (M.: Nauka, 1989), 624.
- [14] Krasnov M.L., *Integralnye uravneniya [Integral Equations]* (M.: Nauka, 1975), 304.
- [15] A.N. Tikhonov and V.Ya. Arsenin, *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]* (M.: Nauka, 1986), 288.
- [16] Lavrentiev M.M., *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki [About some non-core problems of mathematical physics]* (M.: Nauka, 1986), 288.
- [17] Ivanov V.K., "Ob integralnykh uravneniyakh Fredgolma pervogo roda [On Fredholm integral equations of the first kind]", *Differential equations* 3 (1967): 21-32.
- [18] Friedman V.M., "Metod posledovatelykh priblizhenii dlya integralnogo uravneniya Fredgolma 1-go roda [The method of successive approximations for the Fredholm integral equation of the first kind]", (UMN XI, Issue I, 1956): 56-85.
- [19] F.M. Morse and G. Feshbach, *Metody matematicheskoi fiziki [Methods of mathematical physics]* Vol. 2, (M.: Izdatelstvo inostrannoi literatury [Publishing house of foreign literature], 1958), 932.
- [20] Aysagaliev S.A., "Obshee reshenie odnogo klassa integralnykh uravnenii [The general solution of a class of integral equations]", *Mathematical Journal* Vol. 5, 4 (18) (2005): 17-34.
- [21] Aysagaliev S.A., *Konstruktivnaya teoriya kraevykh zadach optimalnogo upravleniya [Constructive theory of boundary value problems of optimal control]* (Almaty: Kazakh University, 2007), 328.
- [22] S.A. Aysagaliev, A.P. Belogurov and I.V. Sevryugin, "K resheniyu integralnogo uravneniya Fredgolma pervogo roda dlya funktsii neskol'kikh peremennykh [To the solution of the Fredholm integral equation of the first kind for a function of several variables]", *Vestnik KazNU. Ser. Mat., Mech., Inf.* 1 (68) (2011): 3-16.
- [23] Aysagaliev S.A., *Lektsii po optimalnomu upravleniyu [Lectures on optimal control]* (Almaty: Kazakh University, 2007), 278.
- [24] S.A. Aysagaliev and J.Kh. Zhunusova, "Razreshimosst' i postroenie resheniya uravneniya Fredgolma pervogo roda [Solvability and construction of a solution of the Fredholm equation of the first kind]", *KazNU Bulletin. Math., Mech., Comp. Sci. Series 1* (88) (2016): 3-16.
- [25] Aysagaliev S.A., Aysagaliev S.S. and Kابدoldanova A.A., "Solvability and construction of solution of integral equation", *KazNU Bulletin. Math., Mech., Comp. Sci. Series 2* (89) (2016): 3-18.

IRSTI 27.39.15

DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.02

N.T. Tleukhanova, K.K. Sadykova*

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

*e-mail: sadkelbet@gmail.com

THE CONVOLUTION IN ANISOTROPIC BESOV SPACES

We study the boundedness of the convolution operator in Nikol'skii-Besov anisotropic spaces $B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}}$. These spaces are constructed on the basis of anisotropic Lorentz spaces $L_{\mathbf{p}\tau}$, where \mathbf{p} и τ are vector parameters. The properties of anisotropic Nikol'skii-Besov spaces are investigated. The main goal of the paper is to solve the following problem: let f and g be functions from some classes of the Nikol'skii-Besov space scale. It is necessary to determine which space belongs to their convolution $f * g$. We proved the inequality of different Nikol'skii metrics for trigonometric polynomials with spectrum in binary blocks in anisotropic Lorentz spaces $L_{\mathbf{p}\tau}$. Conditions are obtained in terms of the corresponding vector parameters $\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \tau, \mathbf{r}, \mu, \beta, \eta, \mathbf{h}, \nu, \gamma, \xi$, which are necessary and sufficient conditions for embeddings

$$B_{\mathbf{r}\mu}^{\beta\eta} * B_{\mathbf{h}\nu}^{\gamma\xi} \hookrightarrow B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}}.$$

This statement is an analogue of O'Neil inequality for Lorentz spaces. In particular, the classical O'Neil inequality follows from the proved results. The obtained criterion is generalized by the results of Burenkov and Batyrov, who considered this problem in Besov spaces with scalar parameters.

Key words: Young-O'Neil inequality, anisotropic Besov spaces, convolution operator.

Н.Т. Тлеуханова, К.К. Садыкова*

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

*e-mail: sadkelbet@gmail.com

Анизотропты Бесов кеңістіктеріндегі үйірткі

Берілген жұмыста $B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}}$ анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктеріндегі үйірткі операторының шенелуі зерттеледі. Бұл кеңістіктер $L_{\mathbf{p}\tau}$ анизотропты Лоренц кеңістіктерінің негізінде құрылған, мұндағы \mathbf{p} және τ – векторлық параметрлер. Жұмыстың мақсаты келесі есепті шешу болып табылады: айталық, f және g Никольский-Бесов кеңістіктерінің қандай да бір шкаласынан алынған функциялар болсын. Олардың $f * g$ үйірткісі қандай кеңістікке жататынын анықтау керек. $L_{\mathbf{p}\tau}$ анизотропты Лоренц кеңістіктеріндегі екілік бөлшектенуде спектрлі тригонометриялық көпмүшелерге арналған Никольскийдің әр түрлі метрика теңсіздігі дәлелденді. Сәйкес $\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \tau, \mathbf{r}, \mu, \beta, \eta, \mathbf{h}, \nu, \gamma, \xi$ векторлық параметрлерінің терминдерінде

$$B_{\mathbf{r}\mu}^{\beta\eta} * B_{\mathbf{h}\nu}^{\gamma\xi} \hookrightarrow B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}}.$$

енгізуі үшін қажетті және жеткілікті шарттар алынды. Бұл тұжырым Лоренц кеңістіктері үшін О'Нейл теңсіздігінің аналогы болып табылады. Сонымен қатар, дәлелденген нәтижелерден классикалық О'Нейл теңсіздігі шығады. Алынған критерий Бесов кеңістігінде осы есепті скаляр параметрлермен қарастырған Буренков пен Батыровтың нәтижелерін жалпылайды.

Түйін сөздер: Юнг-О'Нейл теңсіздігі, анизотропты Бесов кеңістіктері, үйірткі операторы.

Н.Т. Тлеуханова, К.К. Садыкова*

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

*e-mail: sadkelbet@gmail.com

Свертка в анизотропных пространствах Бесова

В работе исследуется ограниченность оператора свертки в анизотропных пространствах Никольского-Бесова $B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}}$. Данные пространства построены на основе анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{p}\tau}$, где \mathbf{p} и τ векторные параметры. Исследованы свойства анизотропных пространств Никольского-Бесова. Целью работы является решение следующей задачи: пусть f и g функции из некоторых классов шкалы пространств Никольского-Бесова. Нужно определить, какому пространству принадлежит их свертка $f * g$. Доказано неравенство разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов со спектром в двоичных пачках в анизотропных пространствах Лоренца $L_{\mathbf{p}\tau}$. Получены условия в терминах соответствующих векторных параметров α , \mathbf{p} , \mathbf{q} , τ , \mathbf{r} , μ , β , η , \mathbf{h} , ν , γ , ξ , являющихся необходимыми и достаточными условиями для вложений

$$B_{\mathbf{r}\mu}^{\beta\eta} * B_{\mathbf{h}\nu}^{\gamma\xi} \hookrightarrow B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}}.$$

Данное утверждение является аналогом неравенства О'Нейла для пространств Лоренца. В частности, из доказанных результатов следует классическое неравенство О'Нейла. Полученный критерий обобщают результаты Буренкова и Батырова, которые рассмотрели данную задачу в пространствах Бесова со скалярными параметрами.

Ключевые слова: неравенство Юнга-О'Нейла, анизотропные пространства Бесова, оператор свертки.

1 Introduction and review of literature

Let I be either a n -dimensional torus $\mathbb{T}^n = [0, 1)^n$, or a Euclidean space \mathbb{R}^n . Let $f(x)$ and $g(x)$ be determined and measurable functions on I with respect to the n -dimensional Lebesgue measure such that for almost all $x \in I$ there exists an integral

$$\int_I f(x-y)g(y)dy.$$

In this case, it is said that the convolution of these functions is defined

$$(f * g)(x) = \int_I f(x-y)g(y)dy. \quad (1)$$

The classical Young's inequality [1, 199] has the form: suppose

$$1 \leq p, r, q \leq \infty, \quad \frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}. \quad (2)$$

If $f \in L_p(I)$, $g \in L_r(I)$, then almost everywhere in I there exists a convolution $f * g$, belonging to the space $L_q(I)$ and the following inequality holds

$$\|f * g\|_{L_q(I)} \leq \|f\|_{L_p(I)} \|g\|_{L_r(I)}. \quad (3)$$

We write this statement in the form of a relation

$$L_p(I) * L_r(I) \hookrightarrow L_q(I).$$

These inequalities play an important role in harmonic analysis and in the theory of partial differential equations [1–3].

If

$$1 < p, r, q < \infty, \quad \frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}, \quad (4)$$

then for $g_0(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{n}{r}}}$ the inequality holds

$$\|f * g_0\|_{L_q(I)} \leq C \|f\|_{L_p(I)}.$$

This inequality is called the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. It does not follow from Young's inequality, since $\|g_0\|_{L_r(I)} = \infty$. Generalization of inequality (3) obtained by O'Neil [4] (see also [5, 6]).

If (4) is true and $0 < s_1, s_2, s \leq \infty, \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$, then

$$L_{ps_1} * L_{rs_2} \hookrightarrow L_{qs} \quad (5)$$

and in particular

$$L_p * L_{r\infty} \hookrightarrow L_q, \quad (6)$$

where L_{ps} is Lorentz space.

Note that in relation (5), condition (4) is essential. The limiting cases of the O'Neil inequality with condition (2) were considered in [7].

The O'Neil inequality for anisotropic Lorentz spaces was studied in [8–10]. In the case of $n \geq 2$ these results are extended the inequality (6). In the one-dimensional case, the O'Neil inequality was extended in [11, 12].

There are generalizations of the Young and O'Neil inequalities for various functional spaces: weighted L_p spaces, classical and Lorentz weighted spaces, Hardy spaces, Wiener spaces, Orlicz spaces; see [5, 6, 8, 13–18], and references therein.

Convolution operators were studied in spaces of smooth functions in [19–24].

V.I. Burenkov and B.E. Batyrov in [21] received the following statement: Let $-\infty < l_1, l_2, l_3 < \infty, 0 < p_1, p_2, p_3 \leq \infty, 0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq \infty$. In order for there to exist a number $c_3 > 0$ such that for any $f_1 \in B_{p_1\theta_1}^{l_1}(\mathbb{R}^n), f_2 \in B_{p_2\theta_2}^{l_2}(\mathbb{R}^n)$ such that Ff_1 and Ff_2 are regular generalized functions and their (pointwise) product $Ff_1 \cdot Ff_2 \in S(\mathbb{R}^n)$, the inequality

$$\|f_1 * f_2\|_{B_{p_3\theta_3}^{l_3}(\mathbb{R}^n)} \leq c_3 \|f_1\|_{B_{p_1\theta_1}^{l_1}(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|_{B_{p_2\theta_2}^{l_2}(\mathbb{R}^n)} \quad (7)$$

it is necessary and sufficient that the following conditions be fulfilled:

- 1) $p_3 \geq p_1, p_3 \geq p_2$;
- 2) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - 1 \geq 0$;

and one of the conditions

$$3a) \quad l_3 < l_1 + l_2 - n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - 1 \right)$$

or

3b) $l_3 = l_1 + l_2 - n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - 1 \right)$ и $\frac{1}{\theta_3} \leq \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}$,
 where Ff is the Fourier transform of the function f :

$$(Ff)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

For $p_2 = p_3, \theta_2 = \theta_3, 0 < l_2 < l_3 < \infty$ inequality (7) and some of its generalizations follow from the results obtained in the works of K.K. Golovkin and V.A. Solonnikov [19, 20] and [23].

In [24] we investigated the boundedness of the norm of the convolution operator in Sobolev spaces, with the dominant mixed derivative and anisotropic Nikol'skii-Besov spaces. For Sobolev spaces with the dominant mixed derivative, an analogue of Young's inequality is obtained, namely, relations of the form

$$W_{\mathbf{p}}^{\gamma} * W_{\mathbf{r}}^{\beta} \hookrightarrow W_{\mathbf{q}}^{\alpha} \tag{8}$$

are proved when the corresponding conditions on the parameters are satisfied. Using relation (8) and the Nursultanov interpolation theorem for anisotropic spaces, an analogue of the O'Neil theorem was obtained for the Nikol'skii-Besov space scale $B_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\alpha}$, where $\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ are vector parameters. Relations of the form $B_{\mathbf{p}\mathbf{s}_1}^{\gamma} * B_{\mathbf{r}\mathbf{s}_2}^{\beta} \hookrightarrow B_{\mathbf{q}\mathbf{s}}^{\alpha}$ are obtained, with the corresponding ratios of vector parameters.

The theorems obtained in [24] complement the results of Batyrov and Burenkov, where similar problems were considered in isotropic Nikol'skii-Besov spaces, that is, in spaces where the parameters are scalars.

2 Material and methods

Let $\alpha \in \mathbb{R}^2, 0 < \mathbf{q} = (q_1, q_2), \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \leq \infty, 1 \leq \mathbf{p} = (p_1, p_2) < \infty, \mathbb{T}^2 = [0, 1]^2$.

We denote the space $B_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^2)$ as the set of all trigonometric series $f = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} a_{\mathbf{m}}(f) e^{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x})}$

(generally speaking, divergent) for which

$$\|f\|_{B_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^2)} = \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (2^{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} f\|_{L_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}}(\mathbb{T}^2)})^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \right)^{1/q_2}$$

is finite, are called as Besov type spaces $B_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^2)$, where

$$\Delta_{\mathbf{k}} f(x_1, x_2) = \sum_{2^{k_2-1} \leq |m_2| < 2^{k_2}} \sum_{2^{k_1-1} \leq |m_1| < 2^{k_1}} a_{m_1, m_2}(f) e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)},$$

$k \in \mathbb{N}$. In the isotropic case, these spaces were investigated in [25], where the interpolation properties were studied.

We define the concept of convolution for the elements of this spaces.

Let $f = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} a_{k_1, k_2} e^{2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$ and $g = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} b_{k_1, k_2} e^{2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$ be trigonometric series. By convolution of these series we mean the series

$$(f * g)(y_1, y_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} a_{k_1, k_2}(f) b_{k_1, k_2}(g) e^{2\pi i(k_1 y_1 + k_2 y_2)}. \tag{9}$$

Note that for the "good" functions f and g , the convolution defined by equality (9) coincides with the classical definition (1). If the functions f and g from the corresponding spaces in (3), then $f(x) \stackrel{L_{\mathbf{p}}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{2\pi i(k,x)}$ and $g(x) \stackrel{L_{\mathbf{r}}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}(k) e^{2\pi i(k,x)}$ and

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x-y)g(y)dy \stackrel{L_{\mathbf{q}}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)\hat{g}(k)e^{2\pi i(k,x)}.$$

Here, equalities are understood in the sense of the corresponding metrics.

Lemma 1

$$\Delta_{\mathbf{k}}(f * g)(y_1, y_2) = \int_0^1 \int_0^1 \Delta_{\mathbf{k}}f(x_1, x_2)\Delta_{\mathbf{k}}g(y_1 - x_1, y_2 - x_2)dx_1dx_2.$$

Lemma 2 ([10]) *Let $1 < \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r} < \infty$, $1 \leq \mathbf{h}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} < \infty$, and $1 + \frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{1}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{r}}$, $\frac{1}{\mathbf{h}} = \frac{1}{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{\boldsymbol{\eta}}$. Suppose that f and K are respectively measurable on $[0, 1]^2$ and $[-1, 1]^2$ functions such that $f \in L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\xi}}([0, 1]^2)$ and $K \in L_{\mathbf{r}\boldsymbol{\eta}}([0, 1]^2)$. Then $f * K \in L_{\mathbf{q}\mathbf{h}}([0, 1]^2)$ and*

$$\|f * K\|_{L_{\mathbf{q}\mathbf{h}}} \leq 4(q'_1q'_2)^2 \|f\|_{L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\xi}}} \|K\|_{L_{\mathbf{r}\boldsymbol{\eta}}}. \quad (10)$$

Lemma 3 *Let $0 < \mathbf{h}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \leq \infty$, $1 < \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{q} < \infty$*

1. *If $\frac{1}{q_1} + 1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r_1}$ and $\frac{1}{h_1} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\eta_1}$, then the following inequality*

$$\|f *_1 g\|_{L_{(q_1, q_2), (h_1, h_2)}} \leq C \|f\|_{L_{(p_1, q_2), (\xi_1, h_2)}} \|g\|_{L_{(r_1, q_2), (\eta_1, h_2)}}$$

holds for the transformation

$$(f *_1 g)(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, x_2)g(x_1 - y_1, x_2)dy_1.$$

2. *If $\frac{1}{q_2} + 1 = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r_2}$ and $\frac{1}{h_2} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\eta_1}$, then the following inequality*

$$\|f *_2 g\|_{L_{(q_1, q_2), (h_1, h_2)}} \leq C \|f\|_{L_{(q_1, p_2), (h_1, \xi_2)}} \|g\|_{L_{(q_1, r_2), (h_1, \eta_2)}}$$

holds for the transformation

$$(f *_2 g)(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_2)g(x_1, x_2 - y_2)dy_2.$$

Proof. The proof of the lemma is similar to the proof of Theorem 3.1 from [10].

We note here that the application of the classical O'Neil inequality in one variable does not give the statement we need.

Lemma 4 *Let*

$$T_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = \sum_{2^{k_2-1} \leq |m_2| < 2^{k_2}} \sum_{2^{k_1-1} \leq |m_1| < 2^{k_1}} a_{m_1, m_2} e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}.$$

Let $1 \leq \mathbf{p}, \mathbf{q} < \infty$, $0 < \tau \leq \infty$,

$$\theta_i = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} \geq 0, \quad \frac{1}{t_i} = \frac{1 - \operatorname{sgn} \theta_i}{\tau_i}, \quad i = 1, 2,$$

then

$$\|T_{\mathbf{k}}\|_{L_{\mathbf{q}\tau}} \leq C 2^{k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2} \|T_{\mathbf{k}}\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{t}}}.$$

Proof. Let $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$. Note that for $T_{\mathbf{k}}$ there is a representation

$$T_{\mathbf{k}}(x) = T_{\mathbf{k}} * D_{\mathbf{k}},$$

$$\text{where } D_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = \sum_{2^{k_2-1} \leq |m_2| < 2^{k_2}} \sum_{2^{k_1-1} \leq |m_1| < 2^{k_1}} e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}.$$

Using Lemma 2, we have

$$\|T_{\mathbf{k}}\|_{L_{\mathbf{q}\tau}} \leq C \|T_{\mathbf{k}}\|_{L_{\mathbf{p}\infty}} \|D_{\mathbf{k}}\|_{L_{\mathbf{r}\tau}},$$

$$\text{where } \frac{1}{\mathbf{r}} = 1 + \frac{1}{\mathbf{q}} - \frac{1}{\mathbf{p}}.$$

We also note that

$$D_{k_1, k_2}^{*1, *2}(t_1, t_2) \leq C \min\left(2^{k_1}, \frac{1}{t_1}\right) \min\left(2^{k_2}, \frac{1}{t_2}\right)$$

and therefore

$$\|D_{\mathbf{k}}\|_{L_{\mathbf{r}\tau}} \asymp 2^{k_1\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + k_2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)}.$$

Let now $\theta_1 > 0$, $\theta_2 = 0$. Then

$$T_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mathbf{k}}(y_1, x_2) D_{k_1}(x_1 - y_1) dy_1,$$

$$\text{where } D_{k_1}(x_1) = \sum_{2^{k_1-1} \leq |m_1| < 2^{k_1}} e^{2\pi i x_1 m_1}.$$

Further, applying the Lemma 3, we derive

$$\|T_{\mathbf{k}}\|_{L_{(q_1, q_2), (\tau_1, \tau_2)}} \leq C \|T_{\mathbf{k}}\|_{L_{(p_1, q_2), (\infty, \tau_2)}} \|D_{k_1}\|_{L_{r_1, \tau_1}} \asymp 2^{k_1 \theta_1} \|T_{\mathbf{k}}\|_{L_{(p_1, q_2), (\infty, \tau_2)}},$$

$$\text{where } \frac{1}{r_1} = 1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}.$$

The case $\theta_2 > 0$, $\theta_1 = 0$ is considered similarly.

The case $\theta_1 = \theta_2 = 0$ is obvious.

Lemma 5 Let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq \mathbf{p}, \mathbf{q} \leq \infty$, $0 < \tau \leq \infty$. Let $\alpha - \frac{1}{\mathbf{q}} = \beta - \frac{1}{\mathbf{p}}$, $\alpha - \beta = \boldsymbol{\theta} \geq 0$, then

$$B_{\mathbf{qt}}^{\alpha\mathbf{s}} \hookrightarrow B_{\mathbf{p}\tau}^{\beta\mathbf{s}},$$

$$\text{where } \frac{1}{\mathbf{t}} = \frac{1 - \text{sgn } \boldsymbol{\theta}}{\tau}.$$

Proof. Let $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$. Let $f \in B_{\mathbf{qt}}^{\alpha\mathbf{s}}$. Using Lemma 4, we have

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\mathbf{p}\tau}^{\beta\mathbf{s}}} &= \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (2^{\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} f\|_{L_{\mathbf{p}\tau}})^{s_1} \right)^{s_2/s_1} \right)^{1/s_2} \\ &\leq C \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{(\beta_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})k_1 + (\beta_2 + \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2})k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} f\|_{L_{\mathbf{q}\infty}} \right)^{s_1} \right)^{s_2/s_1} \right)^{1/s_2} \\ &= C \|f\|_{B_{\mathbf{q}\infty}^{\alpha\mathbf{s}}}. \end{aligned}$$

Other cases are checked similarly.

Lemma 6 Let $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}} < \infty$, $\boldsymbol{\theta}' = \tilde{\alpha} - \alpha \geq 0$, $\boldsymbol{\theta}'' = \tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{p} \geq 0$, $0 < \mathbf{q}, \tau \leq \infty$. Then

$$B_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\tau}}^{\tilde{\alpha}\tilde{\mathbf{q}}} \hookrightarrow B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}},$$

$$\text{where } \frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{1 - \text{sgn } \boldsymbol{\theta}'}{\mathbf{q}}, \quad \frac{1}{\tilde{\tau}} = \frac{1 - \text{sgn } \boldsymbol{\theta}''}{\tau}.$$

Proof. The proof follows from the embeddings $l_{\tilde{q}_i}^{\tilde{\alpha}_i} \hookrightarrow l_{q_i}^{\alpha_i}$ and $L_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\tau}} \hookrightarrow L_{\mathbf{p}\tau}$.

Lemma 7 Let $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}} < \infty$, $0 < \mathbf{q}, \tau \leq \infty$, $\boldsymbol{\delta}' = \left(\tilde{\alpha} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{p}}} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{\mathbf{p}} \right) \geq 0$, $\boldsymbol{\theta}' = \tilde{\alpha} - \alpha \geq 0$. Then

$$B_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\tau}}^{\tilde{\alpha}\tilde{\mathbf{q}}} \hookrightarrow B_{\mathbf{p}\tau}^{\alpha\mathbf{q}},$$

$$\text{where } \frac{1}{\tilde{\tau}} = \frac{(1 - \text{sgn } \boldsymbol{\delta}')(1 - \text{sgn } \boldsymbol{\theta}')}{\mathbf{t}}, \quad \frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{1 - \text{sgn } \boldsymbol{\delta}' \text{sgn } \boldsymbol{\theta}'}{\mathbf{q}}.$$

Proof. Let the conditions of the lemma be satisfied. Then there are $\bar{\alpha}$ and $\bar{\mathbf{p}}$ such that

$$\tilde{\alpha} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{p}}} = \bar{\alpha} - \frac{1}{\bar{\mathbf{p}}}, \quad \tilde{\alpha} \geq \alpha \geq \bar{\alpha}, \quad \bar{\mathbf{p}} \geq \mathbf{p}.$$

Moreover, for $\delta_i > 0$, $\theta_i > 0$, $\tilde{\alpha}_i > \bar{\alpha}_i > \alpha$, $\bar{p}_i > p$ Lemma 6 implies the embedding

$$B_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\tau}}^{\tilde{\alpha}\tilde{\mathbf{q}}} \hookrightarrow B_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}\bar{\mathbf{q}}},$$

where

$$\frac{1}{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(\bar{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{q}}, \quad \frac{1}{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p})}{\boldsymbol{\tau}}.$$

Applying Lemma 5, we have

$$B_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\boldsymbol{\tau}}}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\tilde{\mathbf{q}}} \hookrightarrow B_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\boldsymbol{\tau}}}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\tilde{\mathbf{q}}},$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}} &= \bar{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\bar{\mathbf{q}}} \geq \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{\mathbf{p}}, \\ \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} &= \frac{(1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}))}{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{(1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}))(1 - \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}))}{\boldsymbol{\tau}}, \\ \frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}} &= \frac{1}{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(\bar{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

We note that $(\bar{\alpha}_i - \alpha_i) > 0$ if and only if $\delta'_i > 0$ и $\theta'_i > 0$, i.e.

$$\operatorname{sgn}(\bar{\alpha}_i - \alpha_i) = \operatorname{sgn} \delta'_i \cdot \operatorname{sgn} \theta'_i.$$

And $\tilde{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i = 0$, $\bar{p}_i - p_i = 0$ if and only if $\delta_i = 0$, $\theta_i = 0$, which means

$$(1 - \operatorname{sgn}(\bar{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}))(1 - \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p})) = (1 - \operatorname{sgn} \boldsymbol{\delta}')(1 - \operatorname{sgn} \boldsymbol{\theta}').$$

Theorem 1 Let $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^2$, $1 < \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{h} < \infty$, $0 < \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \leq \infty$. In order for the inequality

$$\|f * g\|_{B_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\boldsymbol{\tau}}}^{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q}}} \leq C \|f\|_{B_{\mathbf{r}\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\eta}}} \|g\|_{B_{\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\xi}}} \quad (11)$$

to hold for $f \in B_{\mathbf{r}\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\eta}}([0, 1]^2)$ and $g \in B_{\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\xi}}([0, 1]^2)$ it is necessary and sufficient that the following conditions are met:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha} \geq 0; \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha} + 1 + \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{r}} - \frac{1}{\mathbf{h}} \geq 0; \quad (13)$$

$$\frac{(1 - \operatorname{sgn} \boldsymbol{\delta})(1 - \operatorname{sgn} \boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{\tau}} \leq \frac{1}{\boldsymbol{\mu}} + \frac{1}{\boldsymbol{\nu}}; \quad (14)$$

$$\frac{(1 - \operatorname{sgn} \boldsymbol{\delta} \operatorname{sgn} \boldsymbol{\theta})}{\mathbf{q}} \leq \frac{1}{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{\boldsymbol{\eta}}. \quad (15)$$

Proof. Let conditions (12)-(15) be satisfied. In this case, there are $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ such that $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} \geq \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \geq \boldsymbol{\alpha}$, $\tilde{\mathbf{p}} \geq \mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + 1 + \frac{1}{\tilde{\mathbf{p}}} - \frac{1}{\mathbf{r}} - \frac{1}{\mathbf{h}} = 0$. Moreover, if $\delta_i > 0$, $\theta_i > 0$, then $\beta_i + \gamma_i > \tilde{\alpha}_i > \alpha_i$, $\tilde{p}_i > p$. Applying Lemma 7, we have

$$B_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\tilde{\mathbf{q}}} \hookrightarrow B_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}^{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q}},$$

where

$$\frac{1}{\tilde{\tau}} = \frac{1 - \operatorname{sgn} \left(\left(\tilde{\alpha} - \frac{1}{\tilde{p}} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{p} \right) \right) (1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\alpha} - \alpha))}{\tau},$$

$$\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1 - \operatorname{sgn} \left(\left(\tilde{\alpha} - \frac{1}{\tilde{p}} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{p} \right) \right) \operatorname{sgn}(\tilde{\alpha} - \alpha)}{q}.$$

We note, that

$$\left(1 - \operatorname{sgn} \left(\left(\tilde{\alpha} - \frac{1}{\tilde{p}} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{p} \right) \right) \right) (1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\alpha} - \alpha)) = (1 - \operatorname{sgn} \delta)(1 - \operatorname{sgn} \theta),$$

$$1 - \operatorname{sgn} \left(\left(\tilde{\alpha} - \frac{1}{\tilde{p}} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{p} \right) \right) \operatorname{sgn}(\tilde{\alpha} - \alpha) = 1 - \operatorname{sgn} \delta \operatorname{sgn} \theta,$$

that is

$$\frac{1}{\tilde{\tau}} = \frac{(1 - \operatorname{sgn} \delta)(1 - \operatorname{sgn} \theta)}{\tau}, \quad \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1 - \operatorname{sgn} \delta \operatorname{sgn} \theta}{q}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{B_{\tilde{p}\tilde{\tau}}^{\alpha\tilde{q}}} &\leq C \|f * g\|_{B_{\tilde{p}\tilde{\tau}}^{\alpha\tilde{q}}} = \\ &= C \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (2^{\tilde{\alpha}_1 k_1 + \tilde{\alpha}_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f * g)\|_{L_{\tilde{p}\tilde{\tau}}})^{\tilde{q}_1} \right)^{\tilde{q}_2/\tilde{q}_1} \right)^{1/\tilde{q}_2}. \end{aligned}$$

Using Lemma 1, Lemma 2, and Hölder's inequality, we derive

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{B_{\tilde{p}\tilde{\tau}}^{\alpha\tilde{q}}} &\leq C \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (2^{\tilde{\alpha}_1 k_1 + \tilde{\alpha}_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} f * \Delta_{\mathbf{k}} g\|_{L_{\tilde{p}\tilde{\tau}}})^{\tilde{q}_1} \right)^{\tilde{q}_2/\tilde{q}_1} \right)^{1/\tilde{q}_2} \\ &\leq C \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (2^{\tilde{\alpha}_1 k_1 + \tilde{\alpha}_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} f\|_{L_{\tilde{r}\tilde{\mu}}} \|\Delta_{\mathbf{k}} g\|_{L_{\tilde{h}\tilde{\nu}}})^{\tilde{q}_1} \right)^{\tilde{q}_2/\tilde{q}_1} \right)^{1/\tilde{q}_2} \\ &\leq C \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (2^{\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} f\|_{L_{\tilde{r}\tilde{\mu}}})^{\tilde{\eta}_1} \right)^{\tilde{\eta}_2/\tilde{\eta}_1} \right)^{1/\tilde{\eta}_2} \\ &\quad \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (2^{\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} g\|_{L_{\tilde{h}\tilde{\nu}}})^{\tilde{\xi}_1} \right)^{\tilde{\xi}_2/\tilde{\xi}_1} \right)^{1/\tilde{\xi}_2} = \|f\|_{B_{\tilde{r}\tilde{\mu}}^{\beta\tilde{\eta}}} \|g\|_{B_{\tilde{h}\tilde{\nu}}^{\gamma\tilde{\xi}}}, \end{aligned}$$

where $\tilde{\mu} \geq \mu$, $\tilde{\nu} \geq \nu$, $\tilde{\eta} \geq \eta$, $\tilde{\xi} \geq \xi$ and

$$\frac{1}{\tilde{\tau}} = \frac{1}{\tilde{\mu}} + \frac{1}{\tilde{\nu}} \leq \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu},$$

$$\frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} + \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \leq \frac{1}{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{\boldsymbol{\nu}}.$$

And therefore, considering that

$$B_{\mathbf{r}\tilde{\boldsymbol{\mu}}}^{\beta\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \leftrightarrow B_{\mathbf{r}\boldsymbol{\mu}}^{\beta\boldsymbol{\eta}}, \quad B_{\mathbf{h}\tilde{\boldsymbol{\nu}}}^{\gamma\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \leftrightarrow B_{\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}}^{\gamma\boldsymbol{\xi}},$$

we obtain the inequality (11).

Conversely, we show that the conditions (12)-(15) are necessary.

Let (11) hold.

Let $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$. We consider the functions $f_1(x_1, x_2) = e^{2\pi i(2^{k_1}x_1 + 2^{k_2}x_2)}$, $g_1(x_1, x_2) = e^{2\pi i(2^{k_1}x_1 + 2^{k_2}x_2)}$. Then

$$(f_1 * g_1)(x_1, x_2) = e^{2\pi i(2^{k_1}x_1 + 2^{k_2}x_2)}$$

From the inequality (11) we have

$$2^{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2} \leq C 2^{\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2}.$$

Given the correct choice of $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$, we derive

$$\alpha_i \leq \beta_i + \gamma_i. \tag{16}$$

Let $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$. We consider the functions

$$f_2(x_1, x_2) = \sum_{m_2=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}-1} \sum_{m_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} e^{2\pi i(2^{m_1}x_1 + 2^{m_2}x_2)} = g_2(x_1, x_2).$$

Then $f_2 * g_2 = f_2 = g_2$. Using Hardy-Littlewood theorem, we have

$$\|f_2 * g_2\|_{B_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}^{\alpha\mathbf{q}}} = 2^{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2} \|\Delta_{\mathbf{k}} f_2\|_{L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}} \asymp 2^{\left(\alpha_1 + \frac{1}{p_1}\right)k_1 + \left(\alpha_2 + \frac{1}{p_2}\right)k_2}$$

$$\|f\|_{B_{\mathbf{r}\boldsymbol{\mu}}^{\beta\mathbf{q}}} \asymp 2^{\left(\beta_1 + \frac{1}{r_1}\right)k_1 + \left(\beta_2 + \frac{1}{r_2}\right)k_2},$$

$$\|g\|_{B_{\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}}^{\gamma\boldsymbol{\xi}}} \asymp 2^{\left(\gamma_1 + \frac{1}{h_1}\right)k_1 + \left(\gamma_2 + \frac{1}{h_2}\right)k_2}.$$

From the inequality (11), since \mathbf{k} is arbitrary, we have

$$\alpha_i - \beta_i - \gamma_i \leq 1 + \frac{1}{p_i} - \frac{1}{r_i} - \frac{1}{h_i}, \quad i = 1, 2,$$

that is, the condition (13) is necessary.

From (13) and (16) follows (12).

The condition (15) makes sense when $\delta_i = 0$ ($i = 1, 2$). We consider the functions

$$f_3(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^N \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} 2^{-\left(\frac{1}{r_i} + \beta_i\right)k} e^{2\pi i m x_i},$$

$$g_3(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^N \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} 2^{-\left(\frac{1}{h_i} + \gamma_i\right)k} e^{2\pi i m x_i},$$

then

$$(f_3 * g_3)(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^N \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} 2^{-\left(\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{h_i}\right) + (\beta_i + \gamma_i)\right)k} e^{2\pi i m x_i}.$$

Then we have

$$\|f * g\|_{B_{\mathbf{p}\mathbf{r}}^{\alpha\mathbf{q}}} \asymp \left(\sum_{k=0}^N \left(2^{\left(\alpha_i + \frac{1}{q_i} - \frac{1}{h_i} - \frac{1}{r_i} - \beta_i - \gamma_i\right)k} \right)^{\tau_i} \right)^{1/\tau_i} = N^{\frac{1}{\tau_i}},$$

$$\|f\|_{B_{\mathbf{r}\mu}^{\beta\mathbf{q}}} \asymp N^{\frac{1}{\eta_i}},$$

$$\|g\|_{B_{\mathbf{h}\nu}^{\gamma\xi}} \asymp N^{\frac{1}{\xi_i}}.$$

Therefore, $\frac{1}{\tau_i} \leq \frac{1}{\eta_i} + \frac{1}{\xi_i}$ follows from (11).

The condition (14) makes sense when $\delta_i = 0$, $\theta_i = 0$. This means that $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$,
 $1 + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{h_i}$.
 Let $k \in \mathbb{N}$.

$$f_4(x_1, x_2) = 2^{-\beta_i k_i} \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} (m - 2^{k-1})^{\frac{1}{r_i}} e^{2\pi i m x_i},$$

$$g_4(x_1, x_2) = 2^{-\gamma_i k_i} \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} (m - 2^{k-1})^{\frac{1}{h_i}} e^{2\pi i m x_i}.$$

Then

$$\|f\|_{B_{\mathbf{r}\mu}^{\beta\eta}} \asymp \left(\sum_{m=1}^{2^k-1} m^{-1} \right)^{\frac{1}{\mu_i}} \asymp k^{\frac{1}{\mu_i}},$$

$$\|g\|_{B_{\mathbf{h}\nu}^{\gamma\xi}} \asymp k^{\frac{1}{\nu_i}},$$

$$\|f * g\|_{B_{\mathbf{p}\mathbf{r}}^{\alpha\mathbf{q}}} \asymp k^{\frac{1}{\tau_i}}.$$

Therefore $\frac{1}{\tau_i} \leq \frac{1}{m_i} + \frac{1}{\nu_i}$.

3 Conclusion

In conclusion, we note that in the article we investigate the boundedness of the norm of the convolution operator in anisotropic Besov spaces. We proved a criterion for the fulfillment of the inequality

$$\|f * g\|_{B_{p,r}^{\alpha,q}([0,1]^2)} \leq C \|f\|_{B_{r,\mu}^{\beta,\eta}([0,1]^2)} \|g\|_{B_{h\nu}^{\gamma,\xi}([0,1]^2)}$$

in terms of the corresponding parameters. The resulting theorem:

- 1) summarizes the result of Burenkov and Batyrov [21];
- 2) it implies the classical O'Neil inequalities.

4 Acknowledgement

The authors thank the unknown referees for careful review, which allowed to improve the quality of the paper.

This work was supported by the grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project AP05132590).

References

- [1] Bennett C., Sharpley R., "Interpolation of Operators", *Pure and Applied Mathematics* 129, Boston, MA, Academic Press, INC (1988): 469.
- [2] Brézis H., Wainger S., "A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities", *Comm. Partial Differential Equations* vol. 5, no. 7 (1980): 773-789.
- [3] Hörmander L., "The analysis of linear partial differential operators I", *Distribution theory and Fourier analysis* Reprint of the second edition / Berlin: Classics in Mathematics, Springer-Verlag (2013): 440.
- [4] O'Neil R., "Convolution operators and $L(p, q)$ spaces", *Duke Math. J.* 30 (1963): 129-142.
- [5] Yap L.Y.H., "Some remarks on convolution operators and $l(p, q)$ spaces", *Duke Math. J.* 36 (1969): 647-658.
- [6] Hunt R.A., "On $L(p, q)$ spaces", *Enseignement Math.* vol. 12, no. 2 (1966): 249-276.
- [7] Nursultanov E., Tikhonov S., "Convolution inequalities in Lorentz spaces", *J. Fourier Anal. Appl.* 17 (2011): 486-505.
- [8] Blozinski A.P., "On a convolution theorem for $L(p, q)$ spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.* 164 (1972): 255-265.
- [9] Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T., "O multiplikatorah kratnyh ryadov Fur'e [Multipliers of Multiple Fourier Series]", *Proc. Steklov Inst. Math.* 227 (1999): 231-236.
- [10] Tleukhanova N.T., Sadykova K.K. "O'Neil-type inequalities for convolutions in anisotropic Lorentz spaces", *Eurasian Mathematical Journal* vol. 10, no. 3 (2019): 68-83.
- [11] Nursultanov E., Tikhonov S., Tleukhanova N., "Norm inequalities for convolution operators", *C. R. Acad. Sci. Paris* vol. I, no. 347 (2009): 1385-1388.
- [12] Nursultanov E., Tikhonov S., Tleukhanova N., "Norm convolution inequalities in Lebesgue spaces", *Rev. Mat. Iberoam* vol. 34, no. 2 (2018): 811-838.
- [13] Heil C., "An introduction to weighted Wiener amalgams. In Wavelets and their applications", *Allied Publishers*, New Delphi (2003): 183-216.
- [14] Kamińska A., "On convolution operator in Orlicz spaces", *Rev. Mat. Univ. Complutense* 2 (1989): 157-178.
- [15] Kerman R.A., "Convolution theorems with weights", *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 280, no. 1 (1983): 207-219.

- [16] Kerman R., Sawyer E., "Convolution algebras with weighted rearrangement-invariant norm", *Studia Math.* vol. 108, no. 2 (1994): 103-126.
- [17] Nursultanov E., Tikhonov S., "Weighted norm inequalities for convolution and Riesz potential", *Potential Analysis* vol. 42, no. 2 (2015): 435-456.
- [18] Sampson G., Naparstek A., Drobot V., " (L_p, L_q) mapping properties of convolution transforms", *Studia Math.* vol. 55, no. 1 (1976): 41-70.
- [19] Golovkin K.K., Solonnikov V.A., "Ocenki integral'nyh operatorov v translyacionno-invariantnyh normah [Estimates of integral operators in translation-invariant norms]", *Tr. MIAN* 70 (1964): 47-58.
- [20] Golovkin K.K., Solonnikov V.A., "Ocenki integral'nyh operatorov v translyacionno-invariantnyh normah. II [Estimates of integral operators in translation-invariant norms. II]", *Tr. MIAN* 92 (1966): 5-30.
- [21] Batyrov B.E., Burenkov V.I., "Estimates for convolutions in Nikol'skii-Besov spaces", *Dokl. Akad. Nauk* vol. 330, no. 1 (1993): 9-11.
- [22] Bui H., "Weighted Young's inequality and convolution theorems on weighted Besov spaces", *Math. Nachr.* 170 (1994): 25-37.
- [23] Golovkin K.K., Solonnikov V.A., "Ob ocenkah operatorov svertki [Estimates of convolution operators]", *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 7 (1968): 6-86.
- [24] Sadykova K.K., Tleukhanova N.T., "Estimates of the norm of the convolution operator in anisotropic Besov spaces with the dominated mixed derivative", *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, vol. 95, no. 3 (2019): 51-59.
- [25] Bekmaganbetov K., Nursultanov E., "Interpolation of Besov $B_{p\tau}^{\sigma q}$ and Lizorkin-Triebel $F_{p\tau}^{\sigma q}$ spaces", *Analysis Mathematica*, 35 (2009): 169-188.

IRSTI 27.39.25

DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.03

N.T. Bekbayev^{1*}, K.S. Tulenov²¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: n.bekbaev@mail.ru

THE NON-COMMUTATIVE HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL OPERATOR ON NON-COMMUTATIVE LORENTZ SPACES

In this work we study the non-commutative Hardy-Littlewood maximal operator on Lorentz spaces of τ -measurable operators. Non-commutative maximal inequalities were studied, in particular, in [1–3]. Another version of the (non-commutative) Hardy-Littlewood maximal operator was introduced by T. Bekjan [4]. Later J. Shao investigated the Hardy-Littlewood maximal operator on non-commutative Lorentz spaces associated with finite atomless von Neumann algebra (see [5]). Namely, for an operator T affiliated with a semi-finite von Neumann algebra \mathcal{M} , the Hardy-Littlewood maximal operator of T is defined by

$$MA(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\tau(E_{[x-r, x+r]}(|A|))} \tau(|A|E_{[x-r, x+r]}(|A|)), \quad x \geq 0.$$

While the classical Hardy-Littlewood maximal operator of a Lebesgue measurable function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denoted by $Mf(x)$, is defined as

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m([x-r, x+r])} \int_{[x-r, x+r]} |f(t)| dt,$$

where m is a Lebesgue measure on $(-\infty, \infty)$ [10]. In view of spectral theory, $|A|$ is represented as

$$|A| = \int_{\sigma(|A|)} t dE_t,$$

and $MA(|A|)$ is represented as $MA(x)$. Thus, for the operator A , Bekjan's consideration is that $MA(|A|)$ is defined as the operator analogue of the Hardy-Littlewood maximal operator in the classical case. Our purpose is to investigate the non-commutative Hardy-Littlewood maximal operator M in the sense of T. Bekjan (see [4]). In particular, we obtain boundedness of the non-commutative Hardy-Littlewood maximal operator in non-commutative Lorentz spaces.

Key words: Cesaro operator, Hardy-Littlewood maximal operator, Lorentz space.

Н.Т. Бекбаев^{1*}, Қ.С. Төленов²¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан²Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: n.bekbaev@mail.ru

Коммутативті емес Лоренц кеңістіктеріндегі Харди-Литтлвуд коммутативті емес максимал операторы

Бұл жұмыста біз коммутативті емес Харди-Литтлвуд максимал операторын τ -өлшенетін операторлардың Лоренц кеңістіктерінде қарастырамыз. Коммутативті емес максимал теңсіздіктер туралы [1–3] жұмыстарынан көруге болады. Харди-Литтлвуд операторының басқа нұсқасын Т.Бекжан [4] жұмысында келтірді. Кейінірек J. Shao Харди-Литтлвуд максимал операторын шенелген атомсыз фон Нейман алгебрасымен ассоциацияланған коммутативті емес Лоренц кеңістіктерінде зерттеген [5]. Атап айтқанда, жартылай шенелген M фон Нейман алгебрасымен қосылма T операторы үшін Харди-Литтлвуд максимал операторы

$$MA(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\tau(E_{[x-r, x+r]}(|A|))} \tau(|A|E_{[x-r, x+r]}(|A|)), \quad x \geq 0$$

түрінде анықталады. Лебег бойынша өлшенетін $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функциясы үшін классикалық Харди-Литтлвуд максимал операторын $Mf(x)$ деп белгілеп,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m([x-r, x+r])} \int_{[x-r, x+r]} |f(t)| dt$$

түрінде анықтаймыз, мұндағы m – Лебег өлшемі [10]. Спектрлік теория бойынша

$$|A| = \int_{\sigma(|A|)} t dE_t$$

болатындығын байқауға болады, сонымен қатар $MA(|A|)$ операторын $MA(x)$ түрінде жазамыз. Сонымен, A операторы үшін Т.Бекжан тұжырымы бойынша $MA(|A|)$ операторы классикалық жағдайдағы Харди-Литтлвуд максимал операторының аналогы ретінде анықталады. Біздің мақсатымыз – Т.Бекжан [4] жұмысындағы M Харди-Литтлвуд максимал операторын зерттеу болып табылады. Нақтырақ айтқанда, біз коммутативті емес Лоренц кеңістіктерінде коммутативті емес Харди-Литтлвуд максимал операторының шенелгендігін аламыз.

Түйін сөздер: Чезаро операторы, Харди-Литтлвуд максимал операторы, Лоренц кеңістігі.

Н.Т. Бекбаев^{1*}, К.С. Туленов²

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: n.bekbaev@mail.ru

Некоммутативный максимальный оператор Харди-Литтлвуда в некоммутативных пространствах Лоренца

В данной работе мы исследуем некоммутативный максимальный оператор Харди-Литтлвуда в симметричных пространствах τ -измеримых операторов. Некоммутативные максимальные неравенства были рассмотрены, в частности, в [1–3]. Другая версия некоммутативного максимального оператора Харди-Литтлвуда представлена Т. Бекжаном [4]. Позже Дж. Шао занимался исследованиями максимального оператора Харди-Литтлвуда в некоммутативных пространствах Лоренца ассоциированной с ограниченной безатомной алгеброй фон Неймана [5]. А именно, для оператора T , аффилированного с полуограниченной алгеброй фон Неймана M , максимальный оператор Харди-Литтлвуда определяется как

$$MA(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\tau(E_{[x-r, x+r]}(|A|))} \tau(|A|E_{[x-r, x+r]}(|A|)), \quad x \geq 0.$$

В то время как классический максимальный оператор Харди-Литтлвуда измеримых по Лебегу функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обозначаемый через $Mf(x)$, определяется как

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m([x-r, x+r])} \int_{[x-r, x+r]} |f(t)| dt$$

где m –мера Лебега [10]. С точки зрения спектральной теории, $|A|$ представим в виде

$$|A| = \int_{\sigma(|A|)} t dE_t,$$

а $MA(|A|)$ представим в виде $MA(x)$. Таким образом, для оператора A , рассуждение Т. Бекжана говорит о том, что $MA(|A|)$ определяется как аналог максимального оператора Харди-Литтлвуда в классическом случае [4]. Нашей целью является исследовать некоммутативный максимальный оператор M в смысле Т. Бекжана. В частности, мы получим ограниченность некоммутативного максимального оператора Харди-Литтлвуда в некоммутативных пространствах Лоренца.

Ключевые слова: Оператор Чезаро, максимальный оператор Харди-Литтлвуда, пространства Лоренца.

1 Introduction

The Hardy-Littlewood maximal operator M is an important sub-linear operator with numerous applications in real analysis and harmonic analysis. It takes a locally integrable function $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ and returns another function Mf that, at each point $x \in \mathbb{R}^d$, gives the maximum average value that f can have on balls centered at that point. More precisely,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \quad (1)$$

where $B(x,r)$ is the ball of radius r centred at x , and $|E|$ denotes the d -dimensional Lebesgue measure of $E \subset \mathbb{R}^d$. There is an uncountable number of papers devoted to investigation of the Hardy-Littlewood function defined by the formula (1). For instance, see [7, 8, 10] and references therein.

2 Materials and methods

Let (\mathbb{R}_+, m) denote the measure space $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ equipped with Lebesgue measure m . Let $L(\mathbb{R}_+, m)$ be the space of all measurable real-valued functions on \mathbb{R}_+ equipped with Lebesgue measure m i.e. functions which coincide almost everywhere are considered identical. Define $S(\mathbb{R}_+, m)$ to be the subset of $L(\mathbb{R}_+, m)$ which consists of all functions x such that $m(\{t : |x(t)| > s\}) < \infty$ for some $s > 0$. For $x \in S(\mathbb{R}_+)$ we denote by $\mu(x)$ the decreasing rearrangement of the function $|x|$. That is,

$$\mu(t, x) = \inf\{s \geq 0 : m(\{|x| > s\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

We say that y is submajorized by x in the sense of Hardy–Littlewood–Polya (written $y \prec\prec x$) if

$$\int_0^t \mu(s, y) ds \leq \int_0^t \mu(s, x) ds, \quad t \geq 0.$$

Let \mathcal{M} be a semifinite von Neumann algebra on a separable Hilbert space H equipped with a faithful normal semifinite trace τ . A closed and densely defined operator A affiliated with \mathcal{M} is called τ -measurable if $\tau(E_{|A|}(s, \infty)) < \infty$ for sufficiently large s . We denote the set of all τ -measurable operators by $S(\mathcal{M}, \tau)$. Let $Proj(\mathcal{M})$ denote the lattice of all projections in \mathcal{M} . For every $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, we define its singular value function $\mu(A)$ by setting

$$\mu(t, A) = \inf\{\|A(1 - P)\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M})} : P \in Proj(\mathcal{M}), \tau(P) \leq t\}, \quad t > 0,$$

where the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M})}$ is the usual operator (uniform) norm. Equivalently, for positive self-adjoint operators $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, we have

$$n_A(s) = \tau(E_A(s, \infty)), \quad \mu(t, A) = \inf\{s > 0 : n_A(s) < t\}, \quad t > 0.$$

An operator in $S(\mathcal{M}, \tau)$ is called τ -compact if $\mu(\infty, A) = 0$. This notion is a direct generalization of the ideal of compact operators on a Hilbert space H . For more details on generalised singular value functions and τ -compact operators, we refer the reader to [9] and [13]. Let $\mathcal{L}_{loc}(\mathcal{M}, \tau)$ be the set of all τ -measurable operators such that

$$\tau(|A|E_{|A|}(I)) < +\infty,$$

for all bounded intervals $I \subset [0, +\infty)$.

Definition 1 [4, Definition 1]. For $A \in \mathcal{L}_{loc}(\mathcal{M}, \tau)$, we define the maximal operator of A by

$$MA(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\tau(E_{[x-r, x+r]}(|A|))} \tau(|A|E_{[x-r, x+r]}(|A|)), \quad x \geq 0,$$

(let $\frac{0}{0} = 0$). M is called the non-commutative Hardy-Littlewood maximal operator.

$MA(|A|)$ is represented as $MA(x)$. Then for A , we consider $MA(|A|)$ as the operator analogue of the Hardy-Littlewood maximal operator in the classical case. Hence roughly speaking, $MA(|A|)$ stands in relation to A as $Mf(x)$ stands in relation to f in classical analysis, i.e.

$$MA(|A|) = \int_{\sigma(|A|)} MA(\lambda) dE_{\lambda}(|A|),$$

where $\sigma(|A|)$ is the spectrum of $|A|$.

Define $L_{1,\infty}(\mathbb{R}_+) = \{f \in S(\mathbb{R}_+) : \sup_{t>0} t\mu(t, f) < \infty\}$ equipped with the quasi-norm

$$\|f\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t\mu(t, f).$$

It is well-known that this space is a quasi-Banach space (see [8]).

Let $C : L_{1,\infty}(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$ be the Cesaro operator defined by

$$(Cf)(t) := \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, \quad f \in L_{1,\infty}(\mathbb{R}_+), \quad t > 0.$$

In [14], it was proved the following result.

Theorem 1 For every $A \in \mathcal{L}_{loc}(\mathcal{M}, \tau)$, we have

$$\mu(t, MA(|A|)) \leq 16 \cdot (C\mu(A))(t), \quad \forall t > 0.$$

Definition 2 [6, Definition 1.1, p. 49]. A function φ defined on the semiaxis $[0, \infty)$ is said to be quasiconcave if

(i) $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$;

(ii) $\varphi(t)$ is positive and increasing for $t > 0$;

(iii) $\frac{\varphi(t)}{t}$ is decreasing for $t > 0$.

Observe that every nonnegative concave function on $[0, \infty)$ that vanishes at origin is quasiconcave. The reverse, however, is not always true. However, we may replace, if necessary, a quasiconcave function φ by its least concave majorant $\tilde{\varphi}$ such that

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi} \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}$$

(see [7, Proposition 5.10, p.71]).

Let Ω denote the set of increasing concave functions $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ for which $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$ (or simply $\varphi(+0) = 0$). For the function φ in Ω , the Lorentz space $\Lambda_\varphi(\mathbb{R}_+)$ is defined by setting

$$\Lambda_\varphi(\mathbb{R}_+) := \left\{ x \in S(\mathbb{R}_+) : \int_{\mathbb{R}_+} \mu(s, x) d\varphi(s) < \infty \right\},$$

and equipped with the norm

$$\|x\|_{\Lambda_\varphi(\mathbb{R}_+)} := \int_{\mathbb{R}_+} \mu(s, x) d\varphi(s).$$

Let ψ be a quasiconcave function on $[0, \infty)$. Define the Marcinkiewicz space $M_\psi(\mathbb{R}_+)$ by setting

$$M_\psi(\mathbb{R}_+) := \left\{ f \in S(\mathbb{R}_+) : \|f\|_{M_\psi(\mathbb{R}_+)} < \infty \right\}$$

equipped with the norm

$$\|f\|_{M_\psi(\mathbb{R}_+)} := \sup_{t>0} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \mu(s, f) ds.$$

The space $(L_1 + L_\infty)(\mathbb{R}_+) = L_1(\mathbb{R}_+) + L_\infty(\mathbb{R}_+)$ consists of functions which are sums of bounded measurable and summable functions $x \in S(\mathbb{R}_+)$ equipped with the norm given by

$$\|x\|_{(L_1+L_\infty)(\mathbb{R}_+)} = \inf \{ \|x_1\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} + \|x_2\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} : x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1(\mathbb{R}_+), x_2 \in L_\infty(\mathbb{R}_+) \}.$$

For more details on Lorentz spaces, we refer the reader to [7, Chapter I and II] and [6, Chapter II].

As in the commutative case, for a function φ in Ω define the corresponding non-commutative Lorentz space by setting

$$\Lambda_\varphi(\mathcal{M}) := \left\{ A \in S(\mathcal{M}, \tau) : \int_{\mathbb{R}_+} \mu(s, A) d\varphi(s) < \infty \right\},$$

and equipped with the norm

$$\|A\|_{\Lambda_\varphi(\mathcal{M})} := \int_{\mathbb{R}_+} \mu(s, A) d\varphi(s).$$

3 Main results.

Let φ be an increasing concave function on $[0, \infty)$ such that $\varphi(+0) = 0$ and satisfying

$$\varphi(t) \geq ct \log(1 + 1/t), \quad t > 0. \quad (2)$$

The following is the main result of this paper.

Theorem 2 *Let φ be an increasing concave function such that $\varphi(+0) = 0$ and satisfying (2) and let ψ be an increasing concave function on $[0, \infty)$ such that $\psi(+0) = 0$ and*

$$\int_t^\infty \frac{\psi(s)}{s^2} ds \leq \frac{\varphi(t)}{t}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Then the non-commutative Hardy-Littlewood maximal operator

$$MA(\cdot) : \Lambda_\varphi(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_\psi(\mathcal{M})$$

is bounded.

Proof. It is known that if φ satisfies (2), then Cesaro operator (see [11, Proposition 4.4])

$$C : \Lambda_\varphi(\mathbb{R}_+) \rightarrow \Lambda_\psi(\mathbb{R}_+)$$

is bounded if and only if (3) holds. Moreover, $\Lambda_\psi(\mathbb{R}_+)$ is minimal among such symmetric Banach function spaces. That means, there exists a constant $c > 0$ such that

$$\|Cf\|_{\Lambda_\psi(\mathbb{R}_+)} \leq c\|f\|_{\Lambda_\varphi(\mathbb{R}_+)}, \quad \forall f \in \Lambda_\varphi(\mathbb{R}_+). \quad (4)$$

Hence, by Theorem 1 and by (4), for any $A \in \Lambda_\varphi(\mathcal{M})$ we have

$$\begin{aligned} \|MA(|A|)\|_{\Lambda_\psi(\mathcal{M})} &:= \|\mu(MA(|A|))\|_{\Lambda_\psi(\mathbb{R}_+)} \leq 16\|C\mu(A)\|_{\Lambda_\psi(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq 16c\|\mu(A)\|_{\Lambda_\psi(\mathbb{R}_+)} = 16c\|A\|_{\Lambda_\varphi(\mathcal{M})}, \end{aligned}$$

where c is an absolute constant independent of other parametr. This concludes the proof.

Corollary 1 *Let $\varphi_\alpha(t) = t \log^\alpha(1 + t^{-1/\alpha})$, $\alpha \geq 1$. Then the non-commutative Hardy-Littlewood maximal operator*

$$MA(\cdot) : \Lambda_{\varphi_\alpha}(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_{\varphi_{\alpha+1}}(\mathcal{M})$$

is bounded.

Proof. It was proved in [11] that the function $\varphi_\alpha(t)$ satisfies

$$\int_t^\infty \frac{\varphi_\alpha(s)}{s^2} ds \leq \frac{\varphi_{\alpha+1}(t)}{t}, \quad t > 0.$$

Therefore, the assertion follows from Theorem 2.

Moreover, we illustrate two examples of Lorentz spaces which the Hardy-Littlewood maximal operator bounded on.

Example 1 Let $\varphi(t) = \max\{1, t\}$, $t > 0$. Then

$$MA(\cdot) : \Lambda_\varphi(\mathcal{M}) \rightarrow M_\psi(\mathcal{M})$$

is bounded, where $\psi(t) = \log(1+t)$, $t > 0$. Here

$$M_\psi(\mathcal{M}) = \{A \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(A) \in M_\psi(\mathbb{R}_+)\}.$$

Indeed, the Cesaro operator C is bounded from $\Lambda_\varphi(\mathbb{R}_+)$ into $M_\psi(\mathbb{R}_+)$ (see Example 2.9 in [12]). Therefore, by Theorem 1 we obtain the desired result.

Example 2 Let $\varphi(t) = t \log(1 + \frac{1}{t})$, $t > 0$. Then

$$MA(\cdot) : \Lambda_\varphi(\mathcal{M}) \rightarrow (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M})$$

is bounded. Here, $(L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}) = \{A \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(A) \in (L_1 + L_\infty)(\mathbb{R}_+)\}$. As in Example 1, it was shown in [12, Example 2.10] that $C : \Lambda_\varphi(\mathbb{R}_0) \rightarrow (L_1 + L_\infty)(\mathbb{R}_+)$ is bounded. Hence, the assertion follows from Theorem 1.

4 Conclusion

In this paper, we investigated boundedness of Hardy-Littlewood maximal operator (in the sense of T. Bekzhan) on non-commutative Lorentz spaces. As an illustration we showed several examples of non-commutative Lorentz spaces in which the maximal Hardy-Littlewood operator is bounded.

5 Acknowledgment

Authors would like to thank Yerlan Nessipbayev for his helps and useful discussions. The work was partially supported by the grant (No. AP08052004) of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

References

- [1] M. Junge, "Doob's inequality for non-commutative martingales", *J.Reine Angew.Math.* 549 (2002): 149–190.
- [2] M.Junge, Q.Xu, "Non-commutative maximal ergodic theorems", *J.Am.Math.Soc.* Vol. 20, No 2 (2007): 385–439.
- [3] T. Mei, "Operator valued Hardy spaces", *Mem.Am.Math.Soc.* Vol. 188, No 881– (2007): 64.

- [4] T.N. Bekzhan, "Hardy-Littlewood maximal function of τ -measurable operators", *J. Math. Anal. Appl.* 322 (2006): 87–96.
- [5] J. Shao, "Hardy-Littlewood maximal function on noncommutative Lorentz spaces", *Journal of Inequalities and Applications.* (2013): 384.
- [6] S. Krein, Y. Petunin and E. Semenov, *Interpolation of linear operators* (Amer. Math. Soc.: Providence, R.I., 1982), 375.
- [7] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators* (Pure and Applied Mathematics: 129, Academic Press, 1988), 469.
- [8] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis* (Springer: 2nd ed., 2008), 638.
- [9] S. Lord, F. Sukochev and D. Zanin, *Singular traces. Theory and applications* (Berlin: De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, 2013), 452.
- [10] E. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces* (Princeton: Princeton University Press, 1971), 312.
- [11] J. Soria and P. Tradacete, "Optimal rearrangement invariant range for Hardy-type operators", *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh.* 146A (2016): 865–893.
- [12] J. Soria and P. Tradacete, "Characterization of the restricted type spaces $R(X)$ ", *Math. Ineq. Applic.* 18 (2015): 295–319.
- [13] T. Fack and H. Kosaki, "Generalized s -numbers of τ -measurable operators", *Pacific J. Math.* 123, 2 (1986): 269–300.
- [14] Y. Nessipbayev and K. Tulenov, "The non-commutative Hardy-Littlewood maximal function on symmetric spaces of τ -measurable operators [electronic resource]", (2020). arXiv:2002.04413.

MPHTI 27.29.23

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.04>**М.К. Дауылбаев^{1,2,3}, Н. Авилтай^{1*}, Б.Б. Кадирбеков¹**¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан²Институт информационных и вычислительных технологий, г. Алматы, Казахстан³Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан*e-mail: avyltay.nauryzbay@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Математическими моделями многих процессов в физике, астрофизике, химии, биологии, механике и технике часто служат дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, содержащие малые параметры при старших производных. Такие уравнения в настоящее время принято называть сингулярно возмущенными. В статье рассматривается двухточечная краевая задача для линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производных при условии, когда корни «дополнительного характеристического уравнения» отрицательны и краевые условия содержат члены с малыми возмущениями. Целью исследования является получение асимптотических оценок решения и выяснение асимптотического поведения решений в окрестности точек, в которых заданы дополнительные условия, теряющиеся при вырождении. В работе построены граничные функции краевой задачи для сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения, получены их асимптотические оценки. С помощью граничных функции и функций Коши получена аналитическая формула решений краевой задачи. Доказана теорема об асимптотической оценке решения рассматриваемой краевой задачи. Установлены асимптотическое по малому параметру поведение решения и порядок роста его производных. Показано, что решение рассматриваемой краевой задачи на левом конце данного отрезка обладает явлением начального скачка первого порядка. Показаны отличительные особенности в асимптотических свойствах решений данной краевой задачи по сравнению с аналогичными работами в области сингулярно возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, обладающих начальными скачками. Полученные результаты позволяют построить равномерное асимптотическое разложение решений краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с любой степенью точности по малому параметру.

Ключевые слова: Сингулярное возмущение, малый параметр, начальный скачок, асимптотические оценки.

М.К. Дауылбаев^{1,2,3}, Н. Авилтай^{1*}, Б.Б. Кадирбеков¹¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан²Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы қ., Қазақстан³Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан*e-mail: avyltay.nauryzbay@mail.ru

Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы

Үлкен туындыларының алдында кіші параметрлері бар дифференциалдық және интегралды-дифференциалдық теңдеулер физика, астрофизика, химия, биология, механика және техникадағы көптеген үрдістердің математикалық модельдері болып табылады. Қазіргі уақытта мұндай теңдеулерді сингулярлы ауытқыған деп атау қабылданған. Мақалада

«қосымша сипаттауыш теңдеуінің» түберлері теріс, ал шекаралық шарттарында кіші ауытқымалы мүшелері бар ең үлкен екі туындыларының алдында кіші параметрлері бар үшінші ретті сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырылады. Зерттеудің мақсаты шешімнің асимптотикалық бағалауын алу және тозғындалған кезде түсіп қалатын қосымша шарттар берілген нүктелердің маңайында шешімнің асимптотикалық сипатын анықтау болып табылады. Жұмыс барысында сингулярлы ауытқыған біртекті дифференциалдық теңдеу үшін қойылған шеттік есептің шекаралық функциялары құрылды және олардың асимптотикалық бағалауы алынды. Шекаралық функциялардың және Коши функциясының көмегімен шеттік есеп шешімнің аналитикалық формуласы алынды. Қарастырылып отырған шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы туралы теорема дәлденді. Кіші параметр бойынша шешімнің асимптотикалық сипаты және туындыларының өсу реті анықталды. Қарастырылып отырған шеттік есеп шешімінің берілген аралықтың сол жақ шегінде бірінші ретті бастапқы секірісінің бар екені көрсетілді. Бастапқы секірісті дифференциалдық және интегралды-дифференциалдық теңдеулер саласындағы басқа ұқсас жұмыстармен салыстырғанда берілген шеттік есеп шешімінің асимптотикалық қасиеттеріндегі ерекшеліктер көрсетілді. Алынған нәтижелер сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған шеттік есептер шешімінің кіші параметрдің кез-келген дәрежесі бойынша дәлдікпен бірқалыпты асимптотикалық жіктелуін құруға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: сингулярлы ауытқу, кіші параметр, бастапқы секіріс, асимптотикалық бағалау.

M. Dauylbayev^{1,2,3}, N. Aviltay^{1*}, B. Kadirbekov¹

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan

³Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: aviltay.nauryzbay@mail.ru

Asymptotic estimates of the solution of the boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations

The mathematical models of many processes in physics, astrophysics, chemistry, biology, mechanics and technology are differential and integro-differential equations containing small parameters at the highest derivatives. Such equations currently are called singularly perturbed equations. The paper considers a two-point boundary value problem for a third-order linear integro-differential equation with a small parameter at the two highest derivatives, when the roots of the «additional characteristic equation» are negative and the boundary conditions contain terms with small perturbations. The aim of the study is to obtain asymptotic estimates of the solution and to obtain the asymptotic behavior of the solution in a neighborhood of points where additional conditions are given that are lost during degeneracy. The boundary functions of the boundary value problem for a singularly perturbed homogeneous differential equation are constructed, and their asymptotic estimates are obtained. Using boundary functions and Cauchy function an analytical formula for the solutions of the boundary value problem is obtained. A theorem on the asymptotic estimate of the solution of the considered boundary value problem is proved. The asymptotic behavior of the solution and the growth order of its derivatives with respect to a small parameter are established. It is shown that the solution of the boundary value problem at the left point of given segment has the phenomenon of an initial first-order jump. Distinctive features in the asymptotic properties of the solutions of this boundary-value problem are shown in comparison with similar works in the field of singularly perturbed differential and integro-differential equations with initial jumps. The obtained results make it possible to construct a uniform asymptotic expansion of the solutions of boundary value problems for singularly perturbed integro-differential equations with any degree of accuracy with respect to a small parameter.

Key words: singular perturbation, small parameter, initial jump, asymptotic estimates.

1 Введение

Впервые начальные задачи с неограниченными начальными данными при стремлении малого параметра к нулю изучены в работах М.И. Вишика, Л.А. Люстерника [1] и К.А. Касымова [2]. Особенностью этих задач является то, что решение сингулярно возмущенной начальной задачи при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению вырожденного уравнения, но уже с измененным начальным условием. В таком случае говорят, что имеет место явление начального скачка. Наиболее общие случаи задач Коши с начальными скачками для сингулярно возмущенных нелинейных систем обыкновенных и интегро-дифференциальных уравнений, а также для систем и уравнений в частных производных гиперболического типа изучены К.А.Касымовым и были продолжены его учениками. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, обладающие явлениями начальных скачков рассмотрены в [3, 4]. В настоящей работе рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром при двух старших производных с краевыми условиями, содержащими члены с малыми возмущениями в случае, когда корни так называемого «дополнительного характеристического уравнения» имеют отрицательные знаки. Асимптотическое поведение решения таких краевых задач не исследовались. Работа посвящена установлению асимптотических свойств решения по малому параметру. Сингулярно возмущенные уравнения имеют большую прикладную значимость. Они выступают в качестве математических моделей при исследовании разнообразных процессов в физике, химии, биологии и технике и т.д. Тем самым исследование таких задач является актуальным.

2 Обзор литературы

Асимптотические и численные методы приближения к решениям сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в настоящее время активно исследуются как, отечественными, так и зарубежными авторами (См., например, [5–20]). Следует отметить, что в этих и в других работах по сингулярно возмущенным уравнениям авторы исследуют такие краевые задачи, которые не обладают явлениями начальных скачков. В отличие от указанных работ нами исследуются краевые задачи с начальными скачками для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. В данной работе изучено асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенной краевой задачи в точке начального скачка и получены асимптотические оценки решения.

3 Материал и методы

Рассмотрим сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t, x)y^{(i)}(x, \varepsilon)dx, \quad (1)$$

со следующими краевыми условиями

$$\begin{aligned} h_i y(t, \varepsilon) &\equiv \alpha_i y(0, \varepsilon) + \beta_i y'(0, \varepsilon) + \delta_i \varepsilon y''(0, \varepsilon) = a_i, \quad i = \overline{1, 2}, \\ h_3 y(t, \varepsilon) &\equiv \alpha_3 y(1, \varepsilon) + \beta_3 \varepsilon y'(1, \varepsilon) + \delta_3 \varepsilon^2 y''(1, \varepsilon) = b. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, i = \overline{1, 3}, a_1, a_2, b$ – известные постоянные.

Пусть выполнены следующие условия:

I. $A(t), B(t), C(t) \in C^2[0, 1], F(t) \in C[0, 1],$

$H_i(t, x) \in C(D), i = 0, 1, D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$

II. Пусть корни уравнения $\mu^2 + A(t)\mu + B(t) = 0$ удовлетворяют условиям $\mu_1 \neq \mu_2, \mu_i \leq -\gamma < 0, i = 1, 2.$

III. $\alpha_3 \neq 0, \Delta_0 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

IV. Число $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра $H(t, s, \varepsilon)$ (см. (12))

Рассмотрим однородное уравнение

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = 0. \quad (3)$$

Если выполнены условия (I), (II), то для фундаментальной системы решений уравнения (3) имеет место следующее асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ представление [21]:

$$\begin{cases} y_i^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_i(x) dx} (\mu_i^j(t) y_{i0}(t) + O(\varepsilon)), & i = \overline{1, 2}, \\ y_3^{(j)}(t, \varepsilon) = y_{30}^{(j)}(t) + O(\varepsilon). \end{cases} \quad j = \overline{0, 2}. \quad (4)$$

Пусть функция $K(t, s, \varepsilon), 0 \leq s \leq t \leq 1$ является решением задачи:

$$L_\varepsilon K(t, s, \varepsilon) = 0, \quad K^{(j)}(s, s, \varepsilon) = \delta_{2,j} \quad j = \overline{0, 2}, \quad (5)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Функция $K(t, s, \varepsilon)$ называется функцией Коши, и для нее справедливы следующие оценки [21]:

$$|K^{(j)}(t, s, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon^{2-j} e^{-\gamma \frac{t-s}{\varepsilon}}, \quad j = \overline{0, 2}. \quad (6)$$

Пусть функции $\Phi_i(t, \varepsilon), i = \overline{1, 3}$ являются решениями задачи:

$$\begin{cases} L_\varepsilon \Phi_i(t, \varepsilon) = 0, & i = \overline{1, 3}, \\ h_k \Phi_i(t, \varepsilon) = \delta_{ki}, & k = \overline{1, 3}. \end{cases} \quad (7)$$

Функции $\Phi_i(t, \varepsilon), i = \overline{1, 3}$ называются граничными функциями, и они определяются по следующей формуле [21]:

$$\Phi_i(t, \varepsilon) = \frac{\Delta_i(t, \varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

где

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t, \varepsilon) & h_1 y_2(t, \varepsilon) & h_1 y_3(t, \varepsilon) \\ h_2 y_1(t, \varepsilon) & h_2 y_2(t, \varepsilon) & h_2 y_3(t, \varepsilon) \\ h_3 y_1(t, \varepsilon) & h_3 y_2(t, \varepsilon) & h_3 y_3(t, \varepsilon) \end{vmatrix},$$

а $\Delta_i(t, \varepsilon)$ – определители, получаемые из $\Delta(\varepsilon)$ заменой его i -ой строки фундаментальной системой решений уравнения (3).

Для граничных функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, 3}$ из (8) с учетом (2), (4) получаем асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ представление:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(j)}(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_1(x) dx} (\Delta_{21} \mu_1^j(t) y_{10}(t) + O(\varepsilon)) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_2(x) dx} (\Delta_{22} \mu_2^j(t) y_{20}(t) + O(\varepsilon)), \quad j = \overline{0, 2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(j)}(t, \varepsilon) = & - \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_1(x) dx} (\Delta_{11} \mu_1^j(t) y_{10}(t) + O(\varepsilon)) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_2(x) dx} (\Delta_{12} \mu_2^j(t) y_{20}(t) + O(\varepsilon)), \quad j = \overline{0, 2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(j)}(t, \varepsilon) = & \frac{y_{30}^{(j)}(t)}{\alpha_3 y_{30}(1)} + \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_1(x) dx} (\Delta_{31} \mu_1^j(t) y_{10}(t) + O(\varepsilon)) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_2(x) dx} (\Delta_{32} \mu_2^j(t) y_{20}(t) + O(\varepsilon)) \quad j = \overline{0, 2}. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{i1} = & \frac{\beta_i + \delta_i \mu_2(0)}{\mu_1(0)(\mu_2(0) - \mu_1(0))\Delta_0}, \quad \Delta_{i2} = \frac{\beta_i + \delta_i \mu_1(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0) - \mu_1(0))\Delta_0}, \quad i = 1, 2, \\ \Delta_{31} = & \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 + \delta_1 \mu_2(0) & \alpha_1 + \beta_1 y'_{30}(0) \\ \beta_2 + \delta_2 \mu_2(0) & \alpha_2 + \beta_2 y'_{30}(0) \end{vmatrix}}{\alpha_3 \mu_1(0)(\mu_2(0) - \mu_1(0))\Delta_0 y_{30}(1)}, \quad \Delta_{32} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 + \delta_1 \mu_1(0) & \alpha_1 + \beta_1 y'_{30}(0) \\ \beta_2 + \delta_2 \mu_1(0) & \alpha_2 + \beta_2 y'_{30}(0) \end{vmatrix}}{\alpha_3 \mu_2(0)(\mu_2(0) - \mu_1(0))\Delta_0 y_{30}(1)}. \end{aligned}$$

Для функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, 3}$ справедливы оценки:

$$\left| \Phi_i^{(j)}(t, \varepsilon) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}}, \quad i = 1, 2, \quad \left| \Phi_3^{(j)}(t, \varepsilon) \right| \leq C + \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}}, \quad j = \overline{0, 2}. \quad (9)$$

Решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y(t, \varepsilon) = C_1 \Phi_1(t, \varepsilon) + C_2 \Phi_2(t, \varepsilon) + C_3 \Phi_3(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (10)$$

где $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, 3}$ – граничные функции, C_i , $i = \overline{1, 3}$ – неизвестные постоянные, $z(t, \varepsilon)$ – неизвестная функция, определяемая из следующего интегрального уравнения Фредгольма

$$z(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) + \int_0^1 H(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds. \quad (11)$$

Здесь

$$f(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t, x) \left(C_1 \Phi_1^{(i)}(x, \varepsilon) + C_2 \Phi_2^{(i)}(x, \varepsilon) + C_3 \Phi_3^{(i)}(x, \varepsilon) \right) dx,$$

$$H(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t, x) K^{(i)}(x, s, \varepsilon) dx. \quad (12)$$

Решая уравнение (11) с помощью резольвенты с учетом условия (IV) и подставляя в (10), получаем решение задачи (1), (2) в виде

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^3 C_i Q_i(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \quad (13)$$

где

$$Q_i(t, \varepsilon) = \Phi_i(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 K(t, s, \varepsilon) \varphi_i(s, \varepsilon) ds, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 K(t, s, \varepsilon) \overline{F}(s, \varepsilon) ds, \quad (14)$$

$$\varphi_i(t, \varepsilon) = \int_0^1 \sum_{j=0}^1 \overline{H}_j(t, x, \varepsilon) \Phi_i^{(j)}(x, \varepsilon) dx, \quad i = \overline{1, 3},$$

а для $\overline{H}_j(t, x, \varepsilon)$, $\overline{F}(t, \varepsilon)$ справедливы асимптотические представления:

$$\overline{H}_j(t, x, \varepsilon) = H_j(t, x) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) H_j(s, x) ds \equiv \overline{H}_j(t, x) + O(\varepsilon),$$

$$\overline{F}(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) F(s) ds \equiv \overline{F}(t) + O(\varepsilon). \quad (15)$$

Для резольвенты имеет место при малых ε представление

$$R(t, s, \varepsilon) = \overline{R}(t, s) + O(\varepsilon).$$

Для определения неизвестных постоянных C_i , $i = \overline{1, 3}$ из (13) с учетом краевых условий (2) получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 h_1 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 h_1 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 h_1 Q_3(t, \varepsilon) = a_1 - h_1 P(t, \varepsilon), \\ C_1 h_2 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 h_2 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 h_2 Q_3(t, \varepsilon) = a_2 - h_2 P(t, \varepsilon), \\ C_1 h_3 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 h_3 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 h_3 Q_3(t, \varepsilon) = b - h_3 P(t, \varepsilon). \end{cases} \quad (16)$$

Из (16) с учетом формул (14), (15) и краевых условий (2), находим неизвестные C_i , $i = \overline{1, 3}$:

$$C_1 = a_1, \quad C_2 = a_2, \quad C_3 = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(b - \alpha_3 \int_0^1 \frac{y_{30}(1)\bar{F}(s)}{\mu_1(s)\mu_2(s)y_{30}(s)} ds \right) + O(\varepsilon), \quad (17)$$

где

$$\bar{\omega} = 1 + \int_0^1 \frac{\bar{\varphi}(s) ds}{\mu_1(s)\mu_2(s)y_{30}(s)}, \quad \bar{\varphi}(s) = \int_0^1 \sum_{i=0}^1 \bar{H}_i(s, x) y_{30}^{(i)}(x) dx,$$

Тем самым, решение краевой задачи (1), (2) имеет вид (13), где $Q_i(t, \varepsilon)$, $P(t, \varepsilon)$ выражаются формулой (14), а C_i , $i = \overline{1, 3}$ имеет вид (17).

Теорема 1 Пусть выполнены условия (I) – (IV). Тогда для решения краевой задачи (1), (2) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ оценки:

$$\begin{aligned} |y^{(j)}(t, \varepsilon)| &\leq C \left(\varepsilon |a_1| + \varepsilon |a_2| + |b| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) + \\ &+ \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} \left(|a_1| + |a_2| + |b| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}}, \quad j = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (18)$$

для $C > 0$, $\gamma > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от ε .

Доказательство. Для функции $Q_i(t, \varepsilon)$, $P(t, \varepsilon)$ из (14), (15) с учетом (6), (9) получаем оценки:

$$\begin{aligned} |Q_i^{(j)}(t, \varepsilon)| &\leq C\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}}, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{0, 2}, \\ |Q_3^{(j)}(t, \varepsilon)| &\leq C + \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}}, \quad j = \overline{0, 2}, \\ |P^{(j)}(t, \varepsilon)| &\leq \left(C + \frac{C}{\varepsilon^{j-1}} e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}} \right) \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)|, \quad j = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда из формулы (13) с помощью (17) и оценок (19) получаем требуемые оценки (18).

Из теоремы следует, что

$$y^{(j)}(0, \varepsilon) = O(1), \quad j = 0, 1; \quad y''(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это означает, что решение исходной краевой задачи в точке $t = 0$ обладает явлением начального скачка первого порядка.

4 Результаты и обсуждение

Ранее аналогичные краевые задачи, но без малых возмущений в краевых условиях, были рассмотрены в [22] для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и в [23] - для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. В этих работах были выявлены идентичные асимптотические свойства решений: имело место явление начального скачка нулевого порядка второй степени. Однако, вырожденная задача, к решению которой стремится решение исходной сингулярно возмущенной краевой задачи, в случае интегро-дифференциального уравнения, в отличие от дифференциального случая, содержала дополнительный член, называемый начальным скачком интегрального члена. Тогда может создаться впечатление, что в интегро-дифференциальных уравнениях в силу наличия интегральных членов всегда появляется начальный скачок интегрального члена. Наша работа показывает, что это не всегда так. По сравнению с работой [23] в нашем случае явление начального скачка решения также имеется, но наблюдается явление начального скачка первого порядка, т.е. начальный скачок имеет не само решение, а его первая производная, что является первым отличием от вышеуказанной работы. Во-вторых, начальный скачок интегрального члена в нашем случае отсутствует. Тем самым, построение вырожденной задачи, которая является предельной для исходной возмущенной интегро-дифференциальной задачи, достаточно упрощается.

5 Заключение

В работе исследована краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при двух старших производных при условии, когда корни «дополнительного характеристического уравнения» отрицательны. Получены аналитическая формула и асимптотические оценки решения рассматриваемой краевой задачи. Установлено асимптотическое поведение решений краевой задачи в окрестности граничных точек. Оказалось, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ все компоненты решения в точке $t = 1$ являются ограниченными, а в левой точке $t = 0$ вторая производная становится бесконечно большой порядка $O(1/\varepsilon)$. Это означает, что в точке $t = 0$ имеет место явление начального скачка первого порядка. Полученные в работе результаты позволяют сделать следующий вывод: в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных задачах не всегда имеет место явления начальных скачков интегралов. Это зависит от порядка начального скачка решения или его производных, порядка производных, входящих под знаком интеграла, а также связано с видом дополнительных условий, которыми определено решение исходной возмущенной задачи. Полученные результаты позволяют определить вырожденную задачу, к решению которой стремится решение исходной сингулярно возмущенной задачи, а также построить равномерное асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с любой степенью точности по малому параметру.

6 Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке грантов №AP05132573 «Клеточные нейронные сети с непрерывным и дискретным временем и сингулярными возмущениями» Комитета по науке МОН РК (2018-2020) и № AP05132587 «Краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с непрерывным и кусочно-постоянным аргументом» (2018-2020).

Список литературы

- [1] Вишик М.И., Люстерник Л.А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. - 1960. - Т. 132, № 6. - С. 1242 -1245.
- [2] К.А. Касымов Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего малый параметр // УМН, 1962, № 17. вып. 5, С. 187-188.
- [3] K.A. Kassymov, D. Nurgabyl "Asymptotic Estimates of Solution of a Singularly Perturbed Boundary Value Problem with an Initial Jump for Linear Differential Equations" *Differential Equations*, Vol. 40, No.5, (2004): 641-651.
- [4] Daуylbayev M.K. and Atakhan N. The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations // *Miskolc Math. Notes*, Hungary, Vol. 16, no 2, (2015): 747-761.
- [5] Vasil'eva, A., Butuzov, V., and Kalachev, L. (1995), "The boundary function method for singular perturbation problems", *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia: SIAM, 1995.
- [6] A.H. Nayfeh "Perturbation Methods", USA: Wiley-Interscience, 2000.
- [7] O'Malley, Robert E. "Historical Developments in Singular Perturbations", Switzerland: Springer International Publishing, 2014.
- [8] Mudvanhu, B and O'Malley, R. E., Jr. "A new renormalization method for the asymptotic solution of weakly nonlinear vector systems", *SIAM J. Appl. Math.* vol. 63, no. 2, (2002): 373-397.
- [9] Kevorkian, J. and Cole, J.D. "Multiple Scale and Singular Perturbations Method", New York: Springer, 1996.
- [10] Sanders, J. A. and Verhulst, F. and Murdock, J. "Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems", 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [11] Verhulst, F. "Methods and applications of singular perturbations: Boundary layers and multiple timescale dynamics", *Texts in Applied Mathematics*, New York: Springer, 2005.
- [12] D.R. Smith "Singular-Perturbation Theory an Introduction with Applications", Cambridge: University Press, 2009.
- [13] White, R. B. "Asymptotic Analysis of Differential Equations", London: Imperial College Press, 2005.
- [14] A.M. Wazwaz "A comparative study on a singular perturbation problem with two singular boundary points", *Applied Mathematics and Computation*, 99 (1999), pp. 179-193
- [15] S. Johnson "Singular Perturbation Theory, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering", New York: Springer, 2005.
- [16] Skinner L.A. "Singular Perturbation Theory", New York: Springer, 2011.
- [17] M. Kumar, H.K. Mishra, P. Singh "A boundary value approach for singularly perturbed boundary value problems", *Advances in Engineering Software*, vol. 40, no 4, (2009): 298-304.
- [18] W.T. Van "Horssen On integrating vectors and multiple scales for singularly perturbed ordinary differential equations", *Nonlinear Analysis*, 46, (2001): 19-43.
- [19] H. Hu, Z.G. Xiong "Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods", *Journal of Sound and Vibration*, 278, (2004): 437-444.

- [20] F. Lakrad, M. Belhaq "Periodic solutions of strongly nonlinear oscillators by the multiple scales method", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258, no 4 (2002): 677-700.
- [21] Дауылбаев М.К., Жумартов М.А., Конисбаева К.Т. Сингулярлы ауытқыған интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін интегралды шеттік есеп шешімінің асимптотикалық жинақтылығы // Вестник КазНПУ имени Абая, серия физ-мат., 2015. №1. С 18-24.
- [22] Шарипова Ж.У. Асимптотика решений краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // автореферат канд. дис. по спец. 01.01.02 - дифференциальные уравнения и математическая физика. Алматы, 1996.
- [23] Assiya Zhumanazarova and Young Im Cho "Asymptotic Convergence of the Solution of a Singularly Perturbed Integro-Differential Boundary Value Problem", *Mathematics* 8 (2), 213 (2020). doi: 10.3390/math8020213.

References

- [1] Vishik M.I., Lyusternik L.A. "O nachal'nom skachke dlya nelinejnyh differencial'nyh uravnenij, sodержashchih malyj parameter [On the initial jump for nonlinear differential equations containing a small parameter]", *Doklady Akademii Nauk SSSR*. vol. 132, no 6 (1960): 1242-1245.
- [2] K.A. Kasymov. "Ob asimptotike resheniya zadachi Koshi s bol'shimi nachal'nymi usloviyami dlya nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya, sodержashchego malyj parameter [On the asymptotic behavior of the solution of the Cauchy problem with large initial conditions for a nonlinear ordinary differential equation containing a small parameter]", *Uspekhi matematicheskikh nauk*. vol. 5, no 17 (1962): 187-188.
- [3] K.A. Kassymov, D. Nurgabyly "Asymptotic Estimates of Solution of a Singularly Perturbed Boundary Value Problem with an Initial Jump for Linear Differential Equations", *Differential Equations*. vol. 40, no 5 (2004): 641-651.
- [4] Dauylbayev M.K. and Atakhan N. "The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations", *Miskolc Math. Notes, Hungary*. vol. 16, no 2 (2015): 747-761.
- [5] Vasil'eva, A., Butuzov, V., and Kalachev, L. "The boundary function method for singular perturbation problems, SIAM Studies in Applied Mathematics", Philadelphia: SIAM, 1995.
- [6] A.H. Nayfeh "Perturbation Methods", USA: Wiley-Interscience, 2000.
- [7] O'Malley, Robert E. "Historical Developments in Singular Perturbations", Switzerland: Springer International Publishing, 2014.
- [8] Mudvanhu, B and O'Malley, R. E., Jr. "A new renormalization method for the asymptotic solution of weakly nonlinear vector systems", *SIAM J. Appl. Math.* vol. 63, no 2 (2002): 373-397.
- [9] Kevorkian, J. and Cole, J.D. "Multiple Scale and Singular Perturbations Method", New York: Springer, 1996.
- [10] Sanders, J. A. and Verhulst, F. and Murdock, J. "Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems", 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [11] Verhulst, F. "Methods and applications of singular perturbations: Boundary layers and multiple timescale dynamics", *Texts in Applied Mathematics*. New York: Springer, 2005.
- [12] D.R. Smith "Singular-Perturbation Theory an Introduction with Applications", Cambridge: University Press, 2009.
- [13] White, R. B. "Asymptotic Analysis of Differential Equations", London: Imperial College Press, 2005.
- [14] A.M. Wazwaz "A comparative study on a singular perturbation problem with two singular boundary points", *Applied Mathematics and Computation*, 99 (1999): 179-193.
- [15] S. Johnson "Singular Perturbation Theory, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering", New York: Springer, (2005).
- [16] Skinner L.A. "Singular Perturbation Theory." New York: Springer, 2011.
- [17] M. Kumar, H.K. Mishra, P. Singh "A boundary value approach for singularly perturbed boundary value problems", *Advances in Engineering Software*, vol. 40, no 4 (2009): 298-304.

-
- [18] W.T. Van "Horssen On integrating vectors and multiple scales for singularly perturbed ordinary differential equations", *Nonlinear Analysis*, 46, (2001): 19-43.
- [19] H. Hu, Z.G. Xiong "Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods", *Journal of Sound and Vibration*, 278, (2004): 437-444.
- [20] F. Lakrad, M. Belhaq "Periodic solutions of strongly nonlinear oscillators by the multiple scales method", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258, no 4 (2002): 677-700.
- [21] Dauylbayev M.K., Zhumartov M.A., Konisbaeva K.T. "Cingylyaply ayytkyran integpaldy diffepencialdyк теңдеylep үшин integpaldy shettik есеп sheshiminiң acimptotikalық zhinaқтыlyғы [Asymptotic convergence of the solution of the integral boundary value problem for singularly perturbed integral differential equations]", *Vestnik KazNPU imeni Abaya, cepiya fiz-mat.* no 1 (2015): 18-24.
- [22] Kasymov K.A., Sharipova Zh.U. "Asimptoticheskie ochenki resheniya kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennyh linejnyh differencial'nyh uravnenij tret'ego poryadka [Asymptotic estimates of the solution of the boundary value problem for singularly perturbed linear differential equations of the third order]", *Vestnik KazGU im. S.M. Kirova. Ser. mat.* no 1, (1993): 146-150.
- [23] Assiya Zhumanazarova and Young Im Cho (2020) "Asymptotic Convergence of the Solution of a Singularly Perturbed Integro-Differential Boundary Value Problem", *Mathematics*, 8 (2), 213(2020); doi:10.3390/math8020213.

IRSTI 27.29.19, 27.31.15

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.05>**Zh.A. Kaiyrbek** 

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

e-mail: kaiyrbek.zhalgas@gmail.com

IDENTIFICATION OF THE COEFFICIENTS OF EQUATION FOR A VIBRATING ROD IN ACOUSTIC DIAGNOSTICS

The work is devoted to the study solving some inverse problem of identifying the coefficients of Sturm-Liouville operator. Inverse problems in vibration are concerned with constructing a vibrating system of a particular type, e.g., a string, a rod, that has specified properties. During the operation of the technical design, the dynamic characteristics can be changed by changing the boundary connection. Often these compounds are not directly accessible and their states can be judged from indirect information. In acoustic diagnostics, often the available information is the natural frequencies. Thus, by the set of natural frequencies it is necessary to estimate the state of the boundary connections. In this work an algorithm for constructive determination of coefficients of Sturm-Liouville operator is given. A straightforward solution of the inverse problem for Sturm-Liouville equation in a rod is presented.

Key words: Sturm-Liouville equation, inverse problems, natural frequency, identification of the coefficients, acoustic diagnostics, longitudinal vibrations, oscillator equation.

Ж.А. Қайырбек

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

e-mail: kaiyrbek.zhalgas@gmail.com

Акустикалық диагностикада білікшенің тербеліс теңдеуінің коэффициенттерін идентификациялау

Бұл жұмыс Штурм-Лиувилль операторының коэффициенттерін анықтаудың кері есептерін шешуге арналған. Тербеліске байланысты кері мәселелер белгілі бір типтегі тербелмелі жүйенің құрылысына байланысты, мысалы, белгілі бір қасиеттері бар стержень, білікше. Техникалық жобаны пайдалану кезінде динамикалық сипаттамаларды қосылыстың шекарасын өзгерту арқылы өзгертуге болады. Көбінесе бұл қосылыстарға тікелей қол жетімді емес, олардың жағдайына жанама ақпарат арқылы баға беруге болады. Акустикалық диагностикада жиі кездесетін ақпарат бар. Осылайша, табиғи жиіліктер жиынтығына сәйкес шекаралық байланыстардың жағдайын бағалау қажет. Бұл жұмыста Штурм-Лиувилль операторының коэффициенттерін конструктивті түрде анықтау алгоритмі ұсынылған. Білікшедегі Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін кері есептің шешімі ұсынылған.

Түйін сөздер: Штурм-Лиувилль теңдеуі, кері есептер, табиғи жиілік, коэффициентті идентификациялау, акустикалық диагностика, бойлық тербелістер, осциллятор теңдеуі.

Ж.А. Кайырбек

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: kaiyrbek.zhalgas@gmail.com

Идентификация коэффициентов уравнения колебаний струны в акустической диагностике

Работа посвящена исследованию решения обратной задачи идентификации коэффициентов оператора Штурма-Лиувилля. Обратные задачи, связанные с колебанием, связаны с конструированием колебательной системы определенного типа, например, струны, стержня, который имеет определенные свойства. Во время работы технического проекта, динамические характеристики могут быть изменены путем изменения границы соединения. Часто эти соединения не являются непосредственно доступными, и их состояния можно судить по косвенной информации. В акустической диагностике часто доступной информацией являются собственные частоты. Таким образом, по множеству собственных частот необходимо оценить состояние граничных связей. В данной работе приведен алгоритм конструктивного определения коэффициентов оператора Штурма-Лиувилля. Представлено решение обратной задачи для уравнения Штурма-Лиувилля для струны.

Ключевые слова: Уравнение Штурма-Лиувилля, обратные задачи, собственная частота, идентификация коэффициентов, акустическая диагностика, продольные колебания, уравнение осциллятора.

1 Introduction

The Sturm-Liouville equation can appear in three different forms. The one

$$(S(x)u'(x))' + \rho^2 S(x)u(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

occurs in the longitudinal or torsional vibrations of a straight rod of cross section $S(x)$.

The work is devoted to the study solving some inverse problem of identifying the coefficients of Sturm-Liouville operator. Inverse problems in vibration are concerned with constructing a vibrating system of a particular type, e.g., a string, a rod, that has specified properties. During the operation of the technical design, the dynamic characteristics can be changed by changing the boundary connection. Often these compounds are not directly accessible and their states can be judged from indirect information. In acoustic diagnostics, often the available information is the natural frequencies. Thus, by the set of natural frequencies it is necessary to estimate the state of the boundary connections. It turned out that the problems of technical diagnosis from the mathematical point of view are the so-called inverse problems of mathematical physics. The question of identifying the coefficients of the of Sturm-Liouville equation has been studied widely in the works [1–3]. Different approach to the reconstruction from the spectra is discussed in the works [4–9]. In this work an algorithm for constructive determination of coefficients of Sturm-Liouville operator is presented.

We consider the oscillator equation of vibrating rod (1) with boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u'(l) = 0, \quad (2)$$

where l is the length of the rod. We denote by $A(x)$ the cross section area of a rod. And by $u(x)$ we denote the longitudinal deviation of the point x . And parameter ρ describes the natural frequency of the rod:

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_n = \frac{\pi n}{2l}.$$

We study the longitudinal vibration of uniform rod that has three parts. We identify the cross section area of the any part of the rod by the given natural frequency of the rod. In this case, each parts of $S(x)$ satisfy the following conditions

$$S(x) = S_1 \quad \text{for} \quad 0 < x < \frac{l}{3},$$

$$S(x) = S_2 \quad \text{for} \quad \frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3},$$

$$S(x) = S_3 \quad \text{for} \quad \frac{2l}{3} < x < l.$$

Hence, we write the vibrating rod equation for each part of the rod as follows

$$S_1 u''(x) + \rho^2 S_1 u(x) = 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < \frac{l}{3},$$

$$S_2 u''(x) + \rho^2 S_2 u(x) = 0 \quad \text{for} \quad \frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3},$$

$$S_3 u''(x) + \rho^2 S_3 u(x) = 0 \quad \text{for} \quad \frac{2l}{3} < x < l,$$

Lemma 1 *The equation (1) is equivalent to the system of equation*

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{i\rho}{S(x)} \cdot v(x), \\ v'(x) = i\rho S(x) \cdot u(x). \end{cases} \quad (3)$$

Proof. We introduce the following notations

$$\begin{cases} S_1 u'(x) = i\rho v(x) \\ i\rho v'(x) = i\rho S_1 u(x) \end{cases} \quad \text{for} \quad 0 < x < \frac{l}{3}$$

$$\begin{cases} S_2 u'(x) = i\rho v(x) \\ i\rho v'(x) = i\rho S_2 u(x) \end{cases} \quad \text{for} \quad \frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3}$$

$$\begin{cases} S_3 u'(x) = i\rho v(x) \\ i\rho v'(x) = i\rho S_3 u(x) \end{cases} \quad \text{for} \quad \frac{2l}{3} < x < l.$$

We will rewrite the last system of equations in the form (3) or

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} u(x) \\ \frac{d}{dx} v(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i\rho}{S(x)} \\ -i\rho S(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}$$

The proof of the lemma is complete.

Lemma 2 *The following boundary value problem*

$$\begin{aligned} U'(x) &= i\rho U(x), \\ V'(x) &= -i\rho V(x) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U(0) &= 0, & U(l) &= 0, \\ V(0) &= 0, & V(l) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

on the interval $0 < x < l$ is equivalent to the problem (1), (2).

Proof. The function $S(x)u'(x)$ will be continuous on the interval $[0, l]$, since there exists $(S(x)u'(x))'$. Consequently, the function $v(x) = \frac{S(x)u'(x)}{i\rho}$ is continuous on the interval $[0, l]$.

Therefore the conditions $v\left(\frac{l}{3} - 0\right) = v\left(\frac{l}{3} + 0\right)$, $v\left(\frac{2l}{3} - 0\right) = v\left(\frac{2l}{3} + 0\right)$ hold.

The function $u(x)$ will be continuous on the interval $[0, l]$, since there exists $u'(x)$. Therefore the conditions $u\left(\frac{l}{3} - 0\right) = u\left(\frac{l}{3} + 0\right)$, $u\left(\frac{2l}{3} - 0\right) = u\left(\frac{2l}{3} + 0\right)$ hold.

Now we introduce the following substitutions $\mu^2 = S(x)$. Then

$$\begin{cases} u(x) = \frac{2U(x)}{\mu} + \frac{2V(x)}{\mu}, \\ v(x) = 2\mu U(x) - 2\mu V(x). \end{cases}$$

The following equalities

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2} \left(\mu_1 u(x) + \frac{1}{\mu_1} v(x) \right), \\ V(x) &= \frac{1}{2} \left(\mu_1 u(x) - \frac{1}{\mu_1} v(x) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

hold for $0 < x < \frac{l}{3}$. Hence for part $0 < x < \frac{l}{3}$ we have the following equations

$$\begin{aligned} U'(x) &= \frac{1}{2} \left(\mu_1 u'(x) + \frac{1}{\mu_1} v'(x) \right) = \frac{1}{2} \left(\mu_1 \frac{i\rho v(x)}{S_1} + \frac{1}{\mu_1} i\rho S_1 u(x) \right), \\ V'(x) &= \frac{1}{2} \left(\mu_1 u'(x) - \frac{1}{\mu_1} v'(x) \right) = \frac{1}{2} \left(\mu_1 \frac{i\rho v(x)}{S_1} - \frac{1}{\mu_1} i\rho S_1 u(x) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Since $S_1 = \mu_1^2$, then the last system of equations can be represented as follows

$$\begin{aligned} U'(x) &= \frac{1}{2} i\rho \left(\frac{v(x)}{\mu_1} + \mu_1 u(x) \right) = i\rho U, \\ V'(x) &= \frac{1}{2} i\rho \left(\frac{v(x)}{\mu_1} - \mu_1 u(x) \right) = -i\rho V. \end{aligned}$$

By arguing as in the previous computations, for $\frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3}$ we have the following equations

$$U'(x) = \frac{1}{2} i\rho \left(\frac{v(x)}{\mu_2} + \mu_2 u(x) \right) = i\rho U,$$

$$V'(x) = \frac{1}{2}i\rho \left(\frac{v(x)}{\mu_2} - \mu_2 u(x) \right) = -i\rho V,$$

where $\mu_2 = \sqrt{S_2}$.

In a similar way for $\frac{2l}{3} < x < l$ we have the following equations

$$U'(x) = \frac{1}{2}i\rho \left(\frac{v(x)}{\mu_3} + \mu_3 u(x) \right) = i\rho U,$$

$$V'(x) = \frac{1}{2}i\rho \left(\frac{v(x)}{\mu_3} - \mu_3 u(x) \right) = -i\rho V,$$

where $\mu_3 = \sqrt{S_3}$.

Noted above equalities imply that the system of equations (4) is equivalent to equation (1) for all parts of the interval $0 < x < l$. Thus, equation (1) is equivalent to the system of equation (4). And if we substitute the boundary conditions (2) into the equations (3), (6), (7), then conditions (2) can be rewritten in the following form

$$\begin{aligned} U(0) = 0, \quad U(l) = 0, \\ V(0) = 0, \quad V(l) = 0. \end{aligned}$$

Thus, the proof of the lemma is complete.

In the case then the interval $[0, l]$ is divided into three parts, we state the connection between two boundary values

$$\begin{bmatrix} U(+0) \\ V(+0) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} U(l-0) \\ V(l-0) \end{bmatrix}$$

of the interval $[0, l]$ in the following theorem.

Theorem 1 For the boundary value problem (4), (5) the following equality

$$\begin{bmatrix} U(+0) \\ V(+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\rho\frac{l}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\rho\frac{l}{3}} \end{bmatrix} \gamma_1 \begin{bmatrix} e^{-i\rho\frac{l}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\rho\frac{l}{3}} \end{bmatrix} \gamma_2 \begin{bmatrix} e^{-i\rho\frac{l}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\rho\frac{l}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(l-0) \\ V(l-0) \end{bmatrix} \quad (8)$$

holds.

Proof. As shown in the proof of the lemma 2 that

$$\begin{cases} U\left(\frac{l}{3} - 0\right) = U(+0)e^{i\rho\frac{l}{3}}, \\ V\left(\frac{l}{3} - 0\right) = V(+0)e^{i\rho\frac{l}{3}}. \end{cases}$$

Consequently, it follows that

$$\begin{bmatrix} U\left(\frac{l}{3} - 0\right) \\ V\left(\frac{l}{3} - 0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\rho\frac{l}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\rho\frac{l}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(+0) \\ V(+0) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Equality (9) implies that

$$\begin{bmatrix} U(+0) \\ V(+0) \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} e^{-i\rho\frac{l}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\rho\frac{l}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U\left(\frac{l}{3}-0\right) \\ V\left(\frac{l}{3}-0\right) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

In a similar way we write

$$\begin{cases} U\left(\frac{2l}{3}-0\right) = U\left(\frac{l}{3}+0\right) e^{i\rho\frac{l}{3}}, \\ V\left(\frac{2l}{3}-0\right) = V\left(\frac{l}{3}+0\right) e^{-i\rho\frac{l}{3}}. \end{cases}$$

The last system of equation we rewrite as follows

$$\begin{bmatrix} U\left(\frac{2l}{3}-0\right) \\ V\left(\frac{2l}{3}-0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\rho\frac{l}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\rho\frac{l}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U\left(\frac{l}{3}+0\right) \\ V\left(\frac{l}{3}+0\right) \end{bmatrix}.$$

By arguing in a similar way for we write

$$\begin{cases} U(l-0) = U\left(\frac{2l}{3}+0\right) e^{i\rho\frac{l}{3}}, \\ V(l-0) = V\left(\frac{2l}{3}+0\right) e^{-i\rho l} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} U(l-0) \\ V(l-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\rho\frac{l}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\rho\frac{l}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U\left(\frac{2l}{3}+0\right) \\ V\left(\frac{2l}{3}+0\right) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

On the other hand the following equalities

$$\begin{bmatrix} U(+0) \\ V(+0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1 & \frac{1}{\mu_1} \\ \mu_1 & -\frac{1}{\mu_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(+0) \\ v(+0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} U\left(\frac{l}{3}+0\right) \\ V\left(\frac{l}{3}+0\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 & \frac{1}{\mu_2} \\ \mu_2 & -\frac{1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\left(\frac{l}{3}+0\right) \\ v\left(\frac{l}{3}+0\right) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} U\left(\frac{2l}{3}+0\right) \\ V\left(\frac{2l}{3}+0\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_3 & \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_3 & -\frac{1}{\mu_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\left(\frac{2l}{3}+0\right) \\ v\left(\frac{2l}{3}+0\right) \end{bmatrix} \quad (14)$$

hold. Therefore, by applying the proof of the lemma 2, we obtain

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U\left(\frac{l}{3}-0\right) \\ V\left(\frac{l}{3}-0\right) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1 & \frac{1}{\mu_1} \\ \mu_1 & -\frac{1}{\mu_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\left(\frac{l}{3}-0\right) \\ v\left(\frac{l}{3}-0\right) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1 & \frac{1}{\mu_1} \\ \mu_1 & -\frac{1}{\mu_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\left(\frac{l}{3}+0\right) \\ v\left(\frac{l}{3}+0\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U\left(\frac{2l}{3}-0\right) \\ V\left(\frac{2l}{3}-0\right) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 & \frac{1}{\mu_2} \\ \mu_2 & -\frac{1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\left(\frac{2l}{3}-0\right) \\ v\left(\frac{2l}{3}-0\right) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 & \frac{1}{\mu_2} \\ \mu_2 & -\frac{1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\left(\frac{2l}{3}+0\right) \\ v\left(\frac{2l}{3}+0\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} U(l-0) \\ V(l-0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_3 & \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_3 & -\frac{1}{\mu_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(l+0) \\ v(l+0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_3 & \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_3 & -\frac{1}{\mu_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(l-0) \\ v(l-0) \end{bmatrix}.$$

By substituting equality (13) into (15), we have

$$\begin{bmatrix} U\left(\frac{l}{3}-0\right) \\ V\left(\frac{l}{3}-0\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1 & \frac{1}{\mu_1} \\ \mu_1 & -\frac{1}{\mu_1} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 & \frac{1}{\mu_2} \\ \mu_2 & -\frac{1}{\mu_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} U\left(\frac{l}{3}+0\right) \\ V\left(\frac{l}{3}+0\right) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

here

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1 & \frac{1}{\mu_1} \\ \mu_1 & -\frac{1}{\mu_1} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 & \frac{1}{\mu_2} \\ \mu_2 & -\frac{1}{\mu_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \gamma_1 = \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}.$$

Also by substituting equality (14) into (16), we obtain

$$\begin{bmatrix} U\left(\frac{2l}{3}-0\right) \\ V\left(\frac{2l}{3}-0\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 & \frac{1}{\mu_2} \\ \mu_2 & -\frac{1}{\mu_2} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_3 & \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_3 & -\frac{1}{\mu_3} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} U\left(\frac{2l}{3}+0\right) \\ V\left(\frac{2l}{3}+0\right) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

where

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 & \frac{1}{\mu_2} \\ \mu_2 & -\frac{1}{\mu_2} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_3 & \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_3 & -\frac{1}{\mu_3} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \gamma_2 = \frac{S_3 - S_2}{S_3 + S_2}.$$

Substitutions of (17) and (18) into (10) gives formula (8).

The proof of the theorem is complete.

By taking into account the fact $\exp(i\rho\Delta) = z^{\frac{1}{2}}$, formula (8) implies the polynomial with respect to z . By virtue of $\gamma_j = \frac{S_j - S_{j-1}}{S_j + S_{j-1}}$, formula $\rho = \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z}$ implies that the unknown cross section areas A_1, A_2, A_3 .

2 Acknowledgments

This publication is supported by a grant of the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP05131292 and No. AP05131845).

References

- [1] Hald O.H., "The inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potentials", *Acta Math.* 141 (1978), 263–291. doi:10.1007/BF02545749. <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485890008>
- [2] Hald O.H., "The inverse Sturm-Liouville equation and the Rayleigh-Ritz method", 32 (294) (1978): 687-705.
- [3] Hochstadt H., "The inverse Sturm-Liouville problem", *Communic. on Pure and Appl. Math.* Vol. XXVI (1973): 715-729.
- [4] Ahtyamov A.M., Ayupova A.R., "Diagnostirovanie dvuh mass, sosredotochennyih na balke [Diagnosing two masses focused on a beam]", *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* (2010): 42-44.
- [5] Vatulyan A.O., *Obratnyie zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in the mechanics of a deformable solid] (M.: Fizmatlit, 2007): 224.
- [6] Gladwell G.M.L., *Inverse problem in vibration* Second Edition. (New York: Kluwer Academic Publishers, 2004): 456.
- [7] Gladwell G.M.L. and Movahhedy M., "Reconstruction of a massspring system from spectral data I: Theory", 1(84) (1995): 179-189.
- [8] Golub G.H. and Boley D., "Inverse eigenvalue problems for band matrices", in *G.A. Watson (Ed.) Numerical Analysis Heidelberg, New York: Springer Verlag* 70 (1977): 23-31.
- [9] Kayyirbek Zh.A., Nurmetova A.T., "Vossozdanie kusochno-odnorodnogo sterzhnya po sobstvennyim chastotam [Reconstruction piecewise homogeneous rod of eigenfrequencies]", *Traditsionnaya mezhdunarodnaya nauchnaya aprelyskaya konferentsiya, Almaty* (2018): 55-56.
- [10] Sobolev S.L., *Vvedenie v teoriyu kubaturnyih formul* [Introduction to the theory of cubature formulas] (M.: Nauka, 1974): 808.

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Механика

Механика

Mechanics

MPНТИ 27.39.21

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.06>**Б.Е. Кангужин¹** , **Е.Н. Ақанбай^{1*}** , **Ж. Мәдібайұлы²**¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан²Институт механики и машиноведения имени академика

У.А. Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: akanbay.yerkebulan@gmail.com

СОЧЛЕНЕНИЕ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ КИРХГОФА В УЗЛАХ

В работе приведены различные модели упругих тонких искривленных стержней и их соединений. Такие стержни и их соединения важны в прикладных исследованиях и имеют давнюю историю. Тем не менее вопросы математического исследования в описании процедуры перехода от многомерной модели к одномерной исследованы не в полной мере. В данной работе приводятся результаты, когда тонкий объект растягивается в одномерный объект. При этом возникают различные трудности. К примеру, более детального рассмотрения требует проблема описания условий склеивания в вершинах предельного графа. Оказывается, что вид конкретных условий склеиваний зависит от различных физических предпосылок. С другой стороны, однозначная разрешимость в тех или иных функциональных пространствах зависит от выбранных условий склеивания. Первая часть работы описывает различные категории условий склеивания. Во второй части работы будут приведены различные примеры конструкции из упругих тонких искривленных стержней и их соединений, когда предельная задача дополняется теми или иными условиями склеивания. В заключении второй части приведён численный расчет собственных частот свободных колебаний соединений упругих тонких искривленных стержней.

Ключевые слова: Упругий тонкий искривленный стержень, криволинейный стержень, условия Кирхгофа в узлах, теория упругости, уравнение теории упругости, модель соединения стержней.

Б.Е. Кангужин¹, **Е.Н. Ақанбай^{1*}**, **Ж. Мәдібайұлы²**¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан²Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан*e-mail: akanbay.yerkebulan@gmail.com

Біріккен серпімді жіңішке стержендер мен оларға сәйкес жалпылама Кирхгоф шарттары

Бұл жұмыста жұқа серпімді иілген стержендер мен олардың біріктірілімдерінің әртүрлі үлгілері келтірілген. Мұндай стержендер мен олардың байланыстарының қолданбалы зерттеулер үшін маңызы жоғары және олардың тарихы бар. Дегенмен, көпөлшемді модельден бірөлшемді модельге өту процедурасын сипаттауда математикалық зерттеулердің сұрақтары толыққанды қарастырылмаған. Бұл жұмыста жұқа нысанның бір өлшемді нысанға тартылғандағы зерттеулер нәтижелері көрсетілген. Бұл жағдайда әртүрлі қиындықтар туындайды. Мысалы, шектелген мойынның ұштарындағы байланыс шарттарын сипаттау проблемасын толығырақ қарастыру қажет. Белгілі бір байланыс жағдайларының түрі әртүрлі физикалық үй-жайларға байланысты екені белгілі болды. Екінші жағынан, әр түрлі функционалды кеңістіктердегі ерекше шешілу қабілеттілігі таңдалған байланыс шарттарына байланысты.

Жұмыстың бірінші бөлімі байланыс шарттарының әртүрлі категорияларын сипаттайды. Екінші бөлімде шектік есептің белгілі бір байланыс шарттарымен толықтырылғандағы жұқа серпімді иілген өзектер мен олардың байланыстарының контрукцияларының әртүрлі мысалдары келтірілген. Қорытындыда серпімді жұқа иілген өзектердің түйіспелерінің бос тербелістерінің табиғи жиілігін сандық есептеуі келтірілген.

Түйін сөздер: серпімді жұқа иілген өзек, қисық өзек, түйіндердегі Кирхгоф шарттары, серпімділік теориясы, серпімділік теориясының теңдеуі, өзектердің қосылу моделі.

В.Е. Kanguzhin¹, Е.Н. Akanbay^{1*}, Zh. Madibaiuly²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Mechanics and Mechanical Engineering

named after Academician U.A. Zholdasbekov, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: akanbay.yerkebulan@gmail.com

Jointing of thin elastic rods and generalized Kirchhoff conditions at nodes

The paper presents various models of thin elastic curved rods and their joints. Such rods and their connections are important in applied research and have a long history. Nevertheless, the questions of mathematical research in the description of the procedure of transition from a multidimensional model to a one-dimensional one are not fully investigated. This paper presents the results when a thin object is pulled together into a one-dimensional object. In this case, various difficulties arise. For example, a more detailed consideration is required by the problem of describing the gluing conditions at the vertices of the limiting neck. It turns out that the type of specific bonding conditions depends on various physical premises. On the other hand, the unique solvability in various functional spaces depends on the selected gluing conditions. The first part of the paper describes various categories of bonding conditions. In the second part of the work, various examples of the construction of thin elastic curved rods and their joints will be given, when the ultimate task is supplemented by certain gluing conditions. In the conclusion of the second part, a numerical calculation of the natural frequencies of free vibrations of the joints of elastic thin curved rods is presented.

Key words: elastic curved thin rod, curved rod, Kirchhoff's condition in knots, theory of elasticity, equation of elasticity theory, model of rod connection.

1 Введение

1.1 Модель искривлённого стержня

На плоскости R^2 с координатами (y_1, y_2) рассмотрим плоскую фигуру ω с гладкой границей $\partial\omega$.

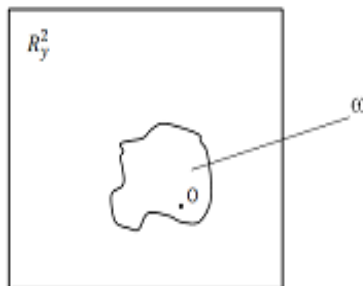


Рисунок 1 – Фиксированное сечение стержня

Причем считаем, что точки $(0, 0) \in \omega$. Пусть параметр $z \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$. Предположим, что при изменении параметра z плоская фигура $\omega(z)$ меняется непрерывно вместе с z , причем $\omega(0) = \omega$, $\omega(z) = \{(y_1(z), y_2(z)) : (y_1, y_2) \in \omega(z) \rightarrow R^2\}$. Тогда под криволинейным стержнем S будем понимать тело в трехмерном пространстве $S = \{(y_1, y_2, z) : (y_1, y_2) \in \omega(z), -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}\}$.

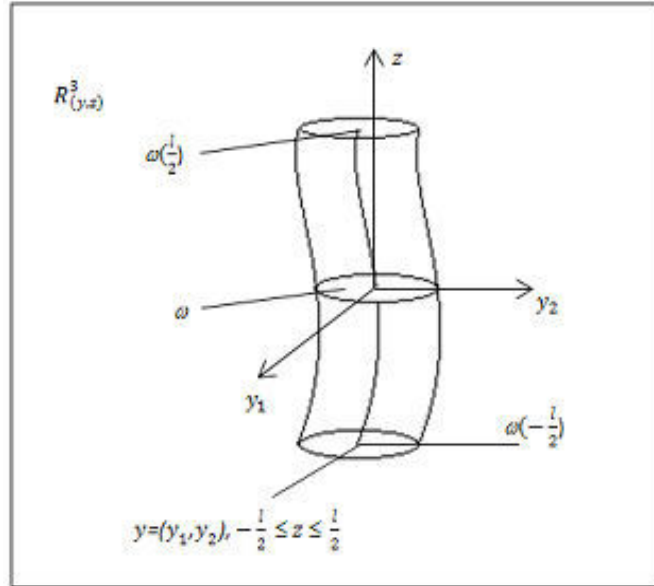


Рисунок 2 – Криволинейный стержень

При этом размеры сечения $\omega(z)$ во много раз меньше длины l . Поэтому речь идет о криволинейном стержне. Торцы стержня представляют множества

$$\left\{ \left(y_1 \left(\frac{l}{2} \right), y_2 \left(\frac{l}{2} \right), \frac{l}{2} \right) : \left(y_1 \left(\frac{l}{2} \right), y_2 \left(\frac{l}{2} \right) \right) \in \omega \left(\frac{l}{2} \right) \right\},$$

$$\left\{ \left(y_1 \left(-\frac{l}{2} \right), y_2 \left(-\frac{l}{2} \right), -\frac{l}{2} \right) : \left(y_1 \left(-\frac{l}{2} \right), y_2 \left(-\frac{l}{2} \right) \right) \in \omega \left(-\frac{l}{2} \right) \right\}.$$

Для определения оси криволинейного стержня надо детально расписать отображение $\omega \xrightarrow{P(z)} \omega(z)$. Пусть $(y_1, y_2) \in \omega$ и её образ при фиксированном z обозначим через $(P_1(z, y_1, y_2); P_2(z, y_1, y_2)) \in \omega(z)$. Тогда ось криволинейного стержня определяется так

$$\{(P_1(z, 0, 0); P_2(z, 0, 0), z) : (P_1(z), P_2(z)) \in \omega(z)\},$$

иначе говоря, ось составлена из P -образов точки $(0, 0) \in \omega$. В дальнейшем точки оси сечения $\omega(z)$ будем обозначать $(P_1(z), P_2(z))$.

1.2 Модель тонкого искривленного стержня

В дальнейшем необходимо чтобы геометрические характеристики горизонтальных сечений неограниченно убывали к нулю (то есть, сечения стягивались в точку). Для моделирования таких ситуаций введем малый параметр h . Удобно рассматривать сжатие сечений в h раз, то есть

$$\omega_h(z) = \left\{ (y_1, y_2) : \left(\frac{y_1 - P_1(z)}{h}, \frac{y_2 - P_2(z)}{h} \right) \in \omega(z) \right\}.$$

Если $h \rightarrow +0$, то $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_h(z) = \{(P_1(z), P_2(z), z)\}$. Таким образом, моделируется ситуация, когда тонкий искривленный стержень стремится к своей оси.

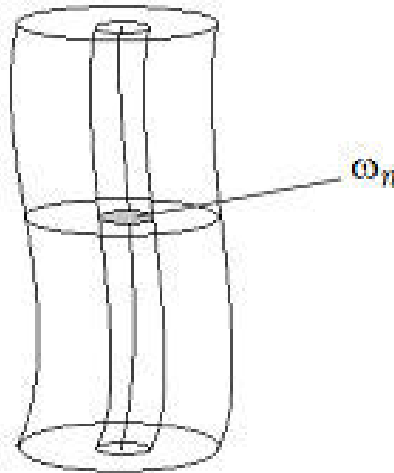


Рисунок 3 – Показано утончение стержня, когда $h \rightarrow 0$

1.3 Линейная задача теории упругости

Считаем, что задан упругий тонкий искривленный стержень. Пусть вектор смещений

$$u = \begin{pmatrix} u_1(y_1, y_2, z) \\ u_2(y_1, y_2, z) \\ u_3(y_1, y_2, z) \end{pmatrix},$$

где u_1 – смещение в направлении оси Oy_1 , u_2 – смещение в направлении оси Oy_2 , u_3 – смещение в направлении оси Oz .

Стандартным образом введем столбец деформаций и столбец напряжений

$$\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{32} \\ \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{31} \\ \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad \sigma(u) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}.$$

Согласно закону Гука имеем

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u),$$

где

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_j}{x_k} + \frac{u_k}{x_j} \right).$$

A – симметрическая положительно определенная матрица-функция размерности 6×6 , составленная из упругих модулей материала.

Здесь для удобства выбрано $\sqrt{2}\alpha = 1$.

Для дальнейших целей удобно ввести матрицу

$$D(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \\ 0 & \alpha\xi_3 & \alpha\xi_2 \\ \alpha\xi_3 & 0 & \alpha\xi_1 \\ \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а также градиент

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right),$$

где $x = (y_1, y_2, z)$.

Тогда уравнения теории упругости в матричной форме примут вид [1, 2]:

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(-\nabla_x)^t A(h, x) D(\nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in S(h), \quad (1)$$

$$B(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(\nu(h, x))^t A(h, x) D(\nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \gamma(h), \quad (2)$$

$$u(h, x) = 0, \quad x \in \omega_h \left(\pm \frac{l}{2} \right). \quad (3)$$

В уравнениях (1) учтено, что на стержень $S(h)$ действуют объемные силы $f = (f_1, f_2, f_3)^T$. На $\gamma(h)$ боковой поверхности стержня $S(h)$ приложены усилия $g = (g_1, g_2, g_3)^T$. Торцы $\omega_h \left(\pm \frac{l}{2} \right)$ стержня $S(h)$ жестко закреплены, так как выполняются условия (3).

Отметим также, что в соотношении (2) фигурирует $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$ внешние единичные нормали к боковой поверхности стержня $S(h)$, причем

$$\nu(h, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2\nu_0^2}} (\nu_1(\eta, z); \nu_2(\eta, z); h\nu_0(\eta, z))^T. \quad (4)$$

Здесь введены η медленные переменные, принадлежащие $\omega(z)$. Иначе говоря,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \eta_1 = \frac{y_1}{h}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{h}, \quad (y_1, y_2) \in \omega_h(z).$$

Вектор $(\nu_1(\eta, z), \nu_2(\eta, z))$ – вектор внешней нормали к границе $\partial\omega(z)$. Величина ν_0 – отражает изменчивость сечения.

1.4 Предельная система уравнений

В данном пункте приведены предельные уравнения, которые следуют из (1), (2), (3) при $h \rightarrow 0$. Таким образом, трехмерная задача теории упругости сведена к одномерной задаче.

Рассмотрим изотропный тонкий искривленный стержень. Пусть λ и μ представляют коэффициенты Ламе. Матрица жесткости выбрана в виде

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Обозначим неизвестный $w_1(z)$ прогиб в направлении оси Oy_1 . Точно также $w_2(z)$ прогиб в направлении оси Oy_2 , $w_3(z)$ продольное растяжение вдоль оси Oz , $\alpha w_4(z)$ – угол закручивания вокруг этой оси. В дальнейшем $\vec{F}_3(z)$ – продольная сила, а $\alpha^{-1}\vec{F}_4(z)$ – крутящий момент приложенные к стержню. Перерезывающие силы $\vec{f}_i(z)|\omega(z)|$ при $i = 1, 2$, где $|\omega(z)|$ – площадь сечения. Изгибающие моменты при $i = 1, 2$ в нашем случае имеют вид:

$$\left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}.$$

При $i = 1, 2$ обозначим $\vec{F}_i = \vec{f}_i(z)|\omega(z)| + \frac{d}{dz} \left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}$. Также нам необходимы следующие величины:

$$\begin{aligned} d(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_1 d\eta_1 d\eta_2, & l(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_2 d\eta_1 d\eta_2, \\ a(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_1^2 d\eta_1 d\eta_2, & b(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_1 \eta_2 d\eta_1 d\eta_2, \\ c(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_2^2 d\eta_1 d\eta_2, & h(z) &= \iint_{\omega(z)} (\eta_1^2 + \eta_2^2) d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned}$$

Тогда предельная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dz^2} \left(\mu(z) \left(a(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + b(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - d(z) \frac{dw_3(z)}{dz} \right) \right) = F_1(z), \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(\mu(z) \left(b(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + c(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - l(z) \frac{dw_3(z)}{dz} \right) \right) = F_2(z), \\ -\frac{d}{dz} \left(\mu(z) \left(-d(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} - l(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} + \frac{dw_3(z)}{dz} \right) \right) = F_3(z), \\ -\frac{d}{dz} \left(\mu(z) \left(\alpha^4 h(z) \frac{dw_4}{dz} \right) \right) = F_4(z), \end{cases} \quad (5)$$

которая дополняется условиями Дирихле на концах интервала $\left(-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}\right)$

$$w_q \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad q = 1, 2, 3, 4, \quad \frac{d}{dz} w_1 \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dz} w_2 \left(\pm \frac{l}{2} \right). \quad (6)$$

Система предельных уравнений (5) отличается от ранее известных тем, что

- (i) на прогибы $w_1(z)$ в направлении оси Oy_1 влияют $w_2(z), w_3(z)$;
- (ii) на прогибы $w_2(z)$ в направлении оси Oy_2 влияют $w_1(z), w_3(z)$;
- (iii) на прогибы $w_3(z)$ в направлении оси Oz влияют $w_1(z), w_2(z)$;

В известных до их пор работах движения при дополнительных физических предположениях обычно разделяются. Как видно, из системы (5) прогибы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям четвертого порядка, а продольное растяжение – дифференциальному уравнению второго порядка. Процесс нахождения угла закручивания $w_4(z)$ не зависит от прогибов $w_1(z), w_2(z)$ и $w_3(z)$ и может определяться автономно. Отметим, что коэффициенты дифференциальных уравнений из (5) зависят от изменения сечений $\omega(z)$ вдоль оси Oz . На этот факт также мало внимания уделялось.

2 Материал и методы

2.1 Модель соединения стержней

В данном пункте рассмотрим соединение (объединение) нескольких тонких стержней. Обозначим $\Omega(h)$ объединение тонких стержней $S_1(h), S_2(h), \dots, S_N(h)$ и малых узлов $Q_1(h), Q_2(h), \dots, Q_M(h)$. При $h \rightarrow +0$ область $\Omega(h)$ стягивается к одномерному множеству G , называемому скелетом конструкции. Скелет G состоит из прямолинейных отрезков e_1, e_2, \dots, e_N , соединяющие пары точек из $V = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$. Множество G , состоящее из дуг e_1, e_2, \dots, e_N и вершин P_1, P_2, \dots, P_M , иногда называют геометрическим графом. Сохраняем обозначения пункта 1, добавляя новый индекс, означающий номер стержня. К примеру, n -ый стержень в новых обозначениях примет вид

$$S_n(h) = \left\{ x = (y^n, z^n) : z^n \in \left(-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2} \right), h^{-1} y^n \in \omega^n(z^n) \right\}.$$

Прототип узла $Q_m(h) = \{x \in R^3 : h^{-1}(x - P_m) \in Q_m(1)\}$. Множество $Q_m(1), \omega^n$ считаем фиксированными, не зависящими от параметра h .

2.2 Уравнения теории упругости

Считаем, что $\Omega(h)$ – упругое анизотропное неоднородное тело. Матричные уравнения равновесия в системе координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ имеет вид

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in \Omega(h). \quad (7)$$

Оператор L введен при написании уравнения (1). Вектор $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ – вектор смещений, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – объемные силы. Теперь добавим краевые условия к (7). Пусть $\Gamma(h) = \Gamma_{m_1}(h) \cup \dots \cup \Gamma_{m_j}(h)$, та часть границы $\partial Q_m(h)$ которая закреплена. При этом считаем, что $j \geq 1$. Закрепление не может отсутствовать. Вектор смещений u удовлетворяет условию Дирихле.

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma(h). \quad (8)$$

На не заземленной поверхности $\partial\Omega(h) \setminus \Gamma(h)$ тела $\Omega(h)$ задается краевое условие Неймана

$$B(h, x, \nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \partial\Omega(h) \setminus \overline{\Gamma(h)}. \quad (9)$$

Оператор B определен в п. 1.3.

2.3 Предельная система уравнений в случае соединения стержней

В данном пункте будет осуществлен предельный переход при $h \rightarrow 0$. В результате система (7) переходит к уравнениям на дугах графа G , а граничные условия (8) в некоторые граничные условия в граничных вершинах графа G . Более сложный вопрос: какие условия выполняются в неграничных вершинах предельного графа? Такие условия иногда называют условиями сопряжения или склеивания. Как правило, условия склеивания представляют так называемые условия Кирхгофа. Для дифференциальных уравнений второго порядка это означает, во-первых, непрерывность в каждой неграничной вершине. Во-вторых, сохранение баланса потока. Детали об условиях склеивания можно найти в работах [3, 4]. Как замечено в работах [5–8], не всегда в пределе возникают условия Кирхгофа. Когда скорость усадки объема окрестностей стыка ниже, чем площадь поперечных сечений направляющих, может возникнуть более сложное энергетически зависимое или разделяющее условие.

В работах С.А. Назарова и А.С. Слуцкого [9, 10] отмечено, что в предельной задаче появляются алгебраические неизвестные и некоторые из уравнений проецируются на подпространства функций с нулевым средним. Кроме того, на некоторых узлах возникают нелокальные условия склеивания.

Итак, согласно предыдущим рассуждениям на e_N каждой дуге предельного графа G выполняется система дифференциальных уравнений при $n = 1, \dots, N$ и $z_n \left(-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2} \right)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dz_n^2} \left(\mu_n(z_n) \left(a_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + b_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - d_n(z_n) \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_1^n(z_n), \\ \frac{d^2}{dz_n^2} \left(\mu_n(z_n) \left(b_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + c_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_2^n(z_n), \\ -\frac{d}{dz_n} \left(\mu_n(z_n) \left(-d_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} + \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_3^n(z_n), \\ -\frac{d}{dz_n} \left(\mu_n(z_n) \left(\alpha^4 h_n(z_n) \frac{dw_4^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_4^n(z_n). \end{array} \right. \quad (10)$$

На тех концах стержней, где действуют условия жесткого закрепления, записываются условия Дирихле:

$$\begin{aligned} w_q^k(z_k) &= 0, \quad q = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{d}{dz_k} w_1^n(z_k) &= 0, \quad \frac{d}{dz_k} w_2^n(z_k) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где z_k либо $(+\frac{l_n}{2})$, либо $(-\frac{l_n}{2})$.

Здесь k соответствует номерам тех стержней, концы которых закреплены согласно (8).

Теперь остается записать условия склеивания в неграничных вершинах. Положение каждой вершины P_m при $m = 1, 2, \dots, M$ характеризуется девятью числами

$$(b_1^m, b_2^m, b_3^m, b_4^m, b_5^m, b_6^m,) \text{ или } (\beta_1^m, \beta_2^m, \beta_3^m) \quad (12)$$

В частности, b_3^m и β_3^m называем смещениями узла в направлении оси z_m .

Стержни, кроме прогибов w_1^n, w_2^n , продольных растяжений w_3^n и углов закручивания w_4^n , будем также характеризировать постоянным смещением a_3^n, α_3^n в направлении оси z^n .

Когда некоторый $S(h)$ стержень соединяется с узлом $Q_m(h)$, то разрешаются следующие виды соединений:

- жесткое закрепление;
- малоподвижный узел;
- узел, подвижный в одном фиксированном направлении;
- узел, неподвижный в одном фиксированном направлении;
- подвижный узел.

В зависимости от категории закрепления в вершине соединения выполняются некоторые известные алгебраические соотношения между наборами (12) и

$$\begin{aligned} w_1^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), w_2^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), w_3^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), w_4^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), \\ \frac{d}{dz_n} w_1^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), \frac{d}{dz_n} w_2^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), a_3^n, \alpha_3^n. \end{aligned} \quad (13)$$

Когда же в узле $Q_m(h)$ встречаются несколько стержней $S_n(h)$, $n \in B(m) \subset \{1, 2, \dots, N\}$ также возникают алгебраические соотношения между наборами (12) и (13) при $nB(m)$. Чтобы не нагромождать статью излишними деталями скажем, что их количество и соответствующие алгебраические соотношения выбраны так, что системы (10), (11) с учетом указанных алгебраических соотношений имеет решение.

В отдельной работе приведем различные примеры соединений стержней, когда возникают различные категорий закреплений. Также вычислим собственные частоты свободных колебаний таких конструкций.

3 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (гранты № AP05131292 и № AP05131845).

Список литературы

- [1] Светлицкий В.А. Механика стержней // М.: Высшая школа. – 1987. – Т. 1, 2.
- [2] Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971.
- [3] Kanguzhin B., Zhapsarbaeva L., Madibaiuly Zh. Lagrange formula for differential operators self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree // Eurasian Math. J. – 2019. – 10:1. – Pp. 16-29.
- [4] Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коньркулжаева М.Н. Самосопряженные сужения максимального оператора на графе // Уфимск. матем. Журн. – 2017. – 9:4. – С. 36-44
- [5] Kuchment P. Graph models of wave propagation in this structures // Waves in Random Media. – 2002. – Vol. 12. – Pp 1-24.
- [6] Kuchment P., Zeng H. Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – 258. – Pp. 671-700.
- [7] Exner P., Post O. Convergence of spectra of graph – like thin manifolds // J. Geom. Phys. – 2005. – 54. – Pp. 77-115.
- [8] Post O. Spectral Analysis on Graph-like Spaces. – Lecture Notes in Mathematics 2039. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. – P. 431.
- [9] Назаров С.А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, №5. – С. 1-92.
- [10] Назаров С.А., Слуцкий А.С. Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование. // Известия РАН. сер. матем. – 2000. – Т. 64, №3. – С. 97-131.
- [11] Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: Small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. – 2007. – 273, No. 2. – Pp. 533-559.

References

- [1] Svetlickii V.A., *Mehanika stержnei* [Rod mechanics] V. 1, 2. (M.: Vyschayz shkola, 1987).
- [2] Leckhnickii S.G., *Kruchenie anizotropnyh I neodnorodnyh stержnei* [Torsion of anisotropic and heterogeneous rods] (M.: Nauka, 1971).
- [3] Kanguzhin B., Zhapsarbaeva L., Madibaiuly Zh., "Lagrange formula for differential operators self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree", *Eurasian Math. J.*, 10:1 (2019): 16-29.

-
- [4] Zhapsarbaeva L.K., Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N., "Self-adjoint restrictions of maximal operator on graph", *Ufa. Math. J.*, 9:4 (2017): 35-43.
- [5] Kuchment P., "Graph models of wave propagation in this structures", *Waves in Random Media*, Vol. 12 (2002): 1-24.
- [6] Kuchment P., Zeng H., "Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph", *J. Math. Anal. Appl.* 258 (2001): 671-700.
- [7] Exner P., Post O., "Convergence of spectra of graph - like thin manifolds", *J. Geom. Phys.* 54 (2005): 77-115.
- [8] Post O., *Spectral Analysis on Graph-like Spaces* (Lecture Notes in Mathematics 2039. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012): 431.
- [9] Nazarov S.A., "Obshaya schema osredneniya samosopryazhennykh ellipticheskikh system v mnogomernykh oblostyah, v tom chisel [General scheme of averaging of self-adjoint elliptic systems in multidimensional areas, including thin ones]", *Algebra i analiz* V. 7, No 5 (1995): 1-92.
- [10] Nazarov S.A., Sluckii A.S., "Odnomernye uravneniya deformacii tonkih slaboiskrivlennykh sterzhnei. Asimptoticheskii analiz I obosnovanie. [One-dimensional equations of deformation of thin slightly curved rods. Asymptotic analysis and justification]", *Izvestiya RAN. ser. matem.* V. 64, No 3 (2000): 97-131.
- [11] Molchanov S., Vainberg B., "Scattering solutions in networks of thin fibers: Small diameter asymptotics", *Comm. Math. Phys.* 273, No. 2 (2007): 533-559.

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Информатика

Информатика

Computer
Science

MPHTI 89.29.65; 47.49.31

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.07>

М.М. Молдабеков^{1*}, Д.И. Еремин¹, Д.Г. Жаксыгулова^{1,2},
С. Трепашко¹, Р.А. Калиева¹

¹ДТОО "Институт космической техники и технологий", г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: m.moldabekov@mail.ru

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВОЙ ИНФРАСТРУКТУРОЙ РЕФЕРЕНЦНЫХ GNSS СТАНЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЛАЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

В настоящее время наблюдается повсеместное активное применение глобальных навигационных спутниковых систем для определения местоположения различных объектов с метровой точностью. Однако известен ряд отраслей, требующих высокую точность навигации: геодезия, картография, строительство, архитектура, прецизионное земледелие, управление беспилотными летательными аппаратами. В целях повышения точности навигационных определений применяется дифференциальный режим определений. Для реализации дифференциального режима необходима сетевая инфраструктура референчных GNSS станций и программное обеспечение, способное выполнять как сбор, хранение и отображение данных, так и расчет дифференциальных поправок. На территории Казахстана существует система референчных GNSS станций, реализующая свои функции на оборудовании и программном обеспечении компании Leica Geosystems AG, которая наряду с компанией Trimble Navigation занимают основную долю рынка спутникового навигационного оборудования и соответствующего программного обеспечения. Однако в целях обеспечения внешней независимости в сфере высокоточной навигации актуальной является задача создания отечественной системы управления сетевой инфраструктурой референчных GNSS станций, в частности, разработка программного обеспечения. В связи с этим, настоящая работа посвящена разработке специализированного программного обеспечения системы управления сетевой инфраструктурой референчных GNSS станций с использованием облачных технологий.

Ключевые слова: программное обеспечение, сеть референчных станций, навигационная система, система управления, GNSS станции.

М.М. Молдабеков^{1*}, Д.И. Еремин¹, Д.Г. Жаксыгулова^{1,2}, С. Трепашко¹, Р.А. Калиева¹

¹"Ғарыштық техника және технологиялар институты" ЕЖШС, Алматы қ., Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: m.moldabekov@mail.ru

Бүлттық технологияларды пайдалана отырып, референцті GNSS станциялардың желілік инфрақұрылымдарды басқарудың жүйесінің бағдарламалық жасақтамасы

Қазіргі уақытта ғаламдық навигациялық спутниктік жүйелер әртүрлі нысандардың орналасқан жерін анықтау үшін метрлік дәлдікте кеңінен қолданылады. Алайда навигациялық дәлдікті қажет ететін бірқатар салалар бар, геодезия, картография, құрылыс, сәулет, прецизиялық егін шаруашылығы, ұшқышсыз автоматты түрде басқарылатын ұшақтар. Навигациялық анықтамалардың дәлдігін арттыру үшін анықтамалардың диффе-

ренциалды режимі қолданылады. Дифференциалды режимді іске асыру үшін деректерді жинауға, сақтауға және көрсетуге, сондай-ақ дифференциалды түзетулерді есептеуге қабілетті GNSS референцті станциялардың желілік инфрақұрылымы және бағдарламалық жасақтамасы қажет. Қазақстанда Trimble Navigation-мен қатар спутниктік навигациялық жабдықтың және соған сәйкес бағдарламалық жасақтаманың негізгі үлесін алатын Leica Geosystems AG жабдықтары мен бағдарламалық жасақтамаларында өз функцияларын жүзеге асыратын GNSS референцті станциялар жүйесі бар. Бірақ жоғары дәлдіктегі навигация саласында сыртқы тәуелсіздікті қамтамасыз ету мақсатында отандық GNSS референцті станциялардың желілік инфрақұрылымын басқару жүйесін құру, атап айтқанда бағдарламалық жасақтаманы құру өзекті тапсырма болып табылады. Осыған байланысты бұл жұмыс бұлттық технологияларды пайдалана отырып, референцті GNSS станциялардың желілік инфрақұрылымдарын басқару жүйесіне арналған арнайы бағдарламалық жасақтаманы жасауға арналған.

Түйін сөздер: бағдарламалық жасақтама, референцті станциялар жүйесі, навигация жүйесі, басқару жүйесі, GNSS станциялар.

M.M. Moldabekov^{1*}, D.I. Yeryomin¹, D.G. Zhaxygulova^{1,2}, S. Trepashko¹, R.A. Kaliyeva¹

¹AALR "Institute of space technique and technology", Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: m.moldabekov@mail.ru

Software system for managing the network infrastructure of reference GNSS stations using cloud technologies

Nowadays, global navigation satellite systems are widely used to determine the location of various objects with an accuracy of meters. However, there are a number of industries that require high navigation accuracy, for example, for a satellite geodetic network, which is a coordinate-time basis. In order to improve the accuracy of navigation definitions, a differential mode of definitions is used. To implement the differential mode, the network infrastructure of GNSS reference stations and software, capable of both collecting, storing and displaying data, and calculating differential corrections, are required. In Kazakhstan, there is a system of reference GNSS stations that implements its functions on the equipment and software of Leica Geosystems AG, which, along with Trimble Navigation, occupy the main market share of satellite navigation equipment and related software. However, in order to ensure external independence in the field of high-precision navigation, the urgent task is to create a domestic system for managing the network infrastructure of GNSS reference stations, in particular, software development. In this regard, the present work is devoted to the development of specialized software for a system for managing the network infrastructure of reference GNSS stations using cloud technologies.

Key words: software, network of reference stations, navigation system, management system, GNSS stations.

1 Введение

Преимущества спутниковой навигации, такие как глобальный охват территории Земли, высокая оперативность местоопределения в реальном времени, приемлемая (метровая) точность автономных измерений и высокая (сантиметровая, миллиметровая) точность фазовых относительных измерений координат реализованы с помощью глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) GPS и ГЛОНАСС и функциональных дополнений ГНСС. Исторически первые две ГНСС GPS и ГЛОНАСС, разработанные для военных целей нашли широкое применение во многих отраслях экономики и для персональной навигации. Широкое использование спутниковой навигации привело к разворачиванию новых глобальных Galileo (Европейский союз), Beidou (Китай) и региональных (QZSS, IRNSS) спутниковых навигационных систем, а также наземных и

спутниковых функциональных дополнений ГНСС. В частности, ГНСС способствовали созданию опорных спутниковых геодезических сетей ГНСС станций.

Спутниковая геодезическая координатная основа и высокоточная спутниковая навигация с погрешностью единицы сантиметров и миллиметров реализуется с применением функциональных дополнений ГНСС в виде сети референчных ГНСС станций и метода дифференциальной коррекции. В настоящее время сети референчных ГНСС станций развернуты во всех развитых и развивающихся странах мира. Существенную долю мирового рынка спутникового навигационного оборудования, специализированного и программно-математического обеспечения (СПО и ПМО) занимают компании Trimble Navigation (США) [1] и Leica Geosystems AG [2] (корпорация Hexagon Geospatial, Швейцария), меньшую долю рынка обеспечивают компании Topcon-Sokkia [3] и Javad [4]. Также среди стран, разрабатывающих и производящих собственное оборудование, СПО и ПМО для спутниковой навигации можно выделить две страны – Россию и Китай, которые развивают собственные космические группировки ГЛОНАСС и Beidou, соответственно. Таким образом, практически все сети референчных ГНСС станций в мире оснащены оборудованием и программным обеспечением СПО и ПМО мировых монополистов ГНСС отрасли и всецело от них зависимы. В частности, система высокоточной спутниковой навигации Республики Казахстан реализована на оборудовании и ПМО компании Leica Geosystems AG. Такая вынужденная зависимость от зарубежных поставщиков допустима для гражданских применений, но категорически неприемлема в сфере обороны и национальной безопасности. Также неприемлема внешняя зависимость государственной спутниковой геодезической сети, которая обеспечивает национальную координатно-временную основу для всех отраслей экономики. В связи с этим, актуальной задачей является разработка отечественной программной системы управления сетью референчных ГНСС станций.

Цель данной работы – разработка специализированного программного обеспечения системы управления сетью референчных GNSS станций с использованием облачных технологий.

2 Обзор литературы

Автоматизированные системы управления сетью референчных GNSS станций предназначены для выполнения функций контроля состояния и управления режимами работы сети референчных GNSS станций, информационных функций (сбор и обработку данных, предоставление информации пользователям) и вспомогательных функций (контроль целостности, хранение и резервное копирование данных, очистка устаревших данных, регистрация и контроль доступа пользователей и потребителей).

В настоящее время множество работ посвящается вопросам разработки и совершенствования системы управления сетью референчных GNSS станций. Основным результатом современных решений в области спутниковой навигации является достижение высокоточного позиционирования, которое является критически важным в сфере геодезии и строительства [5, 6]. Например, в работе [7] сеть референчных GNSS станций используется при разработке спутниковой геодезической сети с субмиллиметровой точностью позиционирования, а в работе [8] поставлен эксперимент по ее применению с целью мониторинга 64-этажного небоскреба в Чили. Разработке

сети референчных GNSS станций также посвящена работа [9], где показана особая важность высокоточной геодезической сети в области железнодорожной инфраструктуры. Кроме того, сеть референчных GNSS станций также интересна с точки зрения позиционирования автомобиля [10]. Активно ведутся работы в направлении высокоточного позиционирования с применением дешевого оборудования в условиях плотно населенного города [11]. В работе [12] предлагается использовать систему управления сетью референчных GNSS станций в области горнодобывающей промышленности для мониторинга оседания рудника большой площади в шахте. Области применения сети базовых станций GNSS настолько разнообразны, что встречаются работы, в которых сеть референчных GNSS станций используется с целью наблюдения высокочастотного смещения океанической приливной нагрузки [13] и для отслеживания вибрации ледников [14]. Таким образом, можно сделать вывод, что разработка системы управления сетью референчных GNSS станций с использованием облачных технологий является актуальной задачей и сама система найдет широкое применение в различных сферах деятельности человека.

Основными компонентами системы управления сетью референчных GNSS станций с использованием облачных технологий являются (далее – Система) [15]:

- сеть референчных ГНСС станций;
- облачная вычислительная система (или центр обработки данных);
- программная система управления сетью ГНСС станций (СПО и ПМО);
- центр управления Системой;
- подсистема передачи данных (каналы связи).

Таким образом, сеть референчных ГНСС станций состоит из совокупности территориально разнесенных ГНСС станций, подключенных к облачной вычислительной системе (или центру обработки данных) посредством каналов связи [16, 17].

Референчная ГНСС станция обеспечивает поиск, прием и регистрацию сигналов ГНСС ГЛОНАСС, GPS на частотах L1, L2 с заданным периодом, конвертирует навигационные данные в унифицированные форматы, измеряет параметры внешней среды (метеорологические данные) и параметры телеметрии о состоянии узлов ГНСС станции, сохраняет измеренные данные во встроенной памяти и передает в облачную вычислительную систему по защищенному каналу связи в режиме реального времени с заданным периодом [18].

Вычислительная система выполняет алгоритмы прикладного программного обеспечения СПО и ПМО, и реализует функции сбора, хранения, обработки и отображения данных, осуществляет операции приема-передачи данных через сетевые интерфейсы. В качестве облачной вычислительной системы используются услуги облачной вычислительной платформы PaaS [19] с возможностью выполнения собственного прикладного программного обеспечения СПО и ПМО, и изменения объема потребляемых облачных ресурсов.

Программное обеспечение системы управления сетью референчных GNSS станций управляет процессом выполнения функций Системы. СПО управляет операциями сбора, контроля целостности данных, контроля телеметрии, архивации и выгрузки данных, отображения данных, управляет режимами работы ГНСС станций, осуществляет контроль доступа пользователей и биллинг оказываемых услуг. ПМО управляет

процессом вычисления навигационных решений по встроенным алгоритмам расчета в подсистеме вычисления навигационных решений.

Центр управления Системой, содержащий унифицированные автоматизированные рабочие места (АРМ) персонала, осуществляет контроль состояния и управление режимами работы сети ГНСС станций и облачной вычислительной системы путем установки (изменения) настроечных параметров СПО и ПМО, и выдачи команд управления на ГНСС станции и в облачную вычислительную систему.

Подсистема передачи данных обеспечивает информационный обмен и реализует следующие функции:

- передача входных данных от сети референчных ГНСС станций (включая ГНСС станции смежных систем) в облачную вычислительную систему;
- обмен данными между облачной вычислительной системой и центром управления Системой;
- установление защищенных соединений и обмен данными Системы с пользователями, внешними системами, и подключение к веб-ресурсам;
- подключение навигационной аппаратуры потребителей к Системе и обмен данными.

3 Материал и методы

Структуру СПО образуют 7 программных модулей:

- подсистема сбора данных;
- подсистема диагностики и контроля качества;
- подсистема хранения данных;
- подсистема выгрузки архивных данных;
- подсистема управления режимами работы ГНСС станций;
- подсистема визуализации данных;
- подсистема контроля доступа и биллинга.

Подсистема сбора данных осуществляет автоматический, непрерывный и параллельный во времени прием «сырых» навигационных, метеорологических данных и сигналов телеметрии от сети референчных ГНСС станций по выделенным каналам связи VPN. Подсистема сбора данных реализована в облачной вычислительной системе техническими средствами сетевого интерфейса (пограничный сетевой маршрутизатор, межсетевой экран) с жесткой адресацией по IP-адресам всех зарегистрированных ГНСС станций сети.

Подсистема диагностики и контроля качества содержит программные модули:

- модуль контроля целостности контролирует наличие потока обновляемых входных данных от сети ГНСС станций, выполняет проверку целостности входных данных;
- модуль контроля телеметрии проверяет сигналы телеметрии ГНСС станций и облачной вычислительной системы на соответствие установленным граничным значениям (интервалам), формирует аварийные сигналы при достижении граничных значений параметров телеметрии, принимает «готовые» аварийные сигналы от подсистем самодиагностики ГНСС станций и облачной вычислительной системы, регистрирует аварийные сигналы в реестре сбоев и отказов и отправляет в центр управления Системой на АРМ персонала.

Подсистема хранения данных (СХД) содержит программные модули и выполняет

следующие операции:

- модуль хранения входных данных архивирует входные данные от сети ГНСС станций, успешно прошедшие проверку целостности;
- модуль хранения выходных данных архивирует рассчитанные навигационные решения (выходные данные Системы);
- модуль хранения информации о сбоях и отказах архивирует все аварийные сигналы в Системе в реестре сбоев и отказов (ведет реестр сбоев и отказов);
- модуль хранения настроек СПО сохраняет текущие значения установочных параметров СПО в реестре настроек СПО, в частности: параметры режимов работы ГНСС станций, параметры передачи данных ГНСС станций, граничные значения параметров телеметрии ГНСС станций, граничные объемы и сроки хранения СХД и др.;
- модуль резервного копирования управляет процессом резервного копирования данных, обновляет и сохраняет резервную копию базы данных (БД) с заданным периодом, автоматически восстанавливает БД из резервной копии после сбоев и отказов в Системе.

Подсистема выгрузки архивных данных обеспечивает поиск навигационных, метеорологических и телеметрических данных в СХД по атрибутам (дата/время, номер/имя ГНСС станции) и выгрузку данных от одной или нескольких ГНСС станций за запрашиваемый период времени. Деление подсистемы выгрузки на модули не предусмотрено.

Подсистема управления режимами работы ГНСС станций выполняет удаленный контроль режимов работы ГНСС станций (по диагностическим сообщениям встроенных средств контроля), управление режимами работы, включение/отключение ГНСС станций или отдельных узлов, перезапуск встроенного ПО, выгрузку данных из встроенной памяти ГНСС станции по запросу СПО за запрашиваемый период времени и передачу их в Систему.

Подсистема визуализации данных обеспечивает отображение на АРМ персонала информации о конфигурации сети, режимов работы и параметров каждой ГНСС станции, отображение реестра сбоев и отказов, справочных и нормативно-технических документов.

Подсистема визуализации данных содержит следующие программные модули:

- модуль визуализации режимов работы ГНСС станций;
- модуль визуализации реестра сбоев, отказов, граничных режимов;
- модуль визуализации телеметрии;
- модуль визуализации справочного руководства.

Подсистема контроля доступа и биллинга осуществляет регистрацию и ведение реестра пользователей, контроль доступа к информации в Системе и разграничение полномочий по управлению Системой в соответствии с правом доступа. Контроль доступа к личному кабинету пользователя организован через процедуру авторизации. Подсистема контроля доступа и биллинга принимает и тарифицирует заявку пользователя, выставляет счет и контролирует оплату, выдает задание для ПМО (на расчет требуемых данных) и открывает доступ к услуге в течение заявленного периода времени или в объеме заявленных услуг.

Для разработки СПО используется предоставляемая платформой Microsoft Azure [20] среда разработки Microsoft Visual Studio 2017 (версия 15), программная платформа

исполнения приложений .NET Framework 4.6/4.7 и .NET Core 2.0 (аналог .NET Framework для Windows/Mac/Linux с открытым исходным кодом). Платформа .NET Framework базируется на общезыковой среде исполнения приложений CLR (Common Language Runtime), которая поддерживает несколько языков программирования, использующих эту среду. Microsoft Visual Studio оптимизирована для разработки кроссплатформенных приложений разных типов и языков программирования, включая веб-приложения и облачные приложения для Microsoft Azure. Среда разработки Microsoft Visual Studio предусматривает работу в автономном или сетевом режиме (в облаке Microsoft Azure).

Среда разработки Microsoft Visual Studio поддерживает следующие языки программирования: C#, Visual Basic .NET, JavaScript .NET, C++/CLI (Managed C++), F# (семейство ML), J#. Учитывая связку среды разработки Microsoft Visual Studio и программной платформы исполнения приложений Microsoft .NET Framework в облачной платформе Microsoft Azure, для разработки программного кода СПО выбран язык программирования C# 6.0/7.0.

Прикладная программа СПО загружается и выполняется в облачной вычислительной платформе Microsoft Azure с использованием сервиса PaaS «платформа как услуга». В ходе исполнения СПО исходный программный код компилируется в промежуточный язык CIL (Common Intermediate Language), который транслируется в машинный код и выполняется при помощи виртуальной машины CLR (Common Language Runtime) на программной платформе исполнения приложений Microsoft .NET Framework.

Провайдер сервиса PaaS обеспечивает исполнение прикладной программы СПО на виртуальных серверах облачной вычислительной платформы с абстрагированием от используемых технических средств и обеспечивает возможность выбора операционной системы. Приоритетная облачная платформа Microsoft Azure и альтернативная Amazon Web Services обеспечивают работу под управлением операционных систем Microsoft Windows Server, Linux, CentOS, Debian. Кроссплатформенность СПО реализуется путем выбора соответствующей программной среды исполнения приложений и дальнейшей трансляции (компиляции) исходного программного кода приложения с языка C# высокого уровня в машинный код. Учитывая привязку языка C# к программной платформе Microsoft Windows [21, 22], целесообразен выбор операционной системы Microsoft Windows Server и среды исполнения приложений Microsoft .NET Framework или Microsoft .NET Core [23].

В каждом программном модуле СПО реализован механизм защиты исходного программного кода от повреждения, несанкционированного изменения кода и настроечных параметров путем контроля целостности исходного кода.

4 Результаты и обсуждение

Разработанное СПО системы управления сетевой инфраструктурой референчных GNSS станций с использованием облачных технологий для обеспечения функций реализует пять алгоритмов, которые рассмотрены ниже.

4.1 Алгоритм сбора входных данных

Операции сбора входных данных от сети референчных ГНСС станций осуществляются автоматически и непрерывно, по мере поступления входных данных. Блок-схема алгоритма операций сбора входных данных от сети ГНСС станций представлена на рисунке 1.

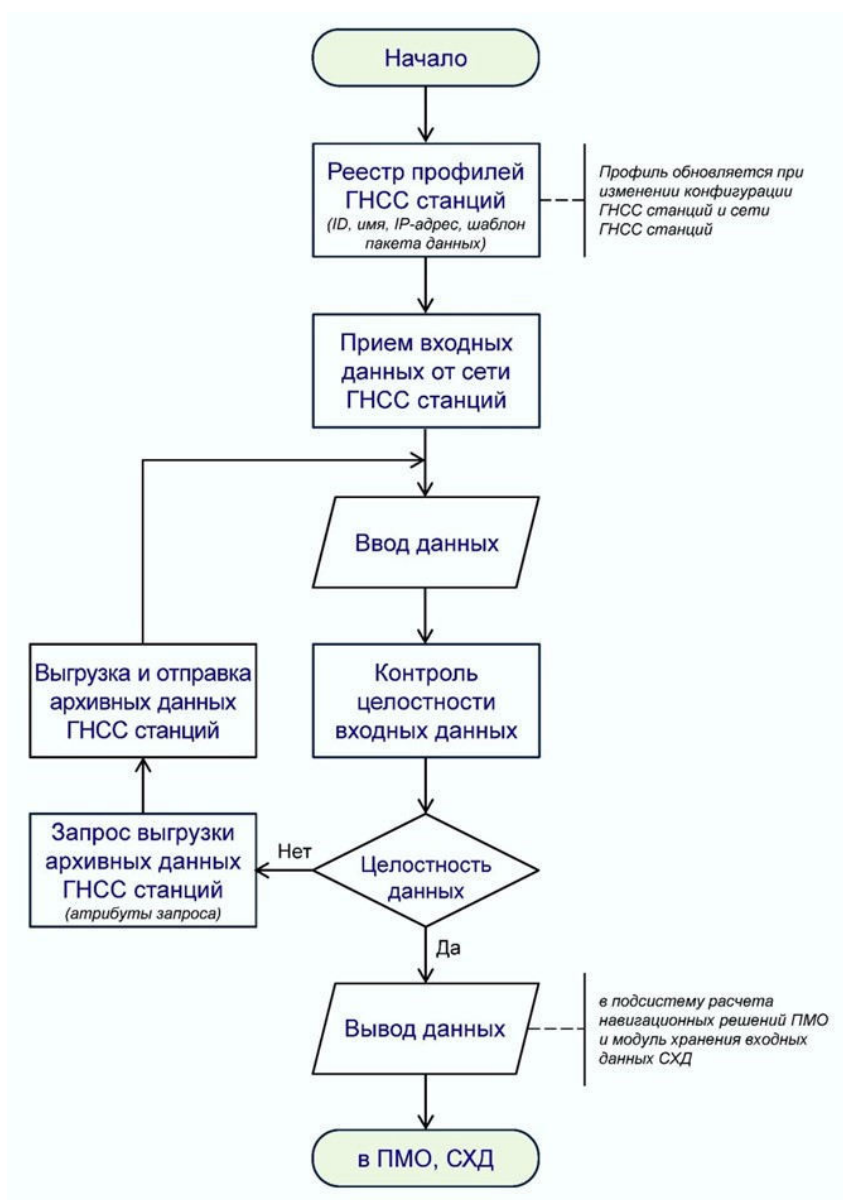


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма сбора входных данных от сети ГНСС станций

Для организации сбора входных данных от сети референчных ГНСС станций формируется реестр профилей всех подключенных к Системе референчных ГНСС станций. Профиль каждой ГНСС станции содержит идентификационные и статистические данные: ID-номер, буквенно-числовое имя станции, IP-адрес станции,

IP-адрес порта облачной платформы (к которому станция подключается), координаты местоположения, регион (город) размещения, тип ГНСС антенны, тип ГНСС приемника, версия встроенного программного обеспечения (определяет характеристики ГНСС приемника), типы узлов (датчиков), которые выдают сигналы телеметрии и шаблон пакета передаваемых данных. Профиль отображает, какой набор данных ГНСС станция передает в облачную вычислительную систему. Шаблон пакета данных раскрывает последовательность размещения данных в пакете, разрядность цифрового кода и принадлежность данных к конкретным датчикам (узлам). Шаблон используется для идентификации полей (ячеек) данных в целях извлечения данных из пакета и архивации в реляционной базе данных. IP-адреса используются для организации выделенных VPN-каналов связи между ГНСС станциями и облачной вычислительной платформой.

Целостность входных данных проверяется методом циклического избыточного кода CRC (Cyclic Redundancy Check). Проверенные входные данные передаются в подсистему вычисления навигационных решений и подсистему хранения данных. Поврежденные входные данные, не подтвердившие целостность, не сохраняются. Извлекаются атрибуты поврежденных пакетов (ID станции, дата/время данных), подается запрос на повторную выгрузку этих данных из устройства хранения ГНСС станции (приемника сигналов ГНСС) и отправку данных в Систему. Целостность повторно полученных данных проверяется аналогично.

4.2 Алгоритм операций хранения данных

Входные данные (после контроля целостности) и выходные данные (от подсистемы вычисления навигационных решений) сохраняются в среднесрочной реляционной БД-SQL, реализованной на скоростных SSD накопителях. Блок-схема алгоритма операций хранения данных Системы представлена на рисунке 2.

Используется сервис БД SQL Azure под управлением системы управления базами данных (СУБД) Microsoft SQL Server. Служебные данные Системы (реестры, журналы событий и транзакций) отнесены к выходным данным Системы и на блок-схеме отдельно не выделены. Резервные копии (реплики) БД-SQL на блок-схеме не показаны, так как являются избыточными данными для технологических целей. Пользователь работает с основной БД-SQL. Сервис БД SQL Azure выполняет резервное копирование (репликацию) и сохраняет резервную копию БД для контроля целостности БД и автоматического восстановления поврежденных данных из резервной копии по умолчанию, без участия пользователя.

Непосредственное управление БД-SQL выполняет СУБД Microsoft SQL Server. СУБД определяет и выделяет необходимый объем памяти для БД-SQL автоматически, переносит «устаревшие» данные в хранилище таблиц Azure (или хранилище BLOB-объектов) через установленное количество дней хранения. Приведенный на блок-схеме контроль возраста и объема данных БД-SQL выполняет подсистема хранения данных СПО в виде запросов и указаний для СУБД. Имеется возможность устанавливать значения граничных параметров БД-SQL (срок хранения T1 и объем V1). Подсистема хранения данных СПО выполняет внешнее управление БД-SQL посредством СУБД Microsoft SQL Server [24, 25], а при снятии внешнего управления СУБД работает

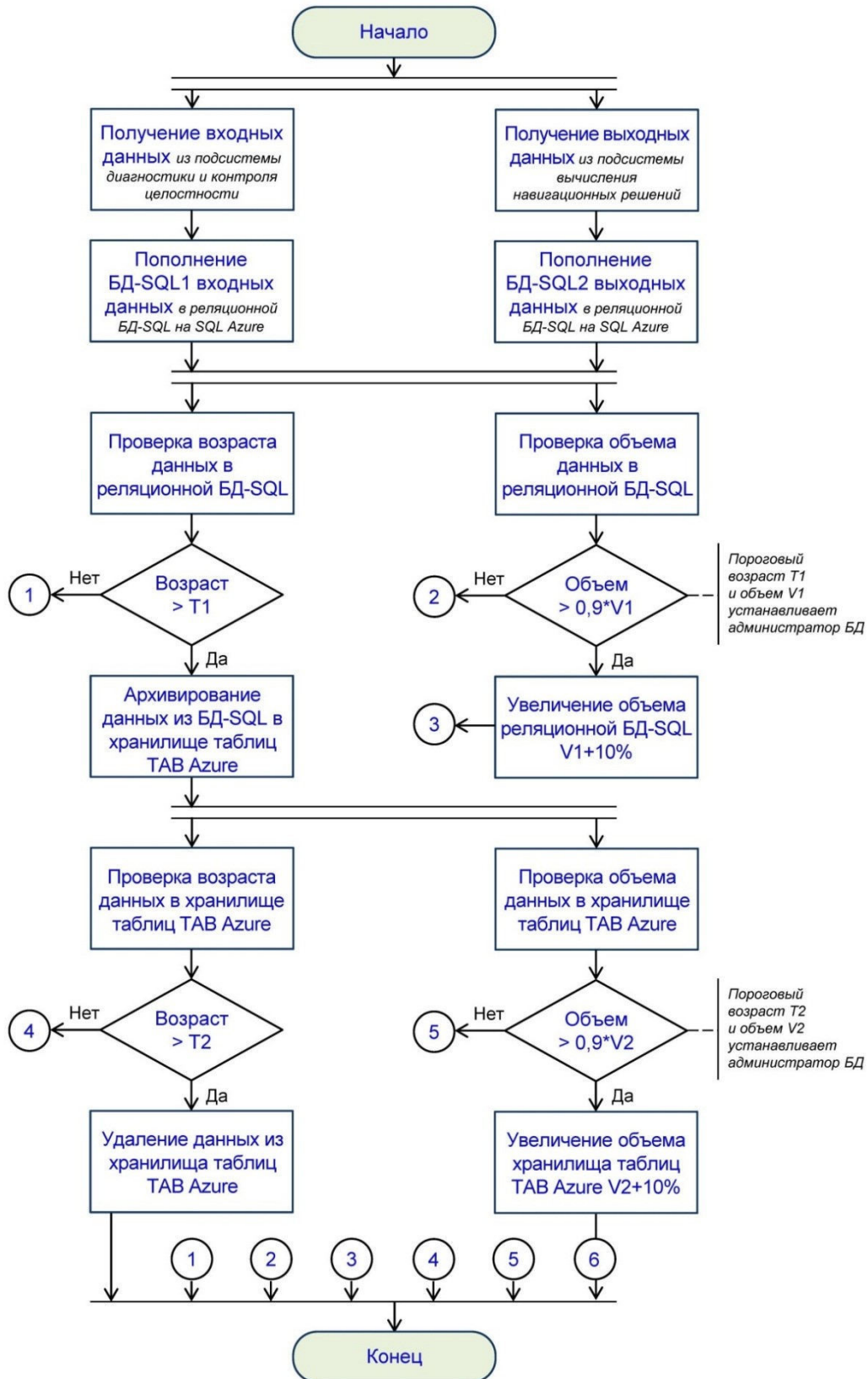


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма операций хранения данных Системы

самостоятельно с параметрами по умолчанию.

Аналогично выполняется проверка возраста и объема данных в хранилище таблиц ТАВ Azure. Устаревшие данные удаляются из хранилища таблиц ТАВ Azure при достижении возраста T2. При достижении объема данных $0,9 \cdot V2$ выделенный объем хранилища ТАВ Azure увеличивается на 10 %.

Операции хранения данных выполняются автоматически и непрерывно по мере поступления данных. Внешнее управление подсистемы хранения данных СПО над СУБД не обязательно, но устанавливает ограничения для СУБД по срокам хранения T1, T2 и объемам V1, V2. Если ограничения не установлены, тогда БД SQL Azure автоматически задает T1 в 35 дней, остальные параметры (срок T2 и объемы V1, V2) не ограничиваются. Пользователь оплачивает услуги хранения данных за фактически использованные ресурсы. Пользователь может ограничивать срок хранения T1, T2 и объем данных V1, V2 именно для снижения суммы оплаты за хранение данных.

4.3 Алгоритм операций выгрузки архивных данных

Текущие входные данные (после контроля целостности) автоматически передаются в подсистему вычисления навигационных решений ПМО, которая вычисляет текущие выходные данные в режиме реального времени – координаты каждой ГНСС станции и RTK решения по всем актуальным заявкам пользователей. Текущие входные и выходные данные сохраняются в среднесрочной реляционной БД-SQL и приобретают статус архивных. СУБД Microsoft SQL Server переносит данные из БД-SQL в хранилище таблиц ТАВ Azure по истечении установленного в подсистеме хранения данных СПО срока хранения T1. Таким образом, подсистема вычисления навигационных решений обрабатывает заявки пользователей по вычислению RTK поправок в режиме реального времени и для этого не требуется выгрузка архивных входных данных из БД-SQL. Обработка заявок пользователей за исторический период времени (постобработка), статистический анализ геометрии сети ГНСС станций (уравнивание сети в постобработке) и решение прикладных задач в постобработке требует выгрузки входных и (или) выходных архивных данных. Блок-схема алгоритма операций выгрузки архивных данных представлена на рисунке 3.

Запрос на выгрузку архивных данных автоматически формирует подсистема контроля доступа и биллинга СПО после корректного заполнения и оплаты заявки пользователя или заявки персонала. При формировании запроса используются шаблоны входных и выходных данных Системы для решения всех типовых расчетных заданий. Шаблоны данных будут сформированы при разработке ПМО.

Запрос на выгрузку данных поступает в СУБД Microsoft SQL Server, которая выполняет поиск данных в среднесрочной реляционной БД-SQL по атрибутам отношений и значениям ключей. При наличии требуемых данных в БД-SQL, СУБД выгружает их адресату. При отсутствии искомых данных в БД-SQL запрос транслируется в долговременное хранилище таблиц ТАВ Azure. При наличии требуемых данных, они выгружаются из ТАВ Azure адресату. При отсутствии требуемых данных формируется ответ об отсутствии запрашиваемых архивных данных. Отрицательный ответ требует проверки корректности запроса и статистики работы ГНСС станций сети (проверка реестра сбоев и отказов).

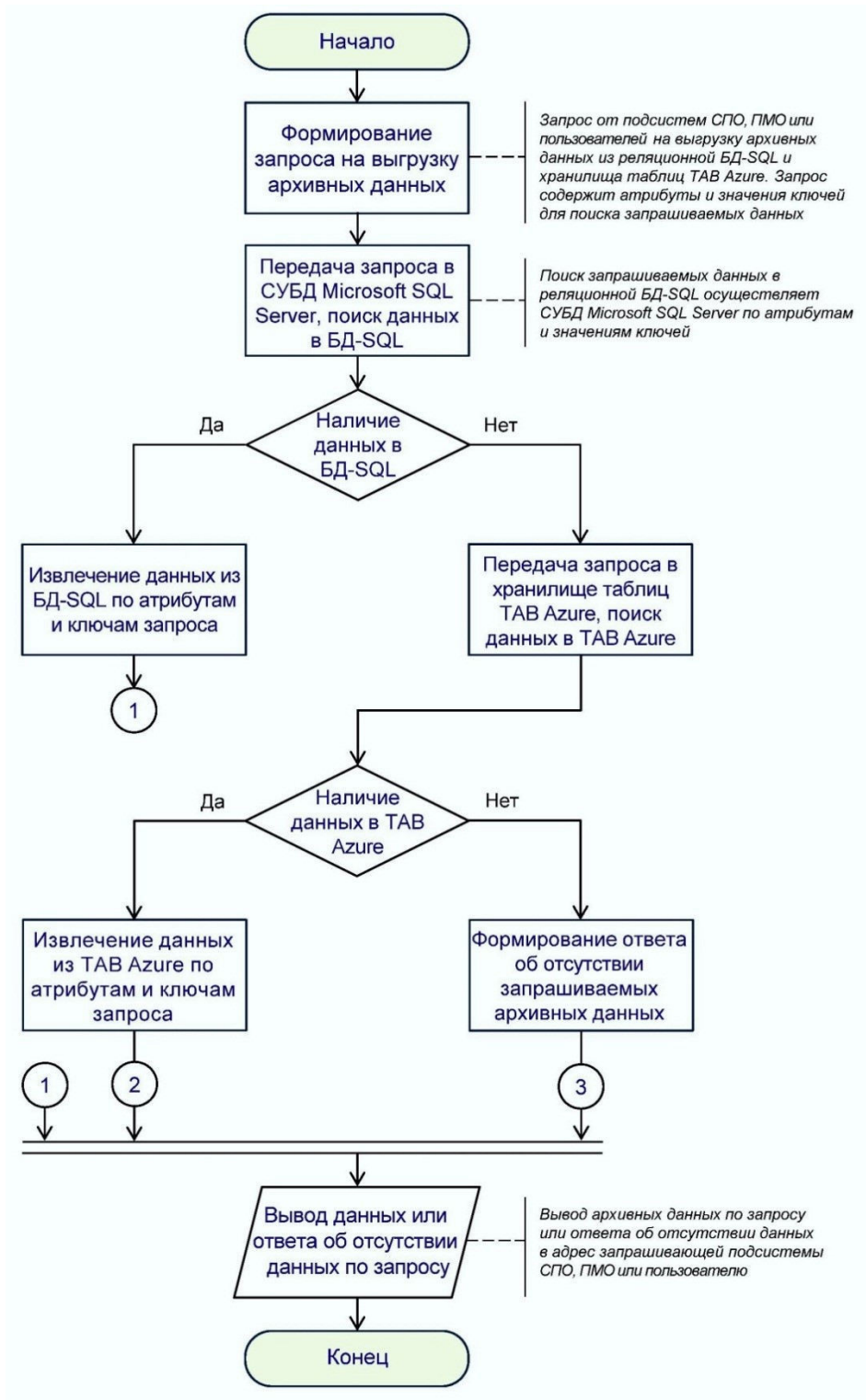


Рисунок 3 – Блок-схема алгоритма операций выгрузки архивных данных Системы

Операции выгрузки архивных данных повторяются по алгоритму рисунка 3 при поступлении следующих запросов на выгрузку архивных данных Системы.

4.4 Алгоритм операций контроля параметров телесигнализации

Телемеханика Системы включает методы и средства удаленных измерений (телеметрии), телесигнализации и телеуправления объектами (ГНСС станциями). Телесигнализация обеспечивает получение информации о состоянии контролируемых и управляемых объектов в виде ряда возможных дискретных состояний, и возможность контроля изменений состояния. Например, устройство включено или отключено, параметры устройства соответствуют установленным пределам (находятся в норме) или выходят за пределы (не в норме), что может означать переход объекта в аварийное состояние. Блок-схема алгоритма операций контроля параметров телесигнализации (дискретных сигналов ГНСС станций) представлена на рисунках 4 и 5. Дискретные сигналы обозначены TAL_j , где j – условный порядковый номер сигнала от 1 до K . Операции контроля начинаются с загрузки профиля ГНСС станций и шаблона пакета входных данных. Для контроля сигналов от всех ГНСС станций запускается цикл перебора id номеров ГНСС станций от 1 до N . Загружается пакет входных данных от первой ГНСС станции номер $id=1$.

Запускается цикл перебора номеров j сигналов TAL_j от 1 до K . В цикле проверяется наличие первого и последующих датчиков сигнала TAL_j , так как ГНСС станции сети могут быть разной комплектности, часть датчиков может отсутствовать. Если датчик отсутствует, дальнейший анализ прекращается и выгружается решение «Датчик отсутствует». При наличии датчика выполняется проверка статуса «Датчик выключен» или «Датчик включен». При включенном датчике выполняется анализ параметров сигнала TAL_j .

Период регистрации показаний датчиков телеметрии и сигнализации отличается для разных датчиков и существенно больше (обычно от 5 секунд до 1 часа), чем период регистрации навигационных данных (обычно от 1 до 30 секунд), поэтому не каждый пакет входных данных содержит сигнал TAL_j , часть пакетов содержат пустые ячейки для данного сигнала. Проверяется наличие или отсутствие сигнала TAL_j в пакете данных, при отсутствии выгружается статус «Значение сигнала отсутствует». При наличии сигнала выполняется анализ параметра сигнала и выгружается решение «Параметр сигнала в норме» либо «Параметр сигнала вне нормы» (что означает аварийное состояние узла или включение/отключение узла вопреки штатному режиму). При параметре сигнала вне нормы в центр управления Системой выдается аварийное сообщение в графической форме и звуковой сигнал. На этом анализ сигнала TAL_j с номером $j=1$ закончен. Выходное решение (анализ значения сигнала TAL_j) выгружается в реляционную БД-SQL с номером ГНСС станции id и идентификатором времени, равном времени пакета входных данных.

Для анализа следующих сигналов TAL_j цикл j повторяется для $j=j+1$ (увеличение номера на единицу) до достижения $j=K$. После анализа всех сигналов TAL_j для первой ГНСС станции с номером $id=1$ повторяется цикл для $id=id+1$ до достижения $id=N$ (последняя станция). В итоге анализа всех дискретных сигналов TAL_j для всех ГНСС станций в БД-SQL выгружены все выходные решения: «Датчик отсутствует» (код 000),

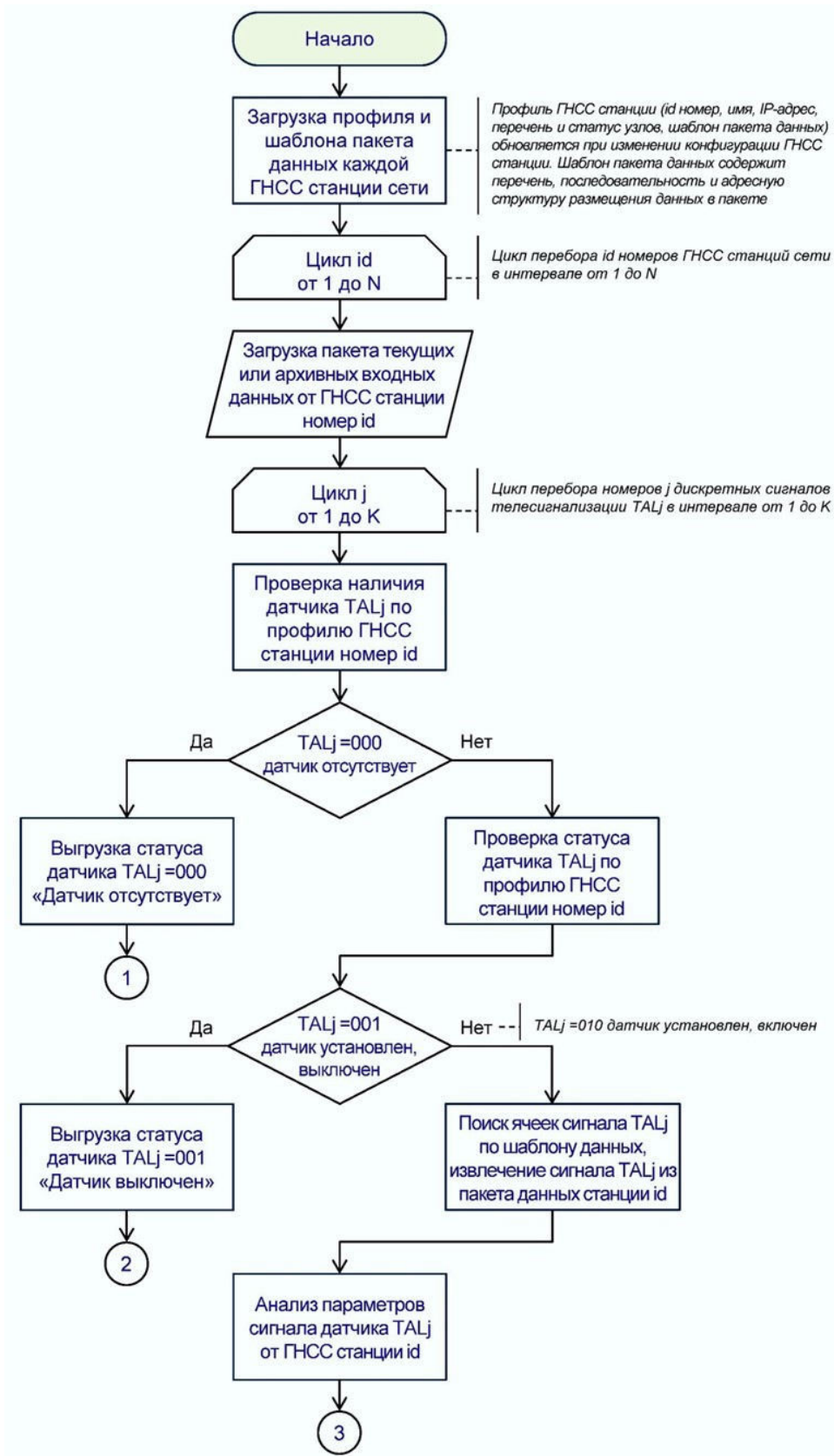


Рисунок 4 – Блок-схема алгоритма операций контроля параметров телесигнализации Системы (часть 1)

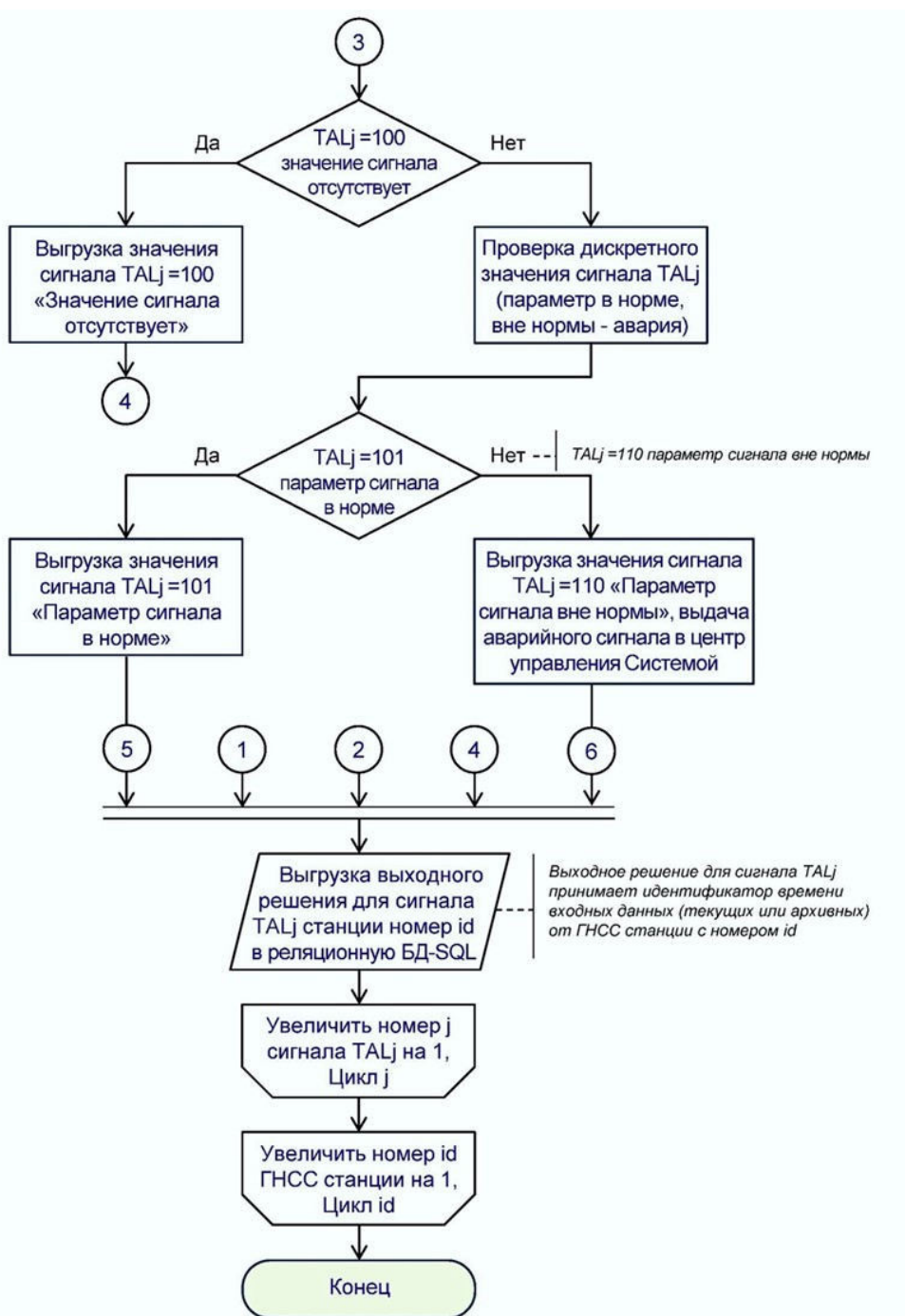


Рисунок 5 – Блок-схема алгоритма операций контроля параметров телесигнализации Системы (часть 2)

«Датчик выключен» (код 001), «Значение сигнала отсутствует» (код 100), «Параметр сигнала в норме» (код 101), «Параметр сигнала вне нормы» (код 110), аварийные сигналы переданы в центр управления Системой для принятия управленческих решений.

4.5 Алгоритм операций контроля сигналов телеметрии

Телеметрия включает методы и средства удаленных измерений параметров состояния объектов (узлов ГНСС станций), обеспечивает получение информации о состоянии объектов в виде измеренных значений параметров. Например, величины напряжений первичной и вторичной сети электропитания, уровень заряда аккумулятора ИБП, величины температуры и влажности снаружи и внутри корпуса ГНСС станции, углы наклона платформы антенны сигналов ГНСС и другие. Сигналы телеметрии позволяют оценивать фактические значения параметров устройств и выявлять аварийные состояния, когда значения параметров сигналов телеметрии приближаются или выходят за допустимые (установленные) граничные значения.

Сигналы телеметрии и телесигнализации используются для общей цели контроля состояния узлов ГНСС станций, но отличаются детальностью информации и возможностями прогнозирования. Сигналы телеметрии содержат измеренные значения параметров, а телесигнализация предоставляет дискретные значения состояния устройств (включено-отключено, в норме-не в норме) без указания значений параметров.

Блок-схема алгоритма операций контроля сигналов телеметрии представлена на рисунках 6 и 7.

Алгоритм контроля сигналов телеметрии в целом повторяет алгоритм контроля параметров телесигнализации, за исключением процедуры анализа параметров сигнала телеметрии. Сигналы телеметрии обозначены TLM_i , где i – условный порядковый номер сигнала от 1 до M . Контроль сигналов телеметрии начинается с загрузки профилей ГНСС станций и шаблонов пакета входных данных. Для контроля сигналов от всех ГНСС станций запускается цикл перебора id номеров ГНСС станций от 1 до N . Загружается пакет входных данных от ГНСС станции с порядковым номером $id=1$. Запускается цикл перебора номеров i сигналов TLM_i от 1 до M . Проверяется наличие датчика сигнала TLM_i по профилю ГНСС станции. Комплектность ГНСС станций может быть различной, и часть датчиков может отсутствовать. Если датчик TLM_i отсутствует, дальнейший анализ прекращается и выгружается решение «Датчик отсутствует» (код 000). При наличии датчика выполняется проверка статуса «Датчик выключен» (код 001) или «Датчик включен». При включенном датчике выполняется анализ параметров сигнала TLM_i .

Период регистрации показаний разных датчиков телеметрии различный (обычно от 5 секунд до 1 часа) и отличается от периода регистрации навигационных данных (обычно от 1 до 30 секунд), поэтому не каждый пакет входных данных содержит сигнал TLM_i , часть пакетов содержат пустые ячейки. Проверяется наличие или отсутствие сигнала TLM_i в пакете данных. При отсутствии сигнала выгружается статус «Значение сигнала отсутствует» (код 100). При наличии сигнала TLM_i из профиля ГНСС станции с номером id выгружаются минимальное MIN_i и максимальное MAX_i граничные значения

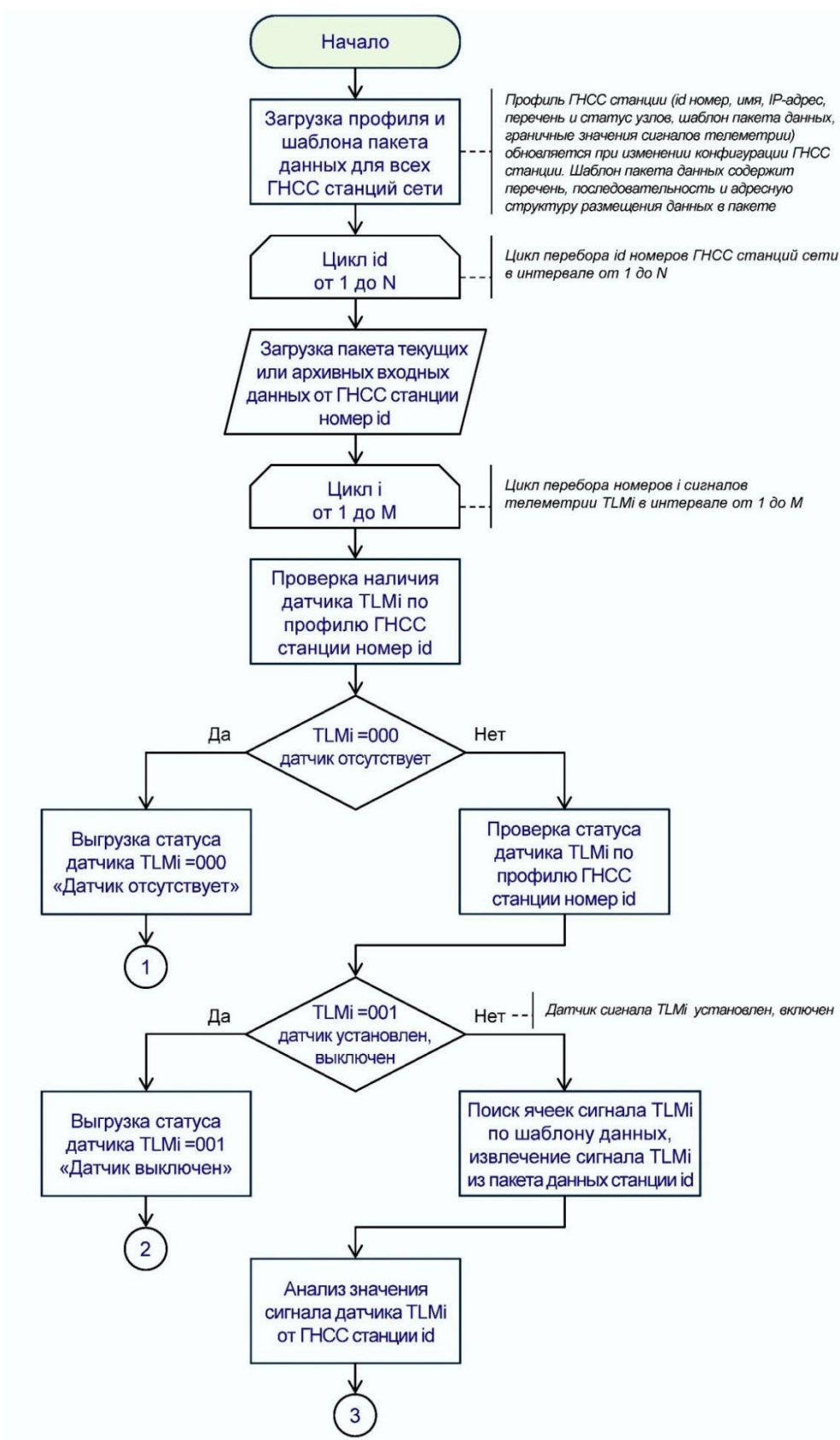


Рисунок 6 – Блок-схема алгоритма операций контроля сигналов телеметрии Системы (часть 1)

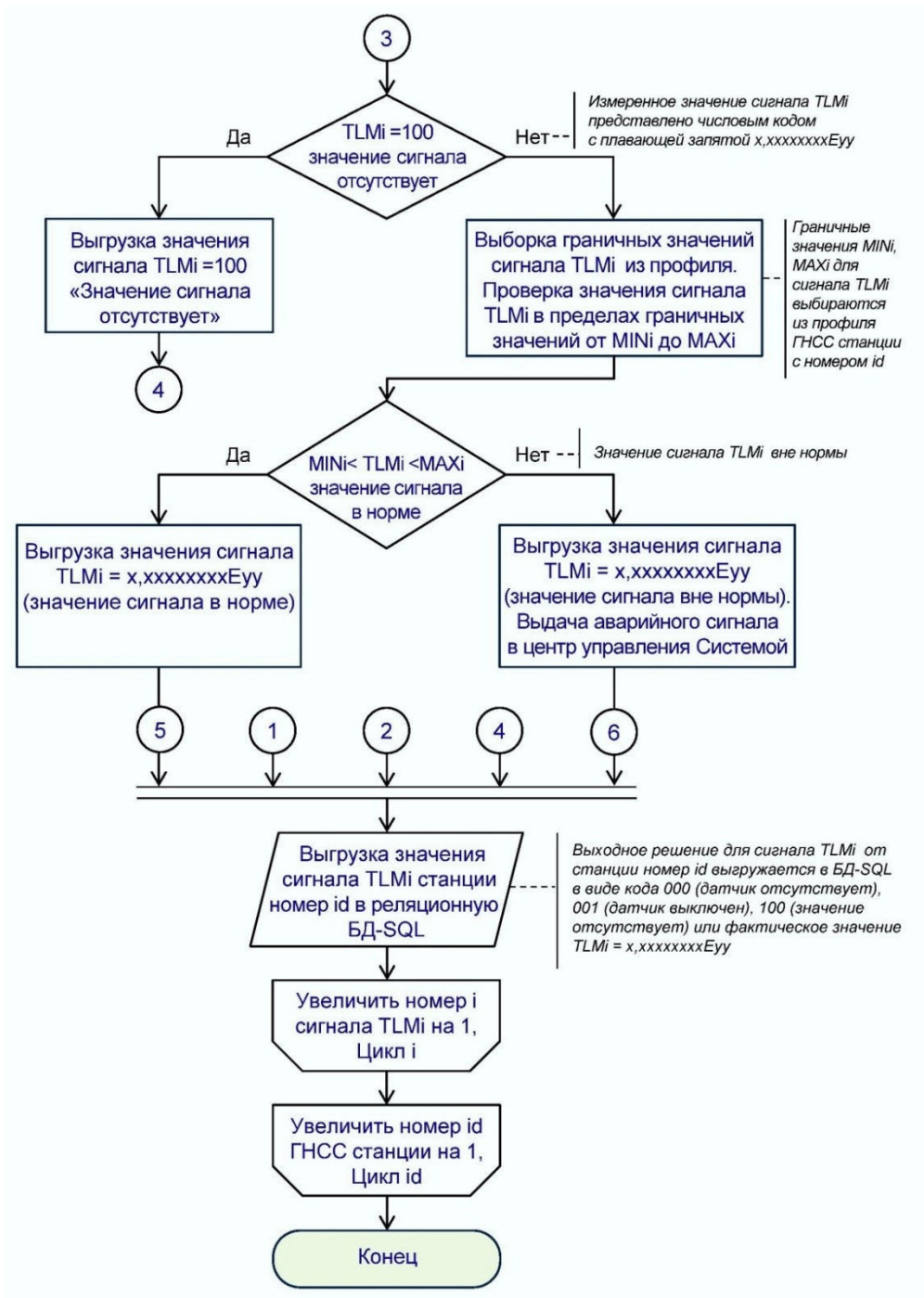


Рисунок 7 – Блок-схема алгоритма операций контроля сигналов телеметрии Системы (часть 2)

параметров сигнала TLMi. Выполняется проверка значения параметра сигнала TLMi на соответствие граничным условиям ($MIN_i < TLM_i < MAX_i$). При соответствии значения параметра сигнала граничным условиям (параметр сигнала в пределах нормы), значение сигнала TLMi выгружается в БД-SQL. При несоответствии значения параметра сигнала граничным условиям (вне нормы), значение сигнала TLMi также выгружается в БД-SQL и в центр управления Системой выдается аварийное сообщение в графической форме и звуковой сигнал. Анализ сигнала TLMi с номером i на этом завершен.

Для анализа следующих сигналов TLMi цикл i повторяется для $i=i+1$ (увеличение номера i на единицу) до достижения $i=M$. После анализа всех сигналов TLMi для ГНСС станции с номером $id=1$ цикл повторяется для $id=id+1$ до достижения $id=N$. В результате анализа всех сигналов телеметрии TLMi для всех ГНСС станций в БД-SQL выгружены все выходные решения по сигналам TLMi: «Датчик отсутствует» (код 000), «Датчик выключен» (код 001), «Значение сигнала отсутствует» (код 100), измеренные значения сигналов телеметрии TLMi (числовые коды), аварийные сигналы переданы в центр управления Системой.

5 Заключение

В рамках работ по созданию системы управления сетевой инфраструктурой референчных GNSS станций с использованием облачных технологий разработано специализированное программное обеспечение. Код СПО написан с помощью языка программирования C# 6.0/7.0 в среде разработки Microsoft Visual Studio, связанной с программной платформой исполнения приложений Microsoft .NET Framework в облачной платформе Microsoft Azure. СПО системы управления сетевой инфраструктурой референчных GNSS станций с использованием облачных технологий выполняет функции непрерывного и параллельного во времени сбора навигационных и телеметрических данных, выгрузки архивных данных, проверки целостности данных, диагностики и контроля качества параметров системы, архивации и хранения данных, управления ГНСС станциями, предоставления данных пользователям, регистрации, ведения реестра и контроля доступа пользователей. Разработанное СПО выполняет свои функции путем реализации следующих алгоритмов: алгоритм сбора входных данных, алгоритм операций хранения данных, алгоритм операций выгрузки архивных данных, алгоритм операций контроля параметров телесигнализации, алгоритм контроля сигналов телеметрии.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант AP05134038 «Разработка программной системы управления инфраструктурой референчных GNSS станций с использованием облачных технологий», 2018-2020 годы).

Список литературы

- [1] Chen X., Kipka A., Kohler J., Landau H., Vollath U. GNSS Modernization and its Consequences for Reference Station Network Solutions: Proceedings of the European Navigation Conference ENC-GNSS 2007 (Geneva, 2007).
- [2] О способах сбора геопространственных данных с помощью различных программно-аппаратных средств на базе GNSS технологий [Electron. resource]. - 2014. URL: <http://ngc.com.ua/info/spider.html> (available at: 10.02.2020)
- [3] Dedes G. Precision Positioning Technologies and Trends at Topcon: Proceedings of the International Global Navigation Satellite Systems Society IGSS Symposium (Sydney, 2007).
- [4] Cheves M. Environment Analysis from JAVAD GNSS // *The American Surveyor* . - 2010. - V.7 (8). - pp.10-12.
- [5] National Research Council The Global Positioning System for Geosciences: Summary and Proceedings of a Workshop on Improving the GPS Reference Station Infrastructure for Earth, Oceanic, and Atmospheric Science Application. - Washington DC: National Academy Press, 1997. – 284 p. doi: 10.17226/9254
- [6] Quesada-Olmo N., Jimenez-Martinez M. J., Farjas-Abadia M. Real-time high-rise building monitoring system using global navigation satellite system technology // *Measurement*. - 2018. - V.123. - pp.115-124. doi:10.1016/j.measurement.2018.03.054
- [7] Saadati S., Abbasi M., Abbasy S., Amiri-Simkooei A. Geodetic Calibration Network for total stations and GNSS receivers in sub-kilometer distances with sub-millimeter precision // *Measurement*. - 2019. - V.141. - pp.258-266. doi: 10.1016/j.measurement.2019.04.044.
- [8] Da Silva I., Ibanez W., Poleszuk G. Experience of Using Total Station and GNSS Technologies for Tall Building Construction Monitoring: Proceedings of the 1st GeoMEast International Congress and Exhibition on Sustainable Civil Infrastructures (Sharm El Sheikh, 15–19 July 2017). – pp. 471–486. doi: 10.1007/978-3-319-61914-9_36
- [9] Akhmedov D., Moldabekov M., Yeryomin D., Zhaxygulova D. High accuracy positioning of backbone network infrastructure and mobile objects // *INCAS BULLETIN*. – 2019. – V. 4 (11). – pp. 3-10. doi: 10.13111/2066-8201.2019.11.4.1
- [10] Murrian M.J., Gonzalez C.W., Humphreys T.E., Pesyna K.M. Jr., Shepard D.P., Kerns A. Low-cost precise point positioning for automated vehicle // *GPS World*. - 2016. - V.27 (9). - C.32-39.
- [11] Meneroux Y., Manandhar D., Ranjit S., Saint Pierre G., Shibasaki R. Positional accuracy control in dense urban environment with low-cost receiver and multi-constellation GNSS: Proceedings of the 9th Multi-GNSS Asia (MGA) Conference (Jakarta, 9-11 October 2017).
- [12] Bian H., Zhang S., Zhang Q., Zheng N. Monitoring large-area mining subsidence by GNSS based on IGS stations // *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*. - 2014. - V. 24 (2). – pp. 514–519. doi: 10.1016/s1003-6326(14)63090-9
- [13] Melachroinos S. A., Biancale R., Llubes M., Perosanz F., Lyard F., Vergnolle M., Durand S. Ocean tide loading (OTL) displacements from global and local grids: comparisons to GPS estimates over the shelf of Brittany, France // *Journal of Geodesy*. - 2007. – V. 82 (6). – pp. 357–371. doi: 10.1007/s00190-007-0185-6
- [14] Lescarmontier L., Legresy B., Coleman R., Perosanz F., Mayet C., Testut L. Vibrations of Mertz Glacier ice tongue, East Antarctica // *Journal of Glaciology*. – 2012. – V. 58 (210). – pp. 665–676. doi: 10.3189/2012JoG11J089
- [15] Молдабеков М.М., Еремин Д.И., Жаксыгулова Д.Г., Трешко С. Архитектура системы управления сетевой инфраструктурой референчных GNSS станций с использованием облачных технологий // *Вестник НИА РК*. – 2019. – № 2 (72). – С. 42–47.
- [16] Горшкова Е.В., Шаповалова Д.В., Корецкая Г.А. Зарубежный опыт создания референчных станций // *Сборник материалов IX Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Россия молодая»*. 18-21 апреля 2017 г. - Кемерово: КузГТУ, 2017. - С.0101003: 1-5.
- [17] Continuously Operating Reference Station (CORS) // National Geodetic Survey URL: <https://alt.ngs.noaa.gov/CORS> (available at: 20.06.2019)
- [18] Принципы навигации // Информационно-аналитический центр координатно-временного и навигационного обеспечения URL: <https://www.glonass-iac.ru/guide/navfaq.php> (дата обращения: 19.06.2019).
- [19] Что такое PaaS? Платформа как услуга [Электрон. ресурс]. – 2013. URL: <https://azure.microsoft.com/ru-ru/overview/what-is-paas/> (дата обращения 20.09.2019)

- [20] Microsoft Azure [Электрон. ресурс]. – 2012. URL: <https://azure.microsoft.com/ru-ru/> (дата обращения 20.03.2019)
- [21] Руководство по языку C# [Электрон. ресурс]. – 2012. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/csharp/> (дата обращения 28.03.2019)
- [22] Руководство по программированию на C# [Электрон. ресурс]. – 2015. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/csharp/programming-guide/index> (дата обращения 28.03.2019)
- [23] The Ultimate Guide to Windows Server on Azure. [Electron. resource]. – 2012. URL: http://info.microsoft.com/rs/157-GQE-382/images/Ultimate_Guide_to_Windows_Server_on_Azure_EN_US.pdf (дата обращения 26.03.2019)
- [24] Документация по Microsoft SQL [Электрон. ресурс]. – 2017. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/sql/?view=sql-server-2017> (дата обращения 28.09.2019)
- [25] Что собой представляет SQL Server на виртуальных машинах Azure (Windows) [Электрон. ресурс]. – 2016. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/azure/virtual-machines/windows/sql/virtual-machines-windows-sql-server-iaas-overview> (дата обращения 28.09.2019)

References

- [1] Xiaoming Chen, Adrian Kipka, Jan Kohler, Herbert Landau, Ulrich Vollath, "GNSS Modernization and its Consequences for Reference Station Network Solutions" (paper presented in the European Navigation Conference ENC-GNSS 2007, Geneva, Switzerland, March 29-June 1, 2007).
- [2] "About methods of collecting geospatial data using various software and hardware based on GNSS technologies," Leica Geosystems, accessed February 10, 2020, <http://ngc.com.ua/info/spider.html>
- [3] George Dedes, "Precision Positioning Technologies and Trends at Topcon" (paper presented at the International Global Navigation Satellite Systems Society IGNS Symposium, Sydney, Australia, December 4-6, 2007).
- [4] Cheves, Mark. "Environment Analysis from JAVAD GNSS." *The American Surveyor* 7 (2010): 10-2.
- [5] National Research Council, *The Global Positioning System for Geosciences: Summary and Proceedings of a Workshop on Improving the GPS Reference Station Infrastructure for Earth, Oceanic, and Atmospheric Science Application*. Washington, DC: The National Academies Press, 1997.
- [6] Quesada-Olmo, Nieves, Jimenez-Martinez, Maria J., Farjas-Abadia, Mercedes. "Real-time high-rise building monitoring system using global navigation satellite system technology." *Measurement* 123 (2018): 115-24.
- [7] Saadati, Sadegh, Abbasi, Madjid, Abbasy, Saeed, Amiri-Simkoei, Alireza. "Geodetic Calibration Network for total stations and GNSS receivers in sub-kilometer distances with sub-millimeter precision." *Measurement* 141 (2019): 258-66.
- [8] Irineu da Silva, Wernher Ibanez, Guilherme Poleszuk "Experience of Using Total Station and GNSS Technologies for Tall Building Construction Monitoring" (paper presented at the 1st GeoMEast International Congress and Exhibition on Sustainable Civil Infrastructures, Sharm El Sheikh, Egypt, July 15-19, 2017).
- [9] Akhmedov, Daulet, Moldabekov, Meirbek, Yeryomin, Denis, Zhaxygulova, Dinara. "High accuracy positioning of backbone network infrastructure and mobile objects." *INCAS BULLETIN* 11 (2019): 3-10.
- [10] Murrian, Matthew J., Gonzalez, Collin W., Humphreys, Todd E., Pesyna, Kenneth M. Jr., Shepard, Daniel P., Kerns, Andrew J. "Low-cost precise point positioning for automated vehicle." *GPS World* 27 (2016): 32-9.
- [11] Yann Meneroux, Manandhar Dinesh, Ranjit Saurav, Guillaume Saint Pierre, Ryosuke Shibasaki, "Positional accuracy control in dense urban environment with low-cost receiver and multi-constellation GNSS" (paper presented at the 9th Multi-GNSS Asia (MGA) Conference, Jakarta, Indonesia, October 9-11, 2017).
- [12] Bian, He-fang, Zhang, Shu-bi, Zhang, Qiu-zhao, Zheng, Nan-shan. "Monitoring large-area mining subsidence by GNSS based on IGS stations." *Transactions of Nonferrous Metals Society of China* 24 (2014): 514-19.
- [13] Melachroinos, Stavros A., Biancale, Richard, Llubes, Muriel, Perosanz, Felix, Lyard, Florent, Vergnolle, Mathilde, Durand, Stephane. "Ocean tide loading (OTL) displacements from global and local grids: comparisons to GPS estimates over the shelf of Brittany, France." *Journal of Geodesy* 82 (2007): 357-71.
- [14] Lescarmontier, Lydie, Legresy, Benoit, Coleman, Richard, Perosanz, Felix, Mayet, Clement, Testut, Leo. "Vibrations of Mertz Glacier ice tongue, East Antarctica." *Journal of Glaciology* 58 (2012): 665-76.

-
- [15] Moldabekov, Meirbek M., Yeryomin, Denis I., Zhaxygulova, Dinara G., Trepashko, Sergey. "Arhitektura sistemy upravleniya setevoi infrastrukturoi referentsnyh GNSS stantsii s ispolzovaniem oblachnyh tehnologii [The architecture of the system for managing the network infrastructure of reference GNSS station using cloud technologies]." *Vestnik NIA RK* 72 (2019): 42-7.
- [16] Elena V. Gorshkova, Darya V. Shapovalova, Galina A. Koretskaya, "Foreign experience in creating reference stations" (paper presented at the IX All-Russian Scientific and Practical Conference of Young Scientists "Young Russia", Kemerovo, Russia, April 18-21, 2017).
- [17] "Continuously Operating Reference Station (CORS)," National Geodetic Survey, accessed June 20, 2018, <https://alt.ngs.noaa.gov/CORS>.
- [18] "Navigation principles," Information and analysis center for positioning, navigation and timing, accessed June 19, 2019, <https://www.glonass-iac.ru/guide/navfaq.php>.
- [19] "What is PaaS? Platform as a service," Microsoft Azure, accessed September 20, 2019, <https://azure.microsoft.com/ru-ru/overview/what-is-paas/>.
- [20] "Microsoft Azure," Microsoft Azure, accessed March 20, 2019, <https://azure.microsoft.com/ru-ru/>.
- [21] "C# documentation," Microsoft Build, accessed March 28, 2019, <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/csharp/>.
- [22] "C# programming guide," Microsoft Build, accessed March 28, 2019, <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/csharp/programming-guide/index>.
- [23] "The Ultimate Guide to Windows Server on Azure," Microsoft Build, accessed March 26, 2019, http://info.microsoft.com/rs/157-GQE-382/images/Ultimate_Guide_to_Windows_Server_on_Azure_EN_US.pdf.
- [24] "Microsoft SQL documentation," Microsoft, accessed September 28, 2019, <https://docs.microsoft.com/ru-ru/sql/?view=sql-server-2017>.
- [25] "25 What is SQL Server in Azure Virtual Machines (Windows)," Microsoft Build, accessed September 28, 2019, <https://docs.microsoft.com/ru-ru/azure/virtual-machines/windows/sql/virtual-machines-windows-sql-server-iaas-overview>.

4-бөлім

Раздел 4

Section 4

Қолданылмалы
математика
IRSTI 27.35.29

Прикладная
математика
DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.08>

Applied
Mathematics

A.U. Abdibekova*, D.B. Zhakebayev, O. Karuna

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: a.aigerim@gmail.com

MODELLING THE INFLUENCE OF ELECTRON CONCENTRATION ON MHD TURBULENCE BY LES

In the present work, a three-dimensional mathematical model of the influence of electron concentration on the dynamics of the E-layer of the ionosphere under nonisothermal conditions is developed. The proposed method shows high computational efficiency and good quality estimates. To approximate the solution of the convective and diffusion terms of the intermediate velocity field, the finite difference method is used in combination with a five-diagonal matrix, which made it possible to achieve fourth-order accuracy in space and third-order accuracy in time. To solve the pressure, the Poisson equation is solved, which ensures the fulfillment of the continuity equation. The Poisson equation is transformed from physical space to spectral space using the Fourier transform. The equation for the temperature and electron concentration is solved using the Adams-Bashforth method. Before modeling the influence of the magnetic field on MHD turbulence, to test the adequacy of the numerical algorithm, the Taylor Green test problem was performed for various Reynolds numbers, where it agrees well with the reference spectral method and analytical solutions. As a result of the simulation, the temperature contours and turbulent flow isotherms for various Stuart numbers were obtained. The developed numerical algorithm can be used to model the attenuation of ionospheric turbulence at various Stuart numbers.

Key words: Ionosphere E-layer, concentration of electron, magnetohydrodynamics, Taylor-Green vortex problem, finite difference method.

А.У. Абдибекова*, Д.Б. Жакебаев, О. Каруна

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: a.aigerim@gmail.com

Ірі құйындылық әдісін қолдану арқылы электрон концентрацияның МГД турбуленттілігіне әсерін моделдеу

Осы жұмыста электрон концентрациясының ионосфераның Е-қабатының динамикасына әсер етудің үш өлшемді математикалық моделі құрылған. Ұсынылған әдіс жоғары есептеу тиімділігін және сапаны жақсы бағалауды көрсетеді. Аралық жылдамдық өрісінің конвективті және диффузиялық бөліктерін аппроксимациялау үшін ақырлы айырмдылық әдісі бес диагональды матрицамен бірге қолданылады, бұл кеңістік бойынша төртінші ретті дәлдікке және уақыт бойынша үшінші ретті дәлдікке қол жеткізуге мүмкіндік берді. Қысымды шешу үшін үздіксіздік теңдеуінің орындалуын қамтамасыз ететін Пуассон теңдеуі шешіледі. Пуассон теңдеуі Фурье түрлендіру әдісі көмегімен физикалық кеңістіктен спектрлік кеңістікке ауыстырылады. Температура мен электрон концентрациясының теңдеуі Адамс-Башфорт әдісі арқылы шешіледі. Магниттік өрістің МГД турбуленттілігіне әсерін модельдеуден бұрын, сандық алгоритмнің сәйкестігін тексеру үшін, Тейлор Грин сынақтары Рейнольдстың әртүрлі сандары үшін жүргізілді, салыстыру нәтижесінде құрылған сандық әдістің шешімі спектральды әдісімен және аналитикалық шешімдермен жақсы келісімде көрсетті. Модельдеу нәтижесінде турбулентті ағынның әртүрлі Стюарт сандары үшін температура контурлары мен изотермалары алынды. Әзірленген сандық алгоритм Стюарттың әртүрлі сандарындағы ионосфералық турбуленттіліктің үрдісіне әсерін зерттеуге арналды.

Түйін сөздер: Ионосфера Е-қабаты, электронның концентрациясы, магнитогидродинамика, Тейлор-Грин құйындылығының есебі, ақырлы айырмдылық әдісі.

А.У. Абдибекова*, Д.Б. Жакебаев, О. Каруна
Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
*e-mail: a.aigerim@gmail.com

Моделирование влияния концентрации электронов на МГД-турбулентность методом крупных вихрей

В представленной работе разработана трехмерная математическая модель влияния концентрации электронов на динамику E-слоя ионосферы в неизотермических условиях. Предложенный метод показывает высокую вычислительную эффективность и хорошее качество оценки. Для аппроксимации решения конвективного и диффузионного членов промежуточного поля скоростей используется метод конечных разностей в сочетании с пятидиагональной матрицей, который позволил достичь точности четвертого порядка в пространстве и третьего порядка во времени. Для решения давления решается уравнение Пуассона, которое обеспечивает выполнение уравнения неразрывности. Уравнение Пуассона преобразуется из физического пространства в спектральное пространство с помощью преобразования Фурье. Уравнение для температуры и концентрации электронов решается с использованием метода Адамса-Бэшфорда. Перед моделированием влияния магнитного поля на МГД турбулентность, для проверки адекватности численного алгоритма была выполнена тестовая задача Тейлора Грина для различных чисел Рейнольдса, где она хорошо согласуется с эталонным спектральным методом и аналитическими решениями. В результате моделирования были получены температурные контуры и изотермы турбулентного потока для различного числа Стюарта. Разработанный численный алгоритм может быть использован для моделирования затухания ионосферной турбулентности при различных числах Стюарта.

Ключевые слова: ионосфера E-слой, концентрация электронов, магнитная гидродинамика, вихревая задача Тейлора-Грина, метод конечных разностей.

1 Introduction

Extensive research has been undertaken over the past decades to improve our knowledge of the Earth surrounding ionosphere. The ionosphere layer is consisting of neutral and charged particles that interact with each other and are exposed to external influences of solar origin and are limited by gravitational, electric and magnetic fields. To simulate the ionosphere medium means to find a satisfactory description of the behavior of its constituent particles in a selected space interval in time. Modeling is necessary because it is impossible to observe the structure and dynamics of the environment in all places and at any time. We will consider the E layer of the ionosphere, which corresponds to an altitude of approximately 90 – 120 km. There is every reason to believe that at these altitudes the gas is weakly ionized, degree of ionization N_e/N_n is quite small $N_e/N_n \ll 1$, where N_e and N_n are the electron and molecule concentrations, respectively.

2 Literature review

It is well - known that instabilities produce turbulence in ionosphere [1, 2] and significant amount of researches have been to study instabilities and their application to ionosphere turbulence. The chaotic behavior of ionosphere electron density fluctuations resulting from the interchange instabilities has been investigated [3], and describing the evolution of the Rayleigh-Taylor and $E \times B$ gradient drift instabilities which are relevant to the ionosphere and reduce to equation which correspond exactly to the Lorenz attractor for Rayleigh-Benard instability [4, 5]. In the developed three-mode system of chaotic behavior the ion inertia plays

a critical role in that if it is neglected, the three mode system does not exhibit chaos and a stable convection results [3]. In [6] is shown in the inertial regime , for which the three-mode theory predicts chaos, and the large-scale turbulence cell do not show chaotic behavior. We present our results for three mode systems, which corresponds to the Rayleigh Benard problem. The concept of convection is quite old, however the first quantitative experiments were performed by Henri Benard [7]. He studied the stability of a thin fluid layer open to air and submitted to a vertical temperature gradient, where he accurately determined properties such as the space periodicity of the hexagonal pattern, its variation, the profile of the interface. Later, Lord Rayleigh [8] proposed his theory of a feedback coupling resting on buoyancy: a fluid particle hotter than its environment encounters ever-colder fluid as it rises, which leads to the instability. He developed a complete linear stability analysis assuming stress-free conditions for the velocity and good heat-conducting plates. From the computational point of view, it was shown in [9], that the dynamic LES method can be a useful tool for modeling weakly ionized magnetohydrodynamic turbulence at low Re_m values and large N . In fact, since Joule dissipation leads to an energy sink proportional to the amplitude of the velocity fluctuation at each magnetic field. On the whole, large scales make a significant contribution to the dissipation of kinetic energy. Therefore, since the role of the energy cascade is less dominant compared to hydrodynamic turbulence, small-scale modeling can save significant computational resources.

3 Materials and methods

In the framework of this study, to construct a mathematical model of the influence of electron concentration on the dynamics of changes in the heterogeneity of the E-layer of the ionosphere under non-isothermal conditions, we consider an incompressible electrically conductive medium with different electron concentration at the three dimensional area. Some assumptions like no charge separation is observed inside the electrically conductive liquid [10], the Lorentz force decreases to the magnetic part have been made. For a very wide range of problems, assuming that relativistic effects are negligible, the nonlinear MHD equations are directly derived from Maxwell's equations, so the only relevant equations relate to speed and magnetic fields. However, even for these specific problems, the Lorentz force in the Navier - Stokes equations can be specified by various expressions depending on the range of parameters characterizing the flow [10]. It is known that turbulent fluctuations become anisotropic in the presence of a sufficiently strong magnetic field, which has important consequences for the properties of the turbulence and possibly requires a modification of the numerical models applied to such flows. If $Re_m \geq 1$, there is a two-way coupling between the fluctuations of the magnetic field and the velocity [11, 12]. As the fluid moves in the applied magnetic field B , induced electric currents result in the Lorentz force affecting the flow and in the modification of the imposed field by perturbations b of comparable or even larger amplitude. This happens, for example, in astro-physical processes, in stars, the interstellar medium, etc., where $Re_m \ll 1$, and in geophysics, the geodynamics, where $Re_m = 10^2$ [13].

3.1 Statement of the problem

The applied magnetic field $B = -H_0\bar{j}$ effect in the Navier-Stokes equations is the inclusion of the Lorentz force to the momentum equations $F_l = J \times B$ where $J = \sigma(E + V \times B)$ - is electric current density E - is electric field strength, which we set equal to zero, and σ is electric conductivity, $V = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$ - velocity of fluid, and all of these in combination we obtain $F_l = \sigma(V \times B) \times (-H_0\bar{j})$ - Lorentz force, where $F_l = \sigma[(u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}) \times (-H_0\bar{j})] \times (-H_0\bar{j})$ is in detail, after using the properties of the multiplication of unit vectors, we obtain $F_l = \sigma(u_1H_0\bar{k} - u_3H_0\bar{i}) \times (-H_0\bar{j})$, or $F_l = \sigma(-u_1H_0^2\bar{i} - u_3H_0^2\bar{k})$, and $F_l = F_1 + F_2 + F_3$, where $F_1 = -\sigma u_1H_0^2\bar{i}$, $F_2 = 0$, $F_3 = \sigma u_3H_0^2\bar{k}$ [14].

To construct a mathematical model of the influence of external disturbances on the generation and evolution of large-scale inhomogeneities in the E-layer of the ionosphere, we consider the transport equation for the magnetic field, which underlies the theory of incompressible MHD:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial\tau_{ij}^u}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + F_i + \frac{Ra}{Re^2 Pr} \bar{\theta}, \\ \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial(\bar{\theta})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i\bar{\theta})}{\partial x_j} = \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_j^\theta), \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + u_j \frac{\partial n_e}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_T \frac{\partial n_e}{\partial x_j} \right), \\ \tau_{ij}^u = (\bar{u}_i\bar{u}_j - \bar{u}_i\bar{u}_j), \\ \tau_j^\theta = (\bar{u}_j\bar{\theta} - \bar{u}_j\bar{\theta}) \end{array} \right. \quad (1)$$

where $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ - are velocity components, x_1, x_2, x_3 - coordinates, $\bar{F}_1 = -\bar{n}N_0\bar{u}_1$, $\bar{F}_2 = 0$, $\bar{F}_3 = -\bar{n}N_0\bar{u}_3$ - non-dimensional Lorentz force [14], $N = \sigma LH_0^2/\rho V_0 = n_e N_0$ is the Stuart number, where $N_0 = \sigma_0 H_0^2 L_3 / (\rho_0 U_0) = Ha^2 / Re$, $Ha = H_0 L \sqrt{\sigma/\mu}$ - Hartmann number, H - magnetic field strength, σ is the conductivity of the medium, which is determined from plasma physics $\sigma = e^2 n_e / (m_e \nu_i) = n_e \sigma_0$, where e - electron charge, m_e - electron mass, n_e - electron concentration, ν_i - effective electron collision frequency in the ionosphere. \bar{p} is the full pressure, t is the time, $U_0 = \sqrt{\alpha D (T_1 - T_0) L_3}$ - characteristic velocity, $\bar{\theta} = (T - T_0) / (T_1 - T_0)$ - non-dimensional temperature, where T_0 and T_1 are respectively the minimum and maximum temperatures in the E layer of ionosphere, $Ra = \alpha g (T_1 - T_0) L_3^3 / (\nu D)$ - Rayleigh number, where α is volumetric thermal expansion coefficient, g - acceleration due to gravity, $Re = \sqrt{Ra} / Pr$ is the Reynolds number, and to compare numerical simulation results with the work [14]. $Pr = \nu / D$ - Prandtl number, D - diffusion coefficient, $L_1 = L_2 = L_3 = L$ is the typical length of the domain, ν is the kinematic viscosity coefficient, ρ is the density of the flow, t - nondimensional time, $\tau_{ij}^u, \tau_j^\theta$ are the subgrid-scale tensors responsible for small-scale structures to be modelled, $\tau_j^\theta = \alpha_{sgs} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j}$, where $\alpha_{sgs} = C_s^2 / Pr_{sgs} \Delta^2 |\bar{S}| = C_s^2 / Pr_{sgs} \Delta^2 (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{\frac{1}{2}}$ is

the thermal eddy diffusivity, where $Pr_{sgs} = 0.6$.

A schematic picture of the computational domain is shown in Figure 1, where the top layer - indicated by the blue color, corresponds to a medium with a strong electron concentration and a low temperature environment of the ionosphere. The bottom layer - highlighted in red, corresponds to a weakly electronic concentrated and high temperature environment of the ionosphere.

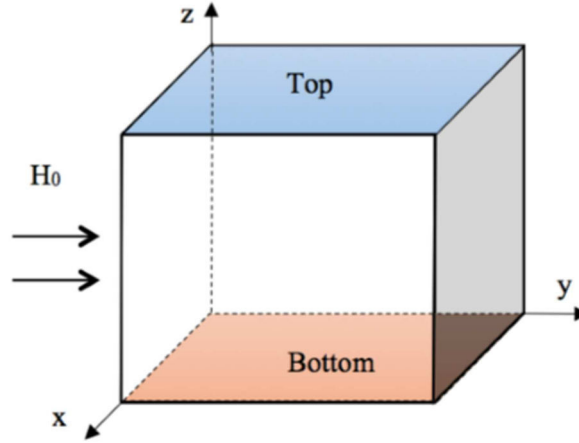


Figure 1 – Illustration of the problem statement

Initial conditions for temperature, velocity components are set zero in all directions of the domain, and for electron concentration is $n_e = 1$.

The boundary conditions imposed for temperature, and electron concentration are Dirichlet on the lower and upper boundary, and Neumann on the other directions of the domain. The velocity components are equal to 0 in all directions.

Top:

$$u_1, u_2, u_3|_{top} = 0$$

$$\theta|_{top} = \theta_{cold} = 0, \text{ where } \theta_{cold} - \text{the lowest temperature of the ionosphere layer is set,}$$

$$n_e|_{top} = 1 - \text{concentrated medium.}$$

Bottom:

$$u_1, u_2, u_3|_{bottom} = 0$$

$$\theta|_{bottom} = \theta_{hot} = 1, \text{ where } \theta_{hot} - \text{the high temperature of the ionosphere layer is set,}$$

$$n_e|_{bottom} = 0 - \text{weak concentrated medium.}$$

Other walls:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial n_e}{\partial x_2} = 0.$$

3.2 Numerical method

To solve the problem of homogeneous incompressible MHD turbulence, a scheme of splitting by physical parameters is used:

$$\begin{aligned}
\text{I. } & \frac{(\bar{u}^*)^{n+1} - (\bar{u})^n}{\Delta t} - \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\bar{u}^*)^{n+1} = \frac{1}{2Re} \nabla^2 \bar{u}^n + \frac{3}{2} K^n - \frac{1}{2} K^{n-1}; \\
\text{II. } & \Delta p = \frac{\nabla(\bar{u}^*)^{n+1}}{\tau}; \\
\text{III. } & \frac{(\bar{u})^{n+1} - (\bar{u}^*)^{n+1}}{\Delta t} = -\nabla p; \\
\text{IV. } & \frac{\bar{\theta}^{n+1} - \bar{\theta}^n}{\Delta t} - \frac{1}{2Pe} \nabla^2 \bar{\theta}^{n+1} = \frac{1}{2Pe} \nabla^2 \bar{\theta}^n + \left(\frac{3}{2} G^n - \frac{1}{2} G^{n-1}\right) \\
\text{V. } & \frac{\bar{n}_e^{n+1} - \bar{n}_e^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \nabla(\nu_T \nabla \bar{n}_e^{n+1}) = \frac{1}{2} M^n - \frac{1}{2} M^{n-1} + \frac{1}{2} \nabla(\nu_T \nabla \bar{n}_e^n)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
K^n &= -(\bar{u}^n \nabla) \bar{u}^n + F^n + (Ra/Re^2 Pr) \bar{\theta}^n - (\nabla \tau^u)^n, \\
M^n &= -(\bar{u}^n \nabla) \bar{n}_e^n, \\
G^n &= -(\bar{u}^n \nabla) \bar{\theta}^n - (\nabla \tau^\theta)^n, \text{ where } Pe = Re Pr - \text{Peclet number.}
\end{aligned}$$

During the first stage, the full magneto hydrodynamic equation system is solved without the pressure consideration. For approximation of the convective and diffusion terms of the intermediate velocity field a finite-difference method in combination with penta-diagonal matrix is used, which allowed to increase the order of accuracy in space. The numerical algorithm for the solution of incompressible MHD turbulence without large eddy simulation is considered at [15]. The intermediate velocity field is solved using the Adams-Bashfort scheme in combination with the five-point sweep method. At the second step, the pressure Poisson equation is solved, which ensures that the continuity equation is satisfied. The Poisson equation is transformed from the physical space into the spectral space by using a Fourier transform. To solve the three-dimensional Poisson equation, the spectral conversion in combination with matrix sweeping algorithm is developed [15]. The resulting pressure field in the third stage is used to recalculate the final velocity field [16]. At the fourth stage, the equation for temperature is solved by using Adams-Bashforth scheme. At the fifth stage, for the solution of concentration electron equation the similiar algorithm as for solution of temperature the Adams Bashforth scheme is used.

4 Analitical solution of Taylor-Green vortex problem

We duplicate the classical example proposed in [17] in order to validate the numerical simulation of increasing order of accuracy in time and in space $O(dt^2, h^4)$, with efficient acceleration for sequential algorithm. Starting from a simple incompressible three-dimensional initial condition of the form.

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t = 0) = \cos(ax_1) \sin(ax_2) \sin(ax_3), \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t = 0) = -\sin(ax_1) \cos(ax_2) \sin(ax_3), \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t = 0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

and assuming periodic conditions in a cubic domain: $0 \leq x_1 \leq 2\pi$, $0 \leq x_2 \leq 2\pi$, $0 \leq x_3 \leq 2\pi$ with $a = 1$, the three-dimensional filtered Navier-Stokes equation

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3)$$

can be solved analytically at small times, using the method of perturbation expansion. In (1) all quantities have been properly normalized by the initial maximum velocity magnitude U_0 in the x_1 or x_2 direction, and $L/2\pi$, where L is the physical domain size, u_i -velocity at $i = 1, 2, 3$, corresponding to x_1, x_2, x_3 directions, $\text{Re} = LU_0/\nu$ is the Reynolds number of flow, U_0 - the characteristic velocity, $T = aU_0t$, $a = 2\pi/L$. The pressure p has been normalized by ρU_0^2 . Taylor and Green obtained a perturbation expansion of the velocity field, up to $O(t^5)$. The resulting average kinetic energy is:

$$E_k = \frac{U_0^2}{8} u'^2 \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} u'^2 = & 1 - \frac{6T}{\text{Re}} + \frac{18T^2}{\text{Re}^2} - \left(\frac{5}{24} + \frac{36}{\text{Re}^2} \right) \frac{T^3}{\text{Re}} + \left(\frac{5}{2\text{Re}^2} + \frac{54}{\text{Re}^4} \right) T^4 - \\ & - \left(\frac{5}{44.12} + \frac{367}{24\text{Re}^2} + \frac{4.81}{5\text{Re}^4} \right) \frac{T^5}{\text{Re}} + \left(\frac{361}{44.32} + \frac{761}{12\text{Re}^2} + \frac{324}{5\text{Re}^4} \right) \frac{T^6}{\text{Re}^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

The dissipation rate is written in the following form:

$$W = \mu \frac{3U_0^2 a^2}{4} W' \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} W' = & \left(\frac{5}{48} + \frac{18T^2}{\text{Re}^2} \right) T^2 - \left(\frac{5}{3} + \frac{36}{\text{Re}^2} \right) \frac{T^3}{\text{Re}} + 1 - \frac{6T}{\text{Re}} + \\ & + \left(\frac{50}{99.64} + \frac{1835}{9.16\text{Re}^2} + \frac{54}{\text{Re}^4} \right) T^4 - \left(\frac{361}{44.32} + \frac{761}{12\text{Re}^2} + \frac{324}{5\text{Re}^4} \right) \frac{T^5}{\text{Re}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Simulation at different Reynolds numbers was compared with the analytical solution of the Taylor-Green vortex problem from the point of view of: the average kinetic energy and the average dissipation rate of the turbulent flow. Figure 2 compares the average turbulent kinetic energy obtained in this paper with the analytical solution of the Taylor-Green vortex problem for different Reynolds numbers. The results obtained by analytical solution of short-time theory of TG, spectral methods at 256^3 grid resolution and hybrid finite difference method at 64^3 grid resolution show a satisfactory agreement till $T = 3$ at $Re = 100$, and till $T = 4$ at $Re = 300$, and $Re = 600$ for the average turbulent kinetic energy. The error between analytical and numerical solutions for the average kinetic energy was defined as: $\text{Error}(E_k) = |E_k^{HFDM} - E_k^{TG}| = 10^{-4}$.

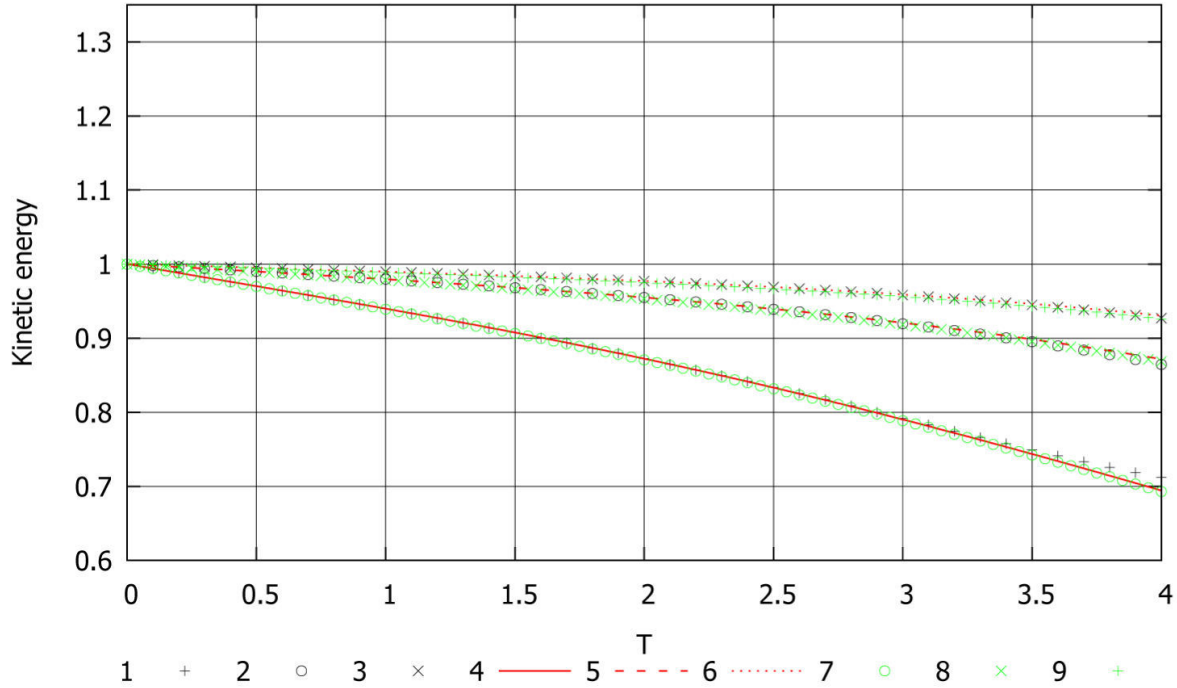


Figure 2 – Comparative results of modeling the evolution of the average kinetic energy in time, spectral and hybrid methods of modeling the Taylor-Green vortex of: TG short-time theory at: 1) $Re=100$; 2) $Re=300$; 3) $Re=600$; Spectral method, 256^3 at: 4) $Re=100$; 5) $Re=300$; 6) $Re=600$; HFD method at: 7) $Re=100$; 8) $Re=300$; 9) $Re=600$.

Fig. 2. Comparative results of modeling the evolution of the average kinetic energy in time, spectral and hybrid methods of modeling the Taylor-Green vortex of: TG short-time theory at: 1) $Re = 100$; 2) $Re=300$; 3) $Re= 600$; Spectral method, 256^3 at: 4) $Re=100$; 5) $Re=300$; 6) $Re=600$; HFD method, 64^3 at: 7) $Re=100$; 8) $Re=300$; 9) $Re=600$.

Figure 3 compares the results of average rate of dissipation of the turbulence decay with respect to time of the numerical simulation, and the analytical solution of the Taylor-Green vortex problem at different Reynolds number. It can be seen from Figure 3 that the short-term theoretical results and numerical simulation results are in good agreement till $T = 2.5$ for $Re = 100$, and $T = 2$ for $Re = 300$; $Re = 600$. It is difficult to compare the analytical solution with numerical simulation, since the analytical solution valid only for short-term time, and the numerical solution can provide good results for long term, so it is worthwhile to compare simulation results of spectral method and HFD method for long term. The rate of dissipation increases sharply due to the formation of small-scale flow structures and reaches a maximum at $T = 3$, for short time theory of TG at $Re = 100$, and at $T = 4$ for other case, and then the rate of dissipation shows a decrease in the tendency for result of analytical solution of TG at $Re = 100$ because of the decrease in the total Reynolds number of the stream. In the simulation results, the error between analytical and numerical solutions for the average dissipation rate is: $Error(\epsilon) = |\epsilon^{HFD} - \epsilon^{TG}| = 10^{-2}$.

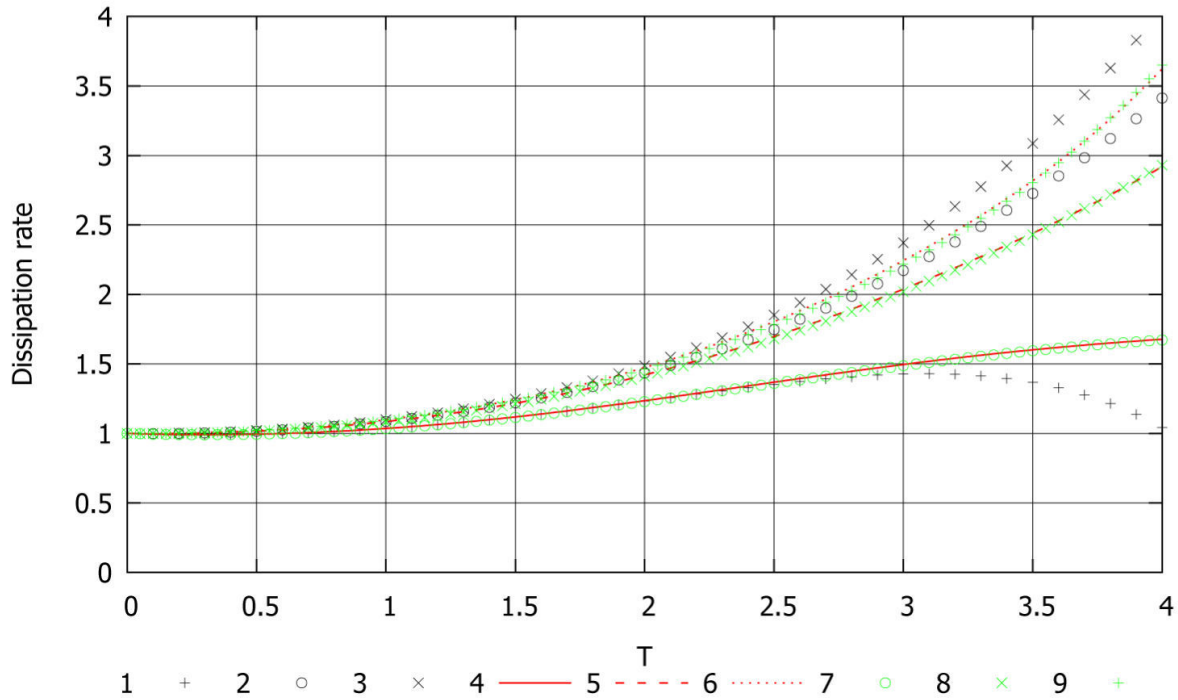


Figure 3 – Comparative results of modeling the evolution of the average rate of dissipation of the decay of turbulence in time, the spectral and hybrid methods of modeling the Taylor-Green vortexof: TG short-time theory at: 1) $Re=100$; 2) $Re=300$; 3) $Re=600$; Spectral method, 256^3 at: 4) $Re=100$; 5) $Re=300$; 6) $Re=600$; HFD method at: 7) $Re=100$; 8) $Re=300$; 9) $Re=600$.

5 Results and discussion

The numerical model allows one to describe the influence of electron concentration on the dynamics of changes in the inhomogeneities of the E-layer of the ionosphere under nonisothermal conditions. The mathematical model of the problem is based on solving non-stationary equations of magnetohydrodynamics with filtration in combination with the continuity equation, equations for temperature, equations of electron concentration, equations for the motion of charged particles, taking into account the continuity equation in a Cartesian coordinate system in dimensionless form. For this problem, the Stuart number has the following values a) $N_0 = 0$; b) $N_0 = 1$, the Rayleigh number is taken $Ra = 10^6$, and Prandtl number is $Pr=0.7$. For calculations, a grid size is taken $64 \times 64 \times 64$. The domain size are equal to $L_1 = 2\pi$; $L_2 = 2\pi$; $L_3 = 2\pi$, corresponding accord to the x_1, x_2 and x_3 directions. As a result of modeling at various Stuart numbers Rayleigh Benard convection is obtained. At figure 4-9 it is shown temperature convection at different Stuart number, and at different sections. It is seen, that with the increase interaction number, the development of heat transfer flow is more stable and static than where it is neglected. Heat transfer is largely suppressed by an external magnetic field. Convection flow will completely disappear under the action of the inhibitory force of the magnetic field.

In this study, to construct a mathematical model of the influence of electron concentration on the dynamics of changes in the heterogeneity of the E-layer of the ionosphere under non-

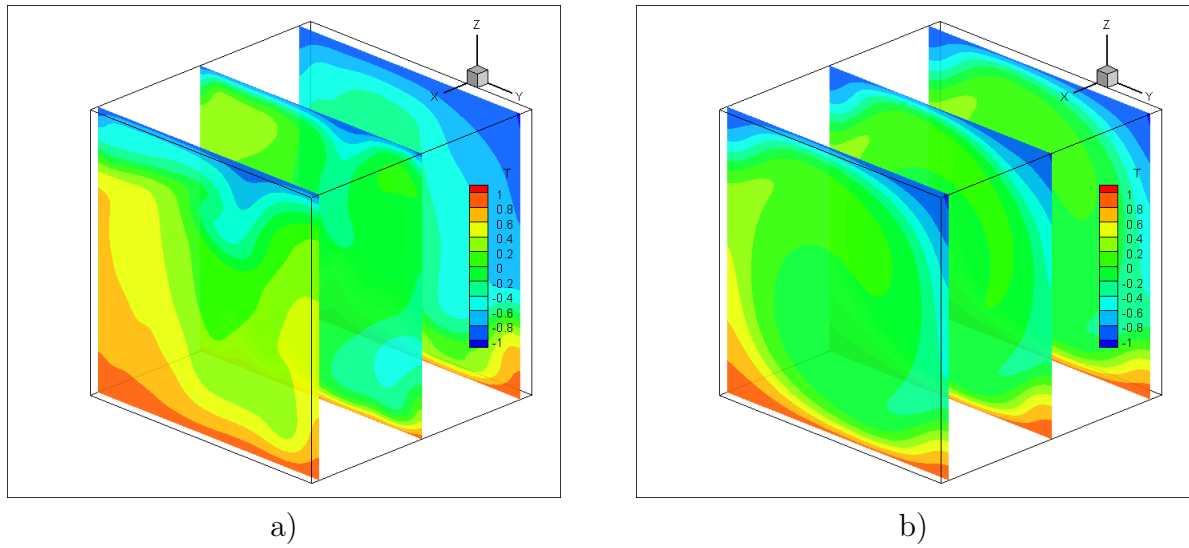


Figure 4 – Temperature contour of the turbulent flow for different interaction coefficients a) $N_0 = 0$ and $N_0 = 1$ at different sections: $x_1 = 0.05$; $x_1 = 0.5$; $x_1 = 0.95$.

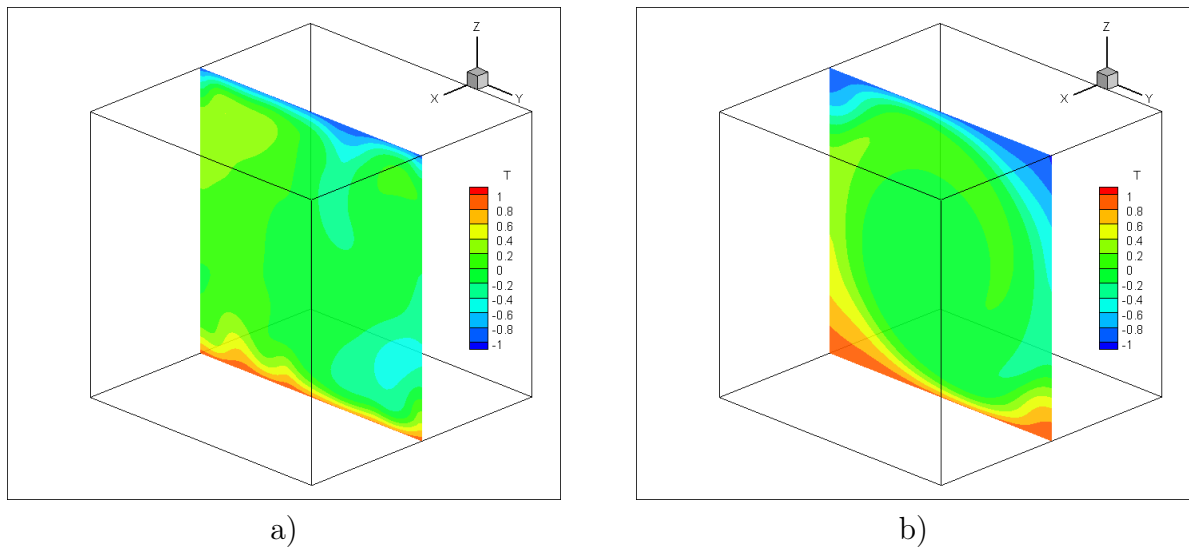


Figure 5 – Temperature contour of the turbulent flow for different interaction coefficients a) $N_0 = 0$ and $N_0 = 1$ at $x_1 = 0.5$.

isothermal conditions, we consider an incompressible electrically conductive medium with different electron concentration at the three dimensional area. To construct a mathematical model of the influence of external disturbances on the generation and evolution of large-scale inhomogeneities in the E-layer of the ionosphere, the motion of the electron concentration under the influence of a magnetic field, regardless of its strength directed horizontally along the axis, heat transfer were also considered.

The magnetohydrodynamic equation system is used for modeling of ionosphere processes. The numerical algorithm for the solution of three-dimensional mathematical model of the influence of the electron concentration on the dynamics of the ionosphere E-layer under non-

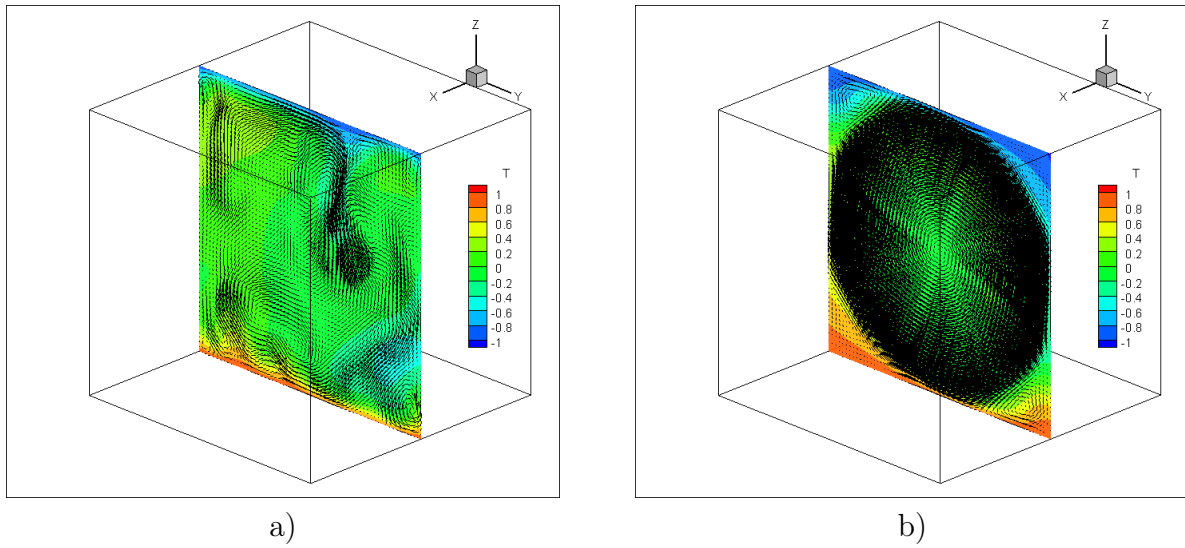


Figure 6 – Isotherms for different interaction coefficients a) $N_0 = 0$ and $N_0 = 1$ at $x_1 = 0.5$.

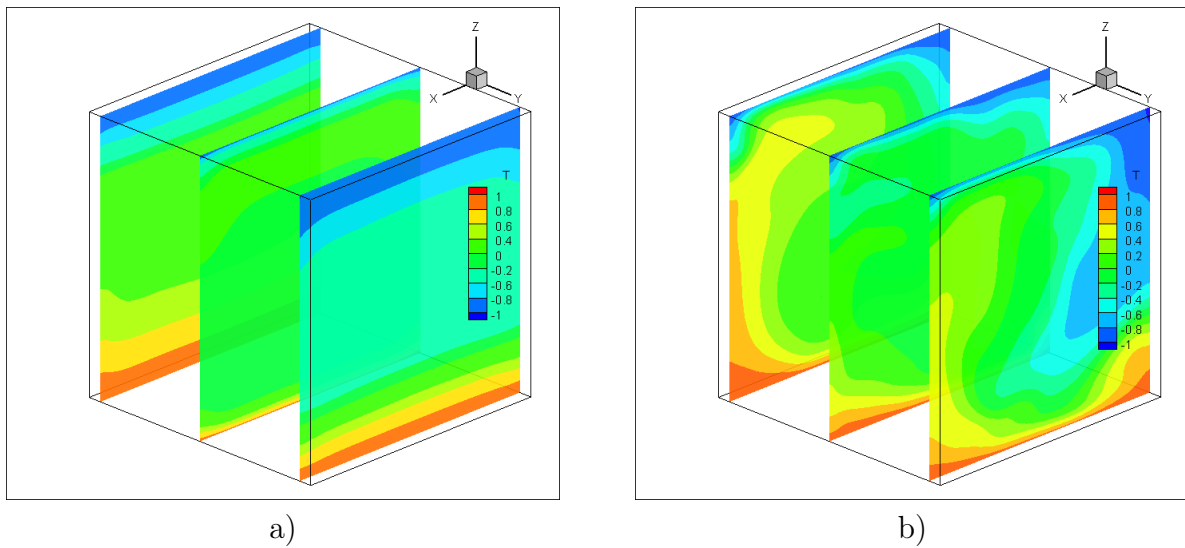


Figure 7 – Temperature contour of the turbulent flow for different interaction coefficients a) $N_0 = 0$ and $N_0 = 1$ at different sections $x_2 = 0.05; x_2 = 0.5; x_2 = 0.95$

isothermal condition is developed. For approximation of the convective and diffusion terms of the intermediate velocity field a finite-difference method in combination with penta-diagonal matrix is used, which allowed to reach fourth-order accuracy in space and third-order accuracy in time. For the solution of pressure the Poisson equation is solved, which ensures that the continuity equation is satisfied. The Poisson equation is transformed from the physical space into the spectral space by using a Fourier transform. The equation for temperature and electron concentration are solved by using Adams-Bashforth scheme. The concentration of electrons under the influence of a horizontal magnetic field shows, that the three-dimensional instability of convection flow with the increasing Stuart number, the development of heat

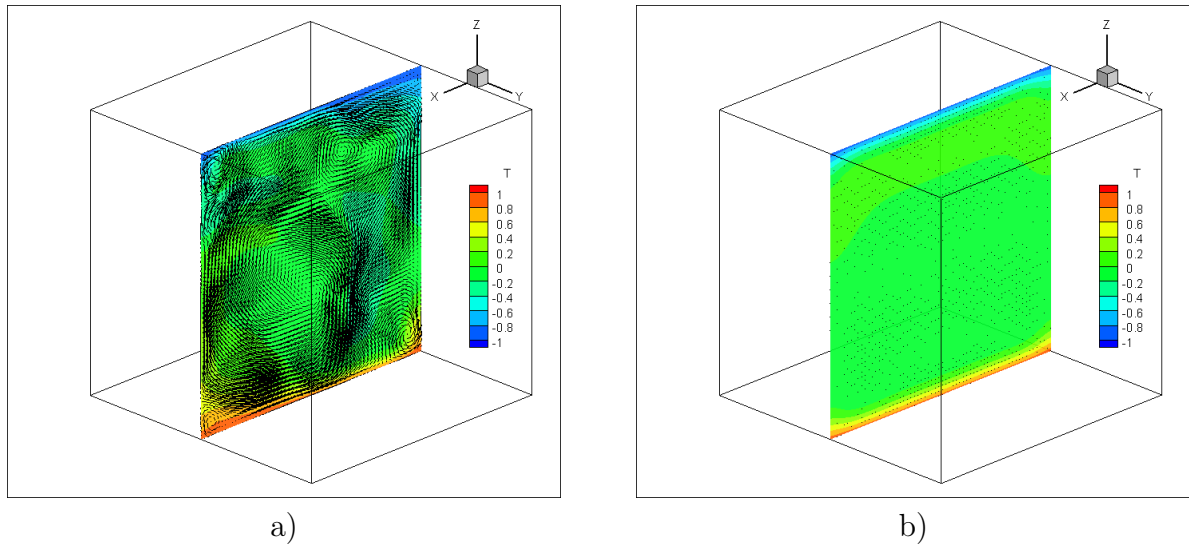


Figure 8 – Isotherms for different interaction coefficients a) $N_0 = 0$ and $N_0 = 1$ at $x_2 = 0.5$ section.

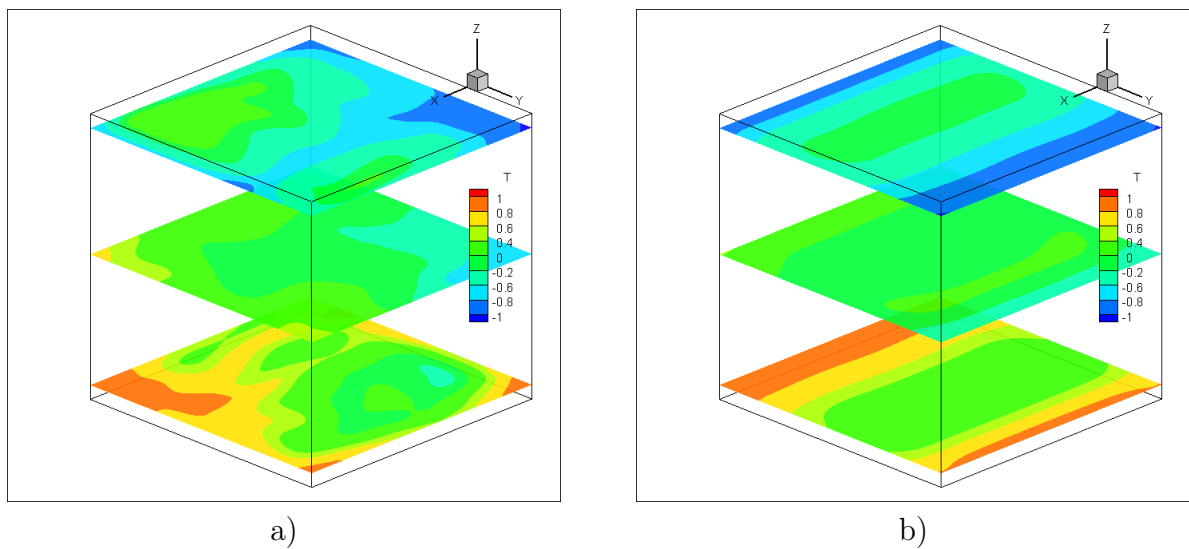


Figure 9 – Temperature contour of the turbulent flow for different interaction coefficients a) $N_0 = 0$ and $N_0 = 1$ at different sections $x_3 = 0.05$; $x_3 = 0.5$; $x_3 = 0.95$

transfer flow is more stable and static than where, the Stuart number is neglected. Heat transfer is largely suppressed by an external magnetic field. Convection flow will completely disappear under the action of the inhibitory force of the magnetic field.

Before investigating the influence of the magnetic field on the flow, the adequacy of the numerical algorithm was checked without applying a magnetic field. For this purpose, the Taylor Green test problem was carried out for various Reynolds numbers, where it has a good agreement with the Benchmark spectral method and analytical solutions.

6 Acknowledgment

The work was supported by grant financing of scientific and technical programs and projects by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan Grant No. AP05133516 Development of a three-dimensional mathematical model of the effect of electron concentration on the dynamics of changes in the inhomogeneities of the ionosphere E-layer in the dependence of solar radiation intensity \mathcal{E}_0 from the RI MM of RSE with the right of economic management Kazakh National University named after Al-Farabi.

References

- [1] Ossakow S.L. "Ionospheric Irregularities," *Rev. Geophys. Space Phys.* 17,(1979):521.
- [2] Fejer B.G. and Kelley M.C. "Ionospheric Irregularities," *Rev. Geophys. Space Phys.* 18,(1980): 401-454.
- [3] Huba J. D., Hassam A. B., Schwartz, I. B., Keskinen, M. J. "Ionospheric turbulence - Interchange instabilities and chaotic fluid behavior," *Geophysical Research Letters* 12,(1985): 65-68.
- [4] Saltzman B. "Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I," *J. Atmos. Sci* 19,(1962): 329.
- [5] Lorenz E.N. "Deterministic nonperiodic flow" *J. Atmos. Sci.* 20,(1963): 130-141.
- [6] Hassam A. B., Hall, W., Huba, J. D., and Keskinen, M. J. "Spectral characteristics of interchange turbulence," *J. Geophys. Res.*,91(13), (1986):513-522.
- [7] Benard H., "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide" *Rev. Gen. Sci. pures et appl.* 11(1900): 1261-1271, 1309-1328.
- [8] Rayleigh L., "On the convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side," *Phil. Mag.* 32(1916): 529-546.
- [9] Burattini P., Zikanov O. and Knaepen B., "Decay of magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number" *Fluid Mechanics* 657(2010): 502-38.
- [10] Knaepen B., Kassinos S. and Carati D., "Magnetohydrodynamic turbulence at moderate magnetic Reynolds number" *Fluid Mechacincs* 513(3)(2004): 199-220.
- [11] Moreau, R., "Magnetohydrodynamics" *Kluwer Academic* (Dordrecht: 1990).
- [12] Davidson, P. A., "An Introduction to Magnetohydrodynamics" *Cambridge University Press* (Cambridge: 2001)
- [13] Vorobev, A., Zikanov, O., Davidson, P., Knaepen, B., "Anisotropy of magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number," *J. Physics of fluids*, 7(2005): 125105.
- [14] Saijadi, H., Amri Delouei, A., Sheikholeslami, M., Atashafrooz., M., Succi, S., *J. Physica A* 515 (2019):474-496.
- [15] Abdibekova, A., Zhakebayev, D., Abdigaliyeva, A., Zhubat, K. "Modeling of turbulence energy decay based on hybrid methods," *J. Engineering Computations* 35(5)(2018): 1965-1977.
- [16] Zhakebayev D., Zhumagulov B. and Abdibekova A., "The decay of MHD turbulence depending on the conductive properties of the environment," *Magnetohydrodynamics* 50(2)(2014): 121-38.
- [17] Taylor G.I. and Green A.E., "Mechanism of production of small eddies from large ones," *Proceedings of the royal society, Mathematics and physical sciences* 158(895)(1937): 499-521.

MPHTI 27.41.19

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.09>**Д.Р. Байгереев¹, Н.М. Темирбеков^{2*}, Д.А. Омариева³**¹Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан²Национальная инженерная академия РК, г. Алматы, Казахстан³Восточно-Казахстанский государственный технический университет
им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан*e-mail: temirbekov@rambler.ru

ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Данная статья посвящена построению и исследованию конечно-элементного метода решения двумерного нелинейного уравнения эллиптического типа. Уравнения данного типа возникают при решении многих прикладных задач, включая задачи теории многофазной фильтрации, теории полупроводниковых приборов и многих других. Актуальность исследования данной проблемы связана с необходимостью разработки эффективных параллельных методов решения указанной задачи. Для дискретизации уравнения используется смешанный метод конечных элементов с элементами Brezzi-Douglas-Marini. Исследован вопрос о сходимости конечно-элементного метода. Для линейаризации уравнения построен итерационный метод Пикара. В работе использовано два класса базисных функций конечных элементов. Проведен сравнительный анализ эффективности нескольких прямых и итерационных методов решения полученной системы линейных алгебраических уравнений, включая метод, основанный на LDLt-факторизации Bunch-Kaufman, метод минимальных невязок, симметричный LQ-метод, стабилизированный метод бисопряженных градиентов, и ряд других итерационных алгоритмов подпространства Крылова с предобуславливателями на основе неполного LU-разложения. Метод апробирован на нескольких модельных задачах посредством сравнения приближенного решения задачи с известным точным решением. Представлены результаты анализа погрешности метода в различных нормах в зависимости от диаметра сетки.

Ключевые слова: смешанный метод конечных элементов; нелинейное уравнение Пуассона; априорная оценка; итерационный метод; элементы Brezzi-Douglas-Marini

Д.Р. Байгереев¹, Н.М. Темирбеков^{2*}, Д.А. Омариева³¹С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Өскемен қ., Қазақстан²Қазақстан Республикасының Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы қ., Қазақстан³Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік техникалық университеті,
Өскемен қ., Қазақстан*e-mail: temirbekov@rambler.ru

Аралас ақырлы элементтер әдісінің негізінде эллиптикалық типтегі сызықты емес теңдеуді шешудің итерациялық әдісін құру

Бұл мақала эллиптикалық типтегі екі өлшемді сызықты емес теңдеуді шешудің ақырлы элементті әдісін құруға және зерттеуге арналған. Бұл типтегі теңдеулер көпфазалы фильтрация теориясының, жартылай өткізгіш аспаптар теориясының және басқа да көптеген есептерді шешуде пайда болады. Бұл мәселені зерттеудің өзектілігі осы есепті шешудің тиімді параллельді әдістерін құру қажеттілігімен байланысты. Теңдеуді дискретизациялау үшін Brezzi-Douglas-Marini элементті аралас ақырлы элементтер әдісі қолданылды. Ақырлы элементті әдістің жинақтылығы мәселесі зерттеледі. Теңдеуді сызықты түрге келтіру үшін

Пи́кар итерациялық әдісі пайдаланған. Жұмыста ақырлы элементтер әдісі базистік функциясының екі класы пайдаланылды. Алынған сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің бірнеше тура және итерациялық әдістерінің тиімділігіне салыстырмалы талдау жүргізілді, соның ішінде, Bunch-Kaufman LDLt-факторизациясына негізделген әдіс, ең кіші қиыспаушылық әдісі, симметриялы LQ-әдісі, стабилизацияланған би-түйіндес градиенттер әдісі және толық емес LU-жіктелуге негізделген көмекші әдістері пайдаланған Крылов ішкі кеңістіктері итерациялық алгоритмдері. Жұық және белгілі дәл шешімді салыстыру арқылы әдіс бірнеше модельдік есептерде сынақтан өткізілді. Тор диаметрінен тәуелді әр түрлі нормалардағы әдіс қателігін талдау нәтижелері келтірілген.

Түйін сөздер: аралас ақырлы элементтер әдісі; сызықты емес Пуассон теңдеуі; априорлық бағалау; итерациялық әдіс; Brezzi-Douglas-Marini элементтері

D.R. Baigereyev¹, N.M. Temirbekov^{2*}, D.A. Omariyeva³

¹S. Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

²National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

³D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

*e-mail: temirbekov@rambler.ru

Construction of an iterative method for solving a nonlinear elliptic equation based on a mixed finite element method

This article is devoted to the construction and study of the finite element method for solving a two-dimensional nonlinear equation of elliptic type. Equations of this type arise in solving many applied problems, including problems of the theory of multiphase filtering, the theory of semiconductor devices, and many others. The relevance of the study of this problem is associated with the need to develop effective parallel methods for solving this problem. To discretize the equation, a mixed finite element method with Brezzi-Douglas-Marini elements is used. The issue of the convergence of the finite element method is investigated. To linearize the equation, the Picard iterative method is constructed. Two classes of basis functions of finite elements are used in the paper. A comparative analysis of the effectiveness of several direct and iterative methods for solving the resulting system of linear algebraic equations is carried out, including the method based on the Bunch-Kaufman LDLt factorization, the method of minimal residuals, the symmetric LQ method, the stabilized biconjugate gradient method, and a number of other iterative Krylov subspace algorithms with preconditioners based on incomplete LU decomposition. The method has been tested on several model problems by comparing an approximate solution with a known exact solution. The results of the analysis of the method error in various norms depending on the diameter of the mesh are presented.

Key words: mixed finite element method; nonlinear Poisson equation; a priori estimate; iterative method; Brezzi-Douglas-Marini elements.

1 Введение

Нелинейные уравнения эллиптического типа возникают при решении многих прикладных задач. Уравнения данного типа используются при моделировании электростатической плазмы, в теории полупроводниковых приборов, в задачах определения электрического потенциала в бесстолкновительных тангенциальных разрывах замагниченной плазмы и многих других. Кроме того, одним из важных примеров, приводящих к решению уравнения данного типа, являются различные обобщения закона Дарси, используемого при моделировании движения многофазной жидкости в пористой среде.

При исследовании уравнений данного типа, авторы статьи мотивированы решением задачи двухфазной неравновесной фильтрации в более общем случае, когда пористость среды может явно зависеть от давления. Это превращает классические уравнения

фильтрации в систему уравнений, включающую нелинейное уравнение Пуассона. Данное обобщение изучалось, например, в [1].

Целью настоящей работы является построение и исследование конечно-элементного метода решения двумерного нелинейного уравнения Пуассона. При дискретизации рассматриваемого уравнения используется смешанный метод конечных элементов с элементами Brezzi-Douglas-Marini. В работе получена априорная оценка решения, из которой следует сходимость конечно-элементного метода. Для линеаризации уравнения используется итерационный метод. Кроме того, приведен сравнительный анализ эффективности двенадцати прямых и итерационных методов решения систем линейных уравнений, полученных в результате выполнения итерации. В заключение приводятся результаты решения нескольких модельных задач с использованием построенного метода.

2 Обзор литературы

Смешанный метод конечных элементов является одним из широко используемых методов решения уравнений эллиптического типа. Суть данного метода заключается в снижении порядка заданного уравнения посредством введения новых переменных. В большинстве случаев данные переменные имеют некоторый физический смысл, так как они связаны с производными искомых функций. Построению конечно-элементных методов решения нелинейных уравнений эллиптического типа посвящено множество исследований. Например, в работе [2] построен конечно-элементный метод решения уравнения Пуассона с нелинейной правой частью в единичном круге. Известны применения смешанного метода конечных элементов [3] для решения задач двухфазной фильтрации [4], уравнений Стокса [5], задач электроэнцефалографии [6] и других.

Применение смешанного метода конечных элементов приводит к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Одним из простейших методов линеаризации полученной задачи является итерационный метод Пикара. Известны применения данного метода при реализации модели Дарси-Форхгеймера [7], при решении задач поропругости [8], при решении уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости [9], нелинейного уравнения Ричардса [10, 11], задачи фильтрации с модифицированным законом Дарси [12], задачи фильтрации с пористостью, зависящей от давления [1], системы уравнений диффузии-реакции [13], модели мелкой воды [14]. Известны также многочисленные модификации метода Пикара для улучшения свойств сходимости, например, в задачах моделирования инфильтрации в сухую почву [15], уравнения Ричардса [16] и другие.

Ряд работ посвящены исследованию производительности алгоритмов решения системы линейных алгебраических уравнений. Например, работа [17] посвящена исследованию производительности алгоритмов Bunch-Kaufman, Aasen решения указанных систем уравнений. В [18–21] и в ряде других работ исследуются итерационные методы подпространства Крылова для решения данных систем.

3 Материал и методы

3.1 Постановка задачи

В ограниченной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, рассматривается задача

$$-\nabla \cdot (\alpha^{-1}(p) \nabla p) + b(x, p) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$-\nabla p \cdot \vec{n} = g_N, \quad x \in \Gamma_N, \quad (2)$$

$$p = g_D, \quad x \in \Gamma_D, \quad (3)$$

где p – функция, подлежащая определению, \vec{n} – внешняя единичная нормаль к границе. Предположим, что

$$0 < c_0 \leq \alpha(x) \leq c_1, \quad \frac{d\alpha}{dp}, \frac{\partial b}{\partial p} \in L^\infty(\Omega), \quad (4)$$

$$f \in L^2(\Omega), \quad g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D), \quad g_N \in L^2(\Gamma_N). \quad (5)$$

Определим функциональные пространства

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \vec{\tau} \in L^2(\Omega)^2 : \nabla \cdot \vec{\tau} \in L^2(\Omega) \},$$

$$V = \{ \vec{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \vec{\tau} \cdot \vec{n} = g_N \text{ на } \Gamma_N \}.$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\begin{cases} \alpha(p) \vec{u} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} + b(x, p) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Предположим, что $\vec{u} \in L^2(\Omega)^2$. Умножая первое уравнение системы (6) на $\vec{\tau} \in V$, а второе – на $v \in L^2(\Omega)$, с учетом граничных условий (2), (3) получим следующую слабую постановку задачи (1)-(3):

$$\begin{cases} (\alpha(p) \vec{u}, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, p) = -(\vec{\tau} \cdot \vec{n}, g_D)_{\Gamma_D}, & \forall \vec{\tau} \in V, \\ (\nabla \cdot \vec{u}, v) + (b(x, p), v) = 0, & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (7)$$

3.2 Смешанный метод конечных элементов

В области Ω введем триангуляцию \mathcal{T} . Для каждого элемента $K \in \mathcal{T}$ обозначим через $P_k(K)$ пространство многочленов на K со степенью меньше или равно k . Определим пространство конечных элементов BDM_1 в виде

$$\operatorname{BDM}_1 = \left\{ \vec{\tau} : \vec{\tau}|_K \in P_1(K)^2 \quad \forall K \in \mathcal{T} \right\}$$

и пусть

$$V_h = \operatorname{BDM}_1 \cap V.$$

Определим пространство кусочно-постоянных функций W_h в виде

$$W_h = \left\{ v : v \Big|_K \in P_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{T} \right\}.$$

Пусть \mathcal{T}_N – одномерная сетка, порожденная триангуляцией \mathcal{T} на границе Γ_N . Определим пространство

$$P_1(\mathcal{T}_N) = \left\{ v : v \Big|_E \in P_1(E) \quad \forall E \in \mathcal{T}_N \right\}.$$

Пусть $g_{N,h}$ – это L^2 -проекция граничного значения g_N на $P_1(\mathcal{T}_N)$.

Тогда смешанный метод конечных элементов $\text{BDM}_1 - W_h$ заключается в нахождении $(\vec{u}_h, p_h) \in \text{BDM}_1 \times W_h$ с условием $\vec{u}_h \cdot \vec{n} = g_{N,h}$ на Γ_N таких, что

$$\begin{cases} (\alpha(p_h) \vec{u}_h, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, p_h) = -(\vec{\tau} \cdot \vec{n}, g_D)_{\Gamma_D}, & \forall \vec{\tau} \in V_h, \\ (\nabla \cdot \vec{u}_h, v) + (b(x, p_h), v) = 0, & \forall v \in W_h. \end{cases} \quad (8)$$

Существуют операторы проекции [22]

$$\Pi_h : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow V_h, \quad P_h : L^2(\Omega) \rightarrow W_h,$$

такие что

$$(\nabla \cdot \Pi_h \vec{u}, v) = (P_h \nabla \cdot \vec{u}, v), \quad \forall \vec{u} \in H(\text{div}; \Omega), \quad \forall v \in W_h. \quad (9)$$

Кроме того, выполняются следующие оценки [22]:

$$\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\| \leq c_3 h^{k+1} |\vec{u}|_k, \quad \vec{u} \in H^{k+1},$$

$$\|\nabla \cdot (\vec{u} - \Pi_h \vec{u})\|^2 \leq c_3 h^k |\nabla \cdot \vec{u}|_k,$$

$$\|v - P_h v\| \leq c_4 h^k |v|_k.$$

Известно, что для элементов Brezzi-Douglas-Marini $k = 1$. Здесь и ниже используются стандартные обозначения из работы [23].

Лемма 1 [23]. Пусть $v \in W_h$. Тогда существует $\vec{\tau} \in V_h$ такое, что

$$\nabla \cdot \vec{\tau} = v, \quad \|\vec{\tau}\| \leq c_5 \|v\|.$$

Теорема 1 При выполнении условий (4)-(5) и условия $\|\vec{u}\| \leq u_0$, $u_0 = \min \left\{ \sqrt{c_1}, \frac{3}{16} \right\}$, существует постоянная $\nu_1 > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|^2 + \|p - p_h\|^2 \leq \nu_1 (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2). \quad (10)$$

Доказательство. Обозначим $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_h$, $\eta = p - p_h$. Вычитая (8) из (7), после несложных преобразований получим уравнения для погрешности:

$$\left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{\tau} \right) + ((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, \eta) = 0, \quad \forall \vec{\tau} \in V_h, \quad (11)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{\xi}, v \right) + (b(x, p) - b(x, p_h), v) = 0, \quad \forall v \in W_h. \quad (12)$$

Положим $\vec{\tau} = \Pi_h \vec{\xi}$ в уравнении (11) и $v = P_h \eta$ в уравнении (12), и сложим полученные уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \Pi_h \vec{\xi} \right) + \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \Pi_h \vec{\xi} \right) - \\ & - \left(\nabla \cdot \Pi_h \vec{\xi}, \eta \right) + \left(\nabla \cdot \vec{\xi}, P_h \eta \right) + (b(x, p) - b(x, p_h), P_h \eta) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу условия (9) третье и четвертое слагаемые в левой части (13) уничтожаются. Представим уравнение (13) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{\xi} \right) - \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{u} - \Pi_h \vec{u} \right) + \\ & + \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{\xi} \right) - \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{u} - \Pi_h \vec{u} \right) + \\ & + (b(x, p) - b(x, p_h), \eta) - (b(x, p) - b(x, p_h), p - P_h p) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценив скалярные произведения в тождестве (14), используя неравенство Коши с ε и условия (4), получим

$$\begin{aligned} & (c_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \|\vec{u}\|^2) \|\vec{\xi}\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\alpha(p) - \alpha(p_h)\|^2 + \\ & + \left(c_1 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \right) \|\eta\|^2 + C (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2). \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon_1 = \frac{c_0}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{c_0}{2c_1}$, получим, что при выполнении условия $\|\vec{u}\| < \sqrt{c_1}$ выполняется неравенство

$$\|\vec{\xi}\|^2 \leq 3\gamma \|\eta\|^2 + C (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2), \quad (15)$$

где $\gamma = \max \left\{ \frac{c_1^2}{c_0}, \frac{c_1}{2c_0}, c_1 \right\}$. Представим теперь уравнение (11) в виде

$$\left(\nabla \cdot \vec{\tau}, \eta \right) = \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{\tau} \right) + \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{\tau} \right),$$

откуда

$$\left(\nabla \cdot \vec{\tau}, \eta \right) \leq c_1 \|\vec{\xi}\| \|\vec{\tau}\| + \|\alpha(p) - \alpha(p_h)\| \|\vec{u}\| \|\vec{\tau}\|. \quad (16)$$

Выберем в (16) $\vec{\tau}$, такое что $\nabla \cdot \vec{\tau} = P_h \eta$. Согласно лемме 1, для выбранного $\vec{\tau}$ выполняется оценка $\|\vec{\tau}\| < c_5 \|P_h \eta\|$. В целях упрощения выкладок предположим, что $c_5 = (2c_1)^{-1}$. Тогда из (16) имеем

$$(P_h \eta, \eta) \leq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\xi}\| + \|\eta\| \|\vec{u}\| \right) \|P_h \eta\|. \quad (17)$$

Преобразуем левую часть неравенства (17):

$$(P_h \eta, \eta) = \|\eta\|^2 - (p - P_h p, \eta), \quad (18)$$

причем для последнего слагаемого в правой части этого равенства справедлива оценка

$$(p - P_h p, \eta) \leq \frac{1}{4\varepsilon_3} \|\eta\|^2 + C \|p - P_h p\|^2. \quad (19)$$

Обозначим правую часть неравенства (17) через λ , тогда справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{1}{2} \left(\|\xi^\top\| + \|\eta\| \|\vec{u}\| \right) \|\eta - (p - P_h p)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\xi^\top\| + \|\eta\| \|\vec{u}\| \right) (\|\eta\| + \|p - P_h p\|) \leq \\ &\leq 2\varepsilon_4 \|\xi^\top\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|^2 + \|\eta\|^2 \|\vec{u}\| + C \|p - P_h p\|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя полученные неравенства (18)-(20), из (17) получим

$$\left(\frac{1}{4} - \|\vec{u}\| \right) \|\eta\|^2 \leq 2\varepsilon_4 \|\xi^\top\|^2 + C \|p - P_h p\|^2. \quad (21)$$

Умножим (15) на некоторое малое число $\nu > 0$ и сложим его с неравенством (21):

$$(\nu - 2\varepsilon_4) \|\xi^\top\|^2 + \left(\frac{1}{4} - 3\gamma\nu - \|\vec{u}\| \right) \|\eta\|^2 \leq C (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2).$$

Выбирая $\nu = \frac{1}{48\gamma}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{192\gamma}$, получим, что при выполнении условия $\|\vec{u}\| \leq u_0 = \min \left\{ \sqrt{c_1}, \frac{3}{16} \right\}$, выполняется оценка (10). Теорема доказана.

3.3 Реализация метода

Для реализации метода (6) рассмотрим следующий итерационный процесс: найти $\vec{u}_h^{n+1} \in V_h$, $p_h^{n+1} \in W_h$ с начальным приближением $p_h^0 \in W_h$, такие что

$$\begin{cases} (\alpha(p_h^n) \vec{u}_h^{n+1}, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, p_h^{n+1}) = -(\vec{\tau} \cdot \vec{n}, g_D)_{\Gamma_D}, & \forall \vec{\tau} \in V_h, \\ (\nabla \cdot \vec{u}_h^{n+1}, v) + (b(x, p_h^n), v) = 0, & \forall v \in W_h. \end{cases} \quad (22)$$

Пусть N_e и N_n – количество элементов и узлов триангуляции \mathcal{T} ; N_r – количество ребер; N_{rc} – количество внутренних ребер; N_{rd} и N_{rn} – количество ребер, соответствующих Γ_D и Γ_N . Обозначим $M = N_{rc} + N_{rd}$.

Пусть λ_i – линейные конечно-элементные базисные функции вершины v_i , равные единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$. Для ребра $E_j = (v_s, v_t)$, где $s < t$, $j = \overline{1, N_r}$ рассмотрено два класса базисных функций:

$$\vec{\phi}_j = \left(\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_2} \quad -\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_1} \right)^\top, \quad \vec{\psi}_j = \left(-\lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_2} \quad \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_1} \right)^\top \quad (23)$$

и

$$\vec{\phi}_j = \left(\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_2} - \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_2} \quad - \lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_1} - \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_1} \right)^\top, \quad (24)$$

$$\vec{\psi}_j = \left(\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_2} + \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_2} \quad - \lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_1} - \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_1} \right)^\top. \quad (25)$$

Пусть V_h – линейная оболочка векторов $\vec{\phi}_j, \vec{\psi}_j, j = \overline{1, M}$. Базис пространства P_0 на элементе $K_j \in \mathcal{T}$ определим в виде

$$1_j = \{1, x \in K_j; 0, x \notin K_j\}. \quad (26)$$

Решение $(\bar{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \text{BDM}_1 \times W_h$ задачи (22) будем искать в виде

$$\bar{u}_h^{n+1} = \bar{u}_0^{n+1} + \bar{u}_N^{n+1}, \quad \bar{u}_0^{n+1} = \sum_{j=1}^M \left(u_j^{n+1} \vec{\phi}_j + u_{N_r+j}^{n+1} \vec{\psi}_j \right),$$

$$\bar{u}_N^{n+1} = \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(u_j^{n+1} \vec{\phi}_j + u_{N_r+j}^{n+1} \vec{\psi}_j \right), \quad p_h^{n+1} = \sum_{k=1}^{N_e} p_k^{n+1} 1_k.$$

Тогда решение задачи (22) сводится к решению системы линейных уравнений

$$AX = B, \quad (27)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} R(p_h^n) & S^T(p_h^{n+1}) \\ S(p_h^{n+1}) & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} F \\ G(p^n) \end{pmatrix}$$

с элементами

$$R_{i,j} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\phi}_j \right), \quad R_{i,j+M} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\psi}_j \right), \quad R_{i+M,j} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\phi}_j \right),$$

$$R_{i+M,j+M} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j \right), \quad S_{m,j} = - \left(\nabla \cdot \vec{\phi}_j, 1_m \right), \quad S_{m,j+M} = - \left(\nabla \cdot \vec{\psi}_j, 1_m \right),$$

$$F_i = - \left(\vec{\phi}_i \cdot \vec{n}, g_D \right)_{\Gamma_D} - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\phi}_j \right) u_j - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\psi}_j \right) u_{N_r+j},$$

$$F_{M+i} = - \left(\vec{\psi}_i \cdot \vec{n}, g_D \right)_{\Gamma_D} - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\phi}_j \right) u_j - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j \right) u_{N_r+j},$$

$$G_m = - \left(b(x, p_h^n), 1_m \right) + \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\nabla \cdot \vec{\phi}_j, 1_m \right) u_j + \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\nabla \cdot \vec{\psi}_j, 1_m \right) u_{N_r+j},$$

где $i = \overline{1, M}, j = \overline{1, M}, m = \overline{1, N_e}$.

При использовании базисных функций (23), (26) матрица полученной системы линейных уравнений является сильно разреженной, симметричной, но не положительно определенной. При решении систем уравнений проведено сравнение как прямых, так и итерационных методов. Рассмотрен один из широко применяемых прямых методов, основанный на блочной LDL^T -факторизации Bunch-Kaufman матрицы A [17]. Алгоритм LSS основан на приведении системы (27) к нормальному виду и определении решения в виде $X = Z^{-1}A^TB$, где Z – разложение Холецкого матрицы A^TA . Также проведены сравнительные расчеты с использованием LU- и QR-разложений матрицы A . Из итерационных методов, используемых для решения указанных систем, выбраны методы подпространства Крылова: метод минимальных невязок MINRES, симметричный LQ-метод SYMMLQ и метод MINRES_QLP [20]. При выборе базисных функций (24), (25), (26) проведены сравнительные расчеты с использованием итерационных алгоритмов подпространства Крылова: метода обобщенных минимальных невязок GMRES и стабилизированного метода бисопряженных градиентов BiCGSTAB с предобуславливателем на основе неполного LU-разложения (ILU), а также метода квазимиимальных невязок QMR.

4 Результаты и обсуждение

Задача 1 В области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ рассмотрим задачу

$$-\nabla^2 p + \sin p = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y + \sin(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$p(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Точное решение задачи имеет вид $p(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$. В качестве начального приближения для итерационного процесса (22) принималось значение $p_h^0(x, y) \equiv 0$. Итерационный процесс (22) прерывался при достижении условия $\max_{(x,y) \in \Omega} |p^{n+1}(x, y) - p^n(x, y)| \leq 10^{-9}$. Для достижения указанной точности в задаче 1 потребовалось 8 итераций. При решении системы (27) итерационными методами итерации прерывались также при достижении точности вычислений 10^{-9} .

Вычисления проводились на компьютере с 16-ядерным процессором Intel Xeon Silver 4114 с тактовой частотой 2.20GHz и 16 ГБ ОЗУ. Программная реализация всех алгоритмов выполнена на высокопроизводительном языке программирования Julia 1.4. В таблице 1 приведено среднее время, требуемое для решения одной системы линейных уравнений, полученной в результате выполнения одной итерации (22) для задачи 1. В верхней части таблицы указано количество конечных элементов в триангуляции \mathcal{T} , а в скобках – порядок полученной матрицы A в системе уравнений (27).

При выборе базисных функций (23), (26) среди прямых алгоритмов решения систем уравнений, полученных в результате выполнения одной итерации (22), наиболее эффективным оказался метод, основанный на блочной LDL^T -факторизации. В проведенных вычислительных экспериментах данный метод в 2-7 раз быстрее метода, основанного на LU-разложении матрицы A . Время решения методами LU и LSS приблизительно одинаково. В случае использования итерационных методов решения систем уравнений с симметричными матрицами был сделан вывод о том, что их

Таблица 1 – Среднее время, требуемое для решения одной системы линейных уравнений (27), полученной на каждой итерации (22) для задачи 1

Кол-во элементов (порядок матрицы A)	240 (1000)	952 (3888)	3794 (15336)	13310 (53540)	23876 (95904)	94866 (380264)
LU	0.008263	0.044378	0.208568	0.929519	1.779640	8.639593
LDL^T	0.001723	0.007856	0.046304	0.238556	0.499912	3.533542
LSS	0.008613	0.034221	0.155291	0.732447	1.364804	6.070330
QR	0.008126	0.044694	0.307129	1.319913	2.670939	14.830321
MINRES	0.006706	0.047629	0.449639	2.254344	4.735099	-
SYMMLQ	0.007526	0.047523	0.545891	2.603830	5.950467	-
MINRES_QLP	0.008730	0.062018	0.644768	3.511768	7.955948	63.602122
GMRES	0.013171	0.051916	0.280170	0.870254	1.506857	5.817282
GMRES (с ILU)	0.004115	0.025696	0.132673	0.409161	0.734324	3.004526
BiCGSTAB	0.020512	0.152302	1.514378	11.453303	29.096294	311.359211
BiCGSTAB (с ILU)	0.003433	0.013494	0.079570	0.496996	1.241327	9.601691
QMR	0.015429	0.117047	1.402647	7.627819	17.366689	84.799472

использование в методе (22) с базисными функциями вида (23), (26) эффективно лишь при небольших матрицах A . Кроме того, в ряде вычислительных экспериментов данные методы не достигли указанной точности 10^{-9} .

При выборе базисных функций (24), (25), (26) наиболее эффективным оказался метод GMRES с предобуславливателем на основе неполной LU-факторизации. С увеличением количества конечных элементов его эффективность соизмерима с методом LDL^T . Стабилизированный метод бисопряженных градиентов без использования предобуславливателей сходится довольно медленно. Однако с использованием предобуславливателя на основе неполной LU-факторизации его эффективность соизмерима с методом GMRES с ILU при небольших матрицах.

Следует отметить, что использование прямого метода LDL^T и итерационного метода GMRES к решению задачи 1 приводят к приблизительно одинаковой эффективности по времени. Однако в случае больших матриц использование последнего целесообразнее, так как в случае 94866 элементов для реализации LDL^T потребовалось 762.263 Мб ОЗУ, а для метода GMRES с предобуславливателем ILU – лишь 17.469 Мб ОЗУ.

В таблице 2 и рисунке 1 приведен сравнительный анализ времени, требуемого на решение задачи 1 с учетом выполнения всех итераций и времени, требуемого на вычисление элементов матрицы A и вектора B .

В таблице 3 приведен анализ погрешности метода (22) в зависимости от количества элементов. Данные результаты получены с использованием прямого метода LDL^T , однако в случае использования других методов результаты отличаются незначительно. Погрешности определялись по формуле

$$\|p - p_h\|_{L_\infty} = \max_{K \in \mathcal{T}} |p(\theta_K) - p_h(\theta_K)|,$$

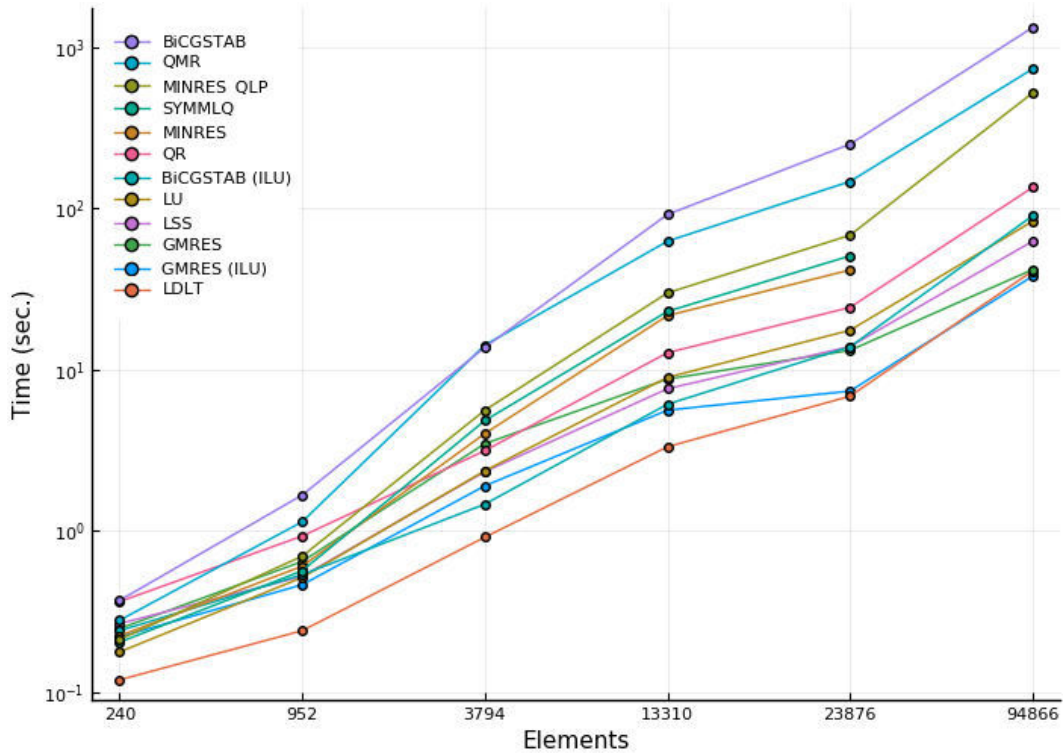


Рисунок 1 – Сравнительный анализ эффективности методов решения системы линейных уравнений $AX = B$

Таблица 2 – Общее время, требуемое для решения задачи 1

Кол-во элементов (порядок матрицы A)	240 (1000)	952 (3888)	3794 (15336)	13310 (53540)	23876 (95904)	94866 (380264)
LU	0.178074	0.515934	2.365567	8.976566	17.599724	83.433315
LDL ^T	0.119570	0.241353	0.916848	3.331936	6.861103	41.043318
LSS	0.266761	0.524083	2.335859	7.632451	13.950259	62.780053
QR	0.365704	0.931450	3.154382	12.764801	24.375187	135.451366
MINRES	0.224394	0.606001	4.026640	21.670705	41.617394	-
SYMMLQ	0.204669	0.567399	4.847013	23.030852	50.917617	-
MINRES_QLP	0.212910	0.698884	5.615440	29.983395	68.337196	521.643789
GMRES	0.248766	0.648482	3.486159	8.765271	13.206576	41.840447
GMRES (с ILU)	0.220794	0.465030	1.909329	5.619350	7.385863	38.076942
BiCGSTAB	0.372082	1.673543	13.787503	91.889559	250.746277	1326.388189
BiCGSTAB (с ILU)	0.241194	0.536927	1.469221	6.120774	13.893631	90.170172
QMR	0.279994	1.143298	14.242631	62.714071	147.327516	734.819492

$$\|p - p_h\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} (p(x) - p_h(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\bar{e}_{L_2} = \frac{\|p - p_h\|}{\|p\|} \cdot 100\% = \frac{\left(\int_{\Omega} (p(x) - p_h(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\Omega} p(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot 100\%,$$

где $p(x)$ – точное решение, $p_h(x)$ – приближенное решение, θ_K – центр треугольника K .

Таблица 3 – Анализ погрешности приближенного решения задачи 1

h	N_n	N_e	N_r	$\ p - p_h\ _{L_{\infty}}$	$\ p - p_h\ _{L_2}$	\bar{e}_{L_2}
0.1698	141	240	380	$9.222722 \cdot 10^{-3}$	$4.187039 \cdot 10^{-3}$	0.8370%
0.0775	517	952	1468	$2.366558 \cdot 10^{-3}$	$1.071524 \cdot 10^{-3}$	0.2143%
0.0421	1978	3794	5771	$6.893271 \cdot 10^{-4}$	$2.608941 \cdot 10^{-4}$	0.0521%
0.0234	6806	13310	20115	$1.927057 \cdot 10^{-4}$	$7.467197 \cdot 10^{-5}$	0.0149%
0.0168	12139	23876	36014	$1.084682 \cdot 10^{-4}$	$3.996466 \cdot 10^{-5}$	0.0079%
0.0102	47834	94866	142699	$3.827224 \cdot 10^{-5}$	$1.031525 \cdot 10^{-5}$	0.0020%

На рисунке 2 слева приведен график решения задачи 1 с использованием 94866 элементов, а справа – график погрешности.

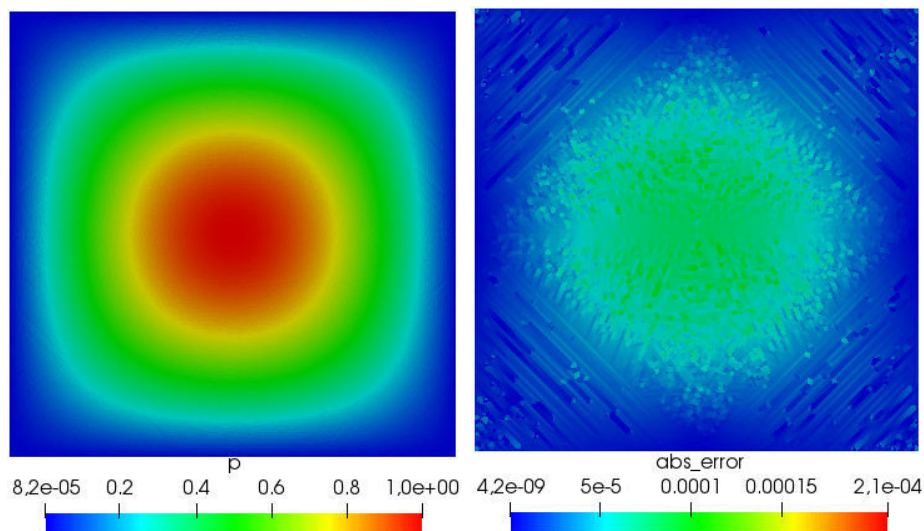


Рисунок 2 – График приближенного решения (слева) и погрешности (справа) задачи 1

В заключение приведем апостериорный анализ погрешности метода (8) для двух линейных задач в более сложных областях.

Задача 2 В треугольной области $\Omega = \left\{ (x, y) : -1 \leq x \leq 2, \frac{x-2}{\sqrt{3}} \leq y \leq -\frac{x-2}{\sqrt{3}} \right\}$,

рассмотрим задачу [24]

$$\nabla^2 p(x, y) = -2, \quad p(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

Точное решение задачи имеет вид

$$p(x, y) = \frac{9}{2} \left[\left(\frac{x}{3}\right)^3 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 3 \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{y}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \frac{4}{27} \right].$$

Таблица 4 – Анализ погрешности приближенного решения задачи 2

h	N_n	N_e	N_r	$\ p - p_h\ _{L^\infty}$	$\ p - p_h\ _{L_2}$	\bar{e}_{L_2}
0.0613	5091	9880	14970	$1.468551 \cdot 10^{-4}$	$1.307540 \cdot 10^{-4}$	0.0159%
0.0411	11395	22338	33732	$6.698606 \cdot 10^{-5}$	$5.700906 \cdot 10^{-5}$	0.0069%
0.0326	20049	39496	59544	$3.779471 \cdot 10^{-5}$	$3.261361 \cdot 10^{-5}$	0.0039%
0.0232	44683	88464	133146	$2.210973 \cdot 10^{-5}$	$1.444174 \cdot 10^{-5}$	0.0017%

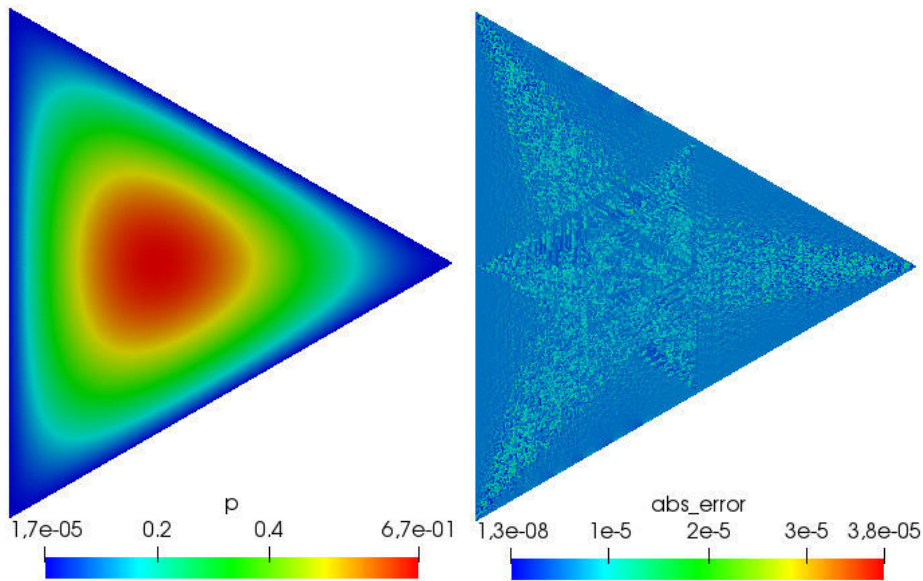


Рисунок 3 – График приближенного решения (слева) и погрешности (справа) задачи 2

Задача 3 В единичном круге рассмотрим задачу

$$\nabla^2 p(x, y) = -xy, \quad p(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

Точное решение задачи имеет вид

$$p(x, y) = \frac{xy}{12} (1 - x^2 - y^2).$$

Таблица 5 Анализ погрешности приближенного решения задачи 3

h	N_n	N_e	N_r	$\ p - p_h\ _{L_\infty}$	$\ p - p_h\ _{L_2}$	\bar{e}_{L_2}
0.0708	2023	3894	5916	$4.896409 \cdot 10^{-5}$	$2.481658 \cdot 10^{-5}$	0.2602%
0.0387	7986	15670	23655	$1.528482 \cdot 10^{-5}$	$6.200370 \cdot 10^{-6}$	0.0650%
0.0226	21879	43256	65134	$5.246527 \cdot 10^{-6}$	$2.251444 \cdot 10^{-6}$	0.0236%
0.0212	31491	62380	93870	$3.699707 \cdot 10^{-6}$	$1.554074 \cdot 10^{-6}$	0.0162%

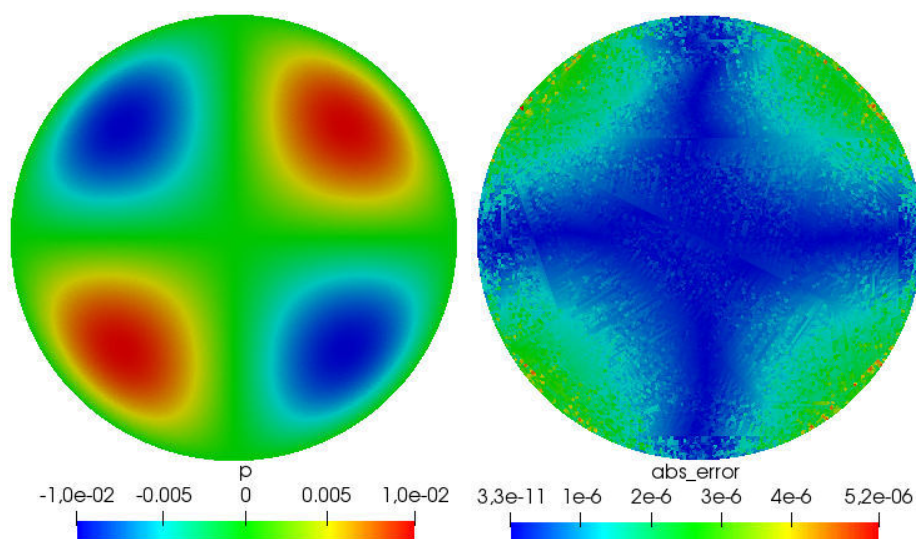


Рисунок 4 – График приближенного решения (слева) и погрешности (справа) задачи 3

5 Заключение

Таким образом, в данной работе построен итерационный метод решения одного нелинейного уравнения эллиптического типа, получена априорная оценка, из которой следует сходимость конечно-элементного метода, сделан анализ 12 прямых и итерационных методов решения системы линейных алгебраических уравнений, полученных в результате выполнения итерационного процесса.

При анализе вычислительных экспериментов сделан вывод о том, что при небольшом количестве (до 25000) конечных элементов наиболее эффективным является метод LDL^T , который для рассмотренной модельной задачи оказался в 1.5-2 раза быстрее итерационного метода GMRES с предобуславливателем ILU. Однако при более детальной триангуляции предпочтение следует отдать итерационным методам Крыловского типа с предобуславливателем, для реализации которого при равной скорости требуется меньше оперативной памяти.

Полученные результаты будут использованы при решении задачи двухфазной неравновесной фильтрации несжимаемой жидкости на основе обобщенного закона неравновесности.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерства науки и образования Республики Казахстан (грант "Разработка и исследование параллельных конечно-элементных методов решения нелинейных задач многофазной фильтрации", ИРН AP08053189, 2020-2022 годы).

Список литературы

- [1] Gatica G., Baier R. and Tierra, G. A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity // *Mathematics of Computation*. - 2015. - Vol. 297. - P. 1–33.
- [2] Atkinson K. and Hansen O. Solving the Nonlinear Poisson Equation on the Unit Disk // *Journal of Integral Equations*. - 2005. - No. 3. - P. 223-251.
- [3] Auricchio F., Veiga L., Brezzi F. and Lovadina C. Mixed finite element methods // *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*. - 2017. - No.1. - P. 1–53.
- [4] Puscas M. A., Enchery G. and Desroziere, S. Application of the mixed multiscale finite element method to parallel simulations of two-phase flows in porous media // *Oil and Gas Science and Technology*. - 2018. - Vol. 73, No. 38. - P. 1-14.
- [5] Muzhinji K., Shateyi S. and Motsa S. The Mixed Finite Element Multigrid Method for Stokes Equations // *The Scientific World Journal*. - 2015. - No. 460421. - P. 1–12.
- [6] Vorwerk J., Engwer C., Pursiainen S. and Wolters C. A mixed finite element method to solve the EEG forward problem // *IEEE transactions on medical imaging*. - 2016. - No. 4. - P. 930–941.
- [7] Spiridonov D., Huang J., Vasilyeva M., Huang Yu. and Chung, E. Mixed generalized multiscale finite element method for Darcy-Forchheimer model // *Mathematics*. - 2019. - Vol. 7, No. 1212. - P. 1–13.
- [8] Brown D. L. and Vasilyeva M. Generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems II: nonlinear coupling // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. - 2016. - Vol. 297. - P. 132–146.
- [9] Rebholz L., Viguier A. and Xiao M. Efficient nonlinear iteration schemes based on algebraic splitting for the incompressible Navier-Stokes equations // *Mathematics of Computation*. - 2019. - Vol. 88, No. 318. - P. 1533–1557.
- [10] Islam M., Hye A. and Mamun A. Nonlinear Effects on the Convergence of Picard and Newton Iteration Methods in the Numerical Solution of One-Dimensional Variably Saturated–Unsaturated Flow Problems // *Hydrology*. - 2017. - Vol. 4, No. 50. - P. 1–18.
- [11] Kuraz M., Mayer P. and Pech P. Solving the nonlinear Richards equation model with adaptive domain decomposition // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. - 2014. - Vol. 270. - P. 2-11.
- [12] Nakshatrala K. and Turner D. A mixed formulation for a modification to Darcy equation based on Picard linearization and numerical solutions to large-scale realistic problems // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. - 2013. - Vol. 14, No. 6. - P. 524–541.
- [13] Madzvamuse A. and Chung A. Fully implicit time-stepping schemes and non-linear solvers for systems of reaction–diffusion equations // *Applied Mathematics and Computation*. - 2014. - Vol. 244. - P. 361–374.
- [14] Muccino J. and Luo H. Picard iterations for a finite element shallow water equation model // *Ocean modeling*. - 2005. - Vol. 10. - P. 316–341.
- [15] Zha Y., Yang J., Yin L., Zhang Y., Zheng, W. and Shi L. A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil // *Journal of Hydrology*. - 2017. - Vol. 551. - P. 56–69.
- [16] List F. and Radu F. A study on iterative methods for solving Richards' equation // *arXiv*. - 2015. - Vol. 1507.07837v1. - P. 1–16.
- [17] Baboulin M., Dongarra J., Remy A., Tomov S. and Yamazaki I. Solving dense symmetric indefinite systems using GPU // *Concurrency and Computation*. - 2017. - Vol. 29, No. 9. - P. 1–17.
- [18] Zhong-Zhi B. Motivations and realizations of Krylov subspace methods for large sparse linear systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. - 2015. - Vol. 283, No. 1. - P. 71–78.

- [19] Tran H., Toh K. and Phoon K. Preconditioned IDR(s) iterative solver for non-symmetric linear system associated with FEM analysis of shallow foundation // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. - 2013. - Vol. 37. - P. 2972–2986.
- [20] Choi S., Paige C. and Saunders M. MINRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems // *SIAM Journal of Scientific Computing*. - 2011. - Vol. 3, No. 4. - P. 1810–1836.
- [21] Chronopoulos A. T. and Kucherov A. Block s-step Krylov iterative methods // *Numerical Linear Algebra with Applications*. - 2010. - Vol. 17, No. 1. - P. 3–15.
- [22] Cotter C. and Kirby R. Mixed finite elements for global tide models // *Numerische Mathematik*. - 2015. - No. 133. - P. 255–277.
- [23] Chen Z. Finite element methods and their applications. - Springer, 2007. - 410 p.
- [24] Kozulik, V. and Gotovac, B. Numerical solution of Poisson's Equation in an arbitrary domain by using meshless R-function method // *Proceeding of the 27th DAAM International Symposium on Intellect Manufacturing and Automation*. - 2016. - P. 245–254.

References

- [1] Gatica G., Baier R. and Tierra, G., "A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity", *Mathematics of Computation* vol. 297 (2015): 1–33.
- [2] Atkinson K. and Hansen O. "Solving the Nonlinear Poisson Equation on the Unit Disk", *Journal of Integral Equations* no. 3 (2005): 223–251.
- [3] Auricchio F., Veiga L., Brezzi F. and Lovadina C. "Mixed finite element methods", *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition* no.1 (2017): 1–53.
- [4] Puscas M. A., Enchery G. and Desroziers, S. "Application of the mixed multiscale finite element method to parallel simulations of two-phase flows in porous media", *Oil and Gas Science and Technology* vol. 73, no. 38 (2018): 1–14.
- [5] Muzhinji K., Shateyi S. and Motsa S. "The Mixed Finite Element Multigrid Method for Stokes Equations", *The Scientific World Journal* no. 460421 (2015): 1–12.
- [6] Vorwerk J., Engwer C., Pursiainen S. and Wolters C. "A mixed finite element method to solve the EEG forward problem", *IEEE transactions on medical imaging* no. 4 (2016): 930–941.
- [7] Spiridonov D., Huang J., Vasilyeva M., Huang Yu. and Chung, E. "Mixed generalized multiscale finite element method for Darcy-Forchheimer model", *Mathematics* vol. 7, no. 1212 (2019): 1–13.
- [8] Brown D. L. and Vasilyeva M. "Generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems II: nonlinear coupling", *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol. 297 (2016): 132–146.
- [9] Rebbholz L., Viguerie A. and Xiao M. "Efficient nonlinear iteration schemes based on algebraic splitting for the incompressible Navier-Stokes equations", *Mathematics of Computation* vol. 88, no. 318 (2019): 1533–1557.
- [10] Islam M., Hye A. and Mamun A. "Nonlinear Effects on the Convergence of Picard and Newton Iteration Methods in the Numerical Solution of One-Dimensional Variably Saturated–Unsaturated Flow Problems", *Hydrology* vol. 4, no. 50 (2017): 1–18.
- [11] Kuraz M., Mayer P. and Pech P. "Solving the nonlinear Richards equation model with adaptive domain decomposition", *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol. 270 (2014): 2–11.
- [12] Nakshatrala K. and Turner D. "A mixed formulation for a modification to Darcy equation based on Picard linearization and numerical solutions to large-scale realistic problems", *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* vol. 14, no. 6 (2013): 524–541.
- [13] Madzvamuse A. and Chung A. "Fully implicit time-stepping schemes and non-linear solvers for systems of reaction–diffusion equations", *Applied Mathematics and Computation* vol. 244 (2014): 361–374.
- [14] Muccino J. and Luo H. "Picard iterations for a finite element shallow water equation model", *Ocean modeling* vol. 10 (2005): 316–341.

- [15] Zha Y., Yang J., Yin L., Zhang Y., Zheng, W. and Shi L. "A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil" , *Journal of Hydrology* vol. 551 (2017): 56–69.
- [16] List F. and Radu F. "A study on iterative methods for solving Richards' equation" , *arXiv* vol. 1507.07837v1 (2015): 1–16.
- [17] Baboulin M., Dongarra J., Remy A., Tomov S. and Yamazaki I. "Solving dense symmetric indefinite systems using GPU" , *Concurrency and Computation* vol. 29, no. 9 (2017): 1–17.
- [18] Zhong-Zhi B. "Motivations and realizations of Krylov subspace methods for large sparse linear systems" , *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol. 283, no. 1 (2015): 71–78.
- [19] Tran H., Toh K. and Phoon K. "Preconditioned IDR(s) iterative solver for non-symmetric linear system associated with FEM analysis of shallow foundation" , *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* vol. 37 (2013): 2972–2986.
- [20] Choi S., Paige C. and Saunders M. "MINRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems" , *SIAM Journal of Scientific Computing* vol. 3, no. 4 (2011): 1810–1836.
- [21] Chronopoulos A. T. and Kucherov A. "Block s-step Krylov iterative methods" , *Numerical Linear Algebra with Applications* vol. 17, no. 1 (2010): 3–15.
- [22] Cotter C. and Kirby R. "Mixed finite elements for global tide models" , *Numerische Mathematik* no. 133 (2015): 255–277.
- [23] Chen Z. "Finite element methods and their applications"(Springer, 2007).
- [24] Kozulik, V. and Gotovac, B. "Numerical solution of Poisson's Equation in an arbitrary domain by using meshless R-function method" , *Proceeding of the 27th DAAM International Symposium on Intellect Manufacturing and Automation* (2016): 245–254.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал «Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика» (в английской версии «Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science Series») принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 418, тел. 22-11-568. Электронная почта: mechmatvestnik@gmail.com (ответственный секретарь редколлегии, Темешева С.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы (название вуза, центра без сокращений), рабочий или моб. телефон, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ или формат .eps [см. п.7]. В редакцию также представляется отпечаток работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 7 страниц.

Структура статьи.

Первая страница:

- 1) Первая строка - номер МРНТИ (IRSTI) (можно взять здесь: <http://grnti.ru/>), выравнивание по левому краю, шрифт - полужирный.
- 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 3) Автор(ы) статьи - Инициалы и фамилия, место работы (аффилиация), город, страна, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие **ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ** пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
- 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

Стандартные разделы статьи: **Введение, Обзор литературы, Материал и методы, Результаты и обсуждение, Заключение, Благодарности (если имеются), Список литературы** (названия разделов не менять)

- 6) **Введение.** Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется

общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором аспекте.

7) **Обзор литературы.** В разделе обзор литературы должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

8) **Материал и методы.** Раздел должен состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала – один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

9) **Результаты и обсуждение.** В этом разделе приводятся анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) **Заключение.** Обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) **Благодарности (если имеются).** Например: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант «Наименование темы гранта», 2018-2020 годы).

12) **Список литературы/References.** (оба списка, если статья на русском или казахском. Если статья на английском, то только один список по стилю Чикаго). Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50% на английском языке. В случае наличия в списке литературы работ, представленных на кириллице, необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый – в оригинале, второй – романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) → название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке (год в круглых скобках) → страницы. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4 (2011): 8-30. Список литературы представляется по мере цитирования, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Ссылки на литературу оформляются в квадратных скобках с указанием номера литературы. Стиль оформления "Список литературы" на русском

и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления"(требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления "References" романизированного списка литературы (см. выше), а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений согласно Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
 - б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
 - в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
 - г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов L^AT_EX 2_ε и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от вышеуказанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал „Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика“, который включен в каталог АО „Казпочта“ „ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ“. Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМҰНЫ – СОДЕРЖАНИЕ – CONTENTS

1-бөлім	Раздел 1	Section 1
Математика	Математика	Mathematics
<i>Айсағалиев С.А., Шабенова Ә.Ж., Кетебаев С.К.</i>		
Разрешимость и построение решения краевых задач линейных систем с ограничениями..		3
 <i>Tleukhanova N.T., Sadykova K.K.</i>		
The convolution in anisotropic Besov spaces		18
 <i>Bekbayev N.T., Tulenov K. S.</i>		
The non-commutative Hardy-Littlewood maximal operator on non-commutative Lorentz spaces		31
 <i>Дауылбаев М.К., Авиштай Н., Кадирбеков Б.Б.</i>		
Асимптотические оценки решений краевой задачи для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений		39
 <i>Kaiyrbek Zh.A.</i>		
Identification of the coefficients of equation for a vibrating rod in acoustic diagnostics		50
 2-бөлім		
	Раздел 2	Section 2
	Механика	Mechanics
 <i>Кангуржин Б.Е., Ақанбай Е.Н., Мәдібайұлы Ж.</i>		
Сочленение тонких упругих стержней и обобщенные условия Кирхгофа в узлах		58
 3-бөлім		
	Раздел 3	Section 3
	Информатика	Computer Science
 <i>Молдабеков М.М., Еремин Д.И., Жаксыгулова Д.Г., Трепашко С., Калиева Р.А.</i>		
Программное обеспечение системы управления сетевой инфраструктурой референсных GNSS станций с использованием облачных технологий		69

4-бөлім	Раздел 4	Section 4
Қолданылмалы математика	Прикладная математика	Applied Mathematics
<i>Abdibekova A.U., Zhakebayev D.B., Karuna O.</i>		
Modelling the influence of electron concentration on MHD turbulence by les.....		91
<i>Байгереев Д.Р., Темирбеков Н.М., Омариева Д.А.</i>		
Построение итерационного метода решения нелинейного уравнения эллиптического типа на основе смешанного метода конечных элементов.....		104
К сведению авторов		121