

ISSN 1563 – 0277
eISSN 2617 – 4871

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№4 (108)

Алматы
«Қазақ университеті»
2020

Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан, свидетельство №16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет №766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год. Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.

Редакционная коллегия

научный редактор – Б.Е. Кангуужин, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби,
заместитель научного редактора – Д.И. Борисов, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия
ответственный секретарь – С.М. Темешева, д.ф.-м.н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., Университет международного бизнеса, Казахстан
Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахстанско-Британский технический университет, Казахстан
Бектемесов М.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан
Жакебаев Д.Б. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института аэродинамики, Германия
Мальшикин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия
Ракишева З.Б. – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания
Сагитов С.М. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Гетеборга, Швеция
Сукочев Ф.А. – профессор, академик АН Австралии, Университет Нового Южного Уэльса, Австралия
Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
Темляков В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Южной Каролины, США
Токмагамбетов Н.Е. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Шиничи Накасука – PhD доктор, профессор, Университет Токио, Япония

Научное издание

Вестник КазНУ. Серия “Математика, механика, информатика”, № 4 (108) 2020.

Редактор – С.М. Темешева. Компьютерная верстка – С.М. Темешева

ИБ N 14092

Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 10,25 п.л.

Заказ N 15874. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

МРНТИ 27.29.17, 27.29.19; УДК 517.9

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.01>А.Н. Станжицкий* , Т.В. Шовкопляс 

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев, Украина

*e-mail: ostanzh@gmail.com

УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И БИФУРКАЦИЯ ЕЕ РЕШЕНИЯ

В предлагаемой статье для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, коэффициенты которого действительны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке, изучается вопрос разрешимости линейной неоднородной краевой задачи с возмущением. Известно, что рассматриваемая в статье краевая задача не всегда разрешима, при условии, что порождающая ее краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, не имеет решений при произвольных неоднородностях. Установлена взаимосвязь между рассматриваемой линейной неоднородной краевой задачей с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и алгебраической системой. Коэффициенты алгебраической системы состоят из коэффициентов линейной неоднородной краевой задачи с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. На основе взаимосвязи между рассматриваемой краевой задачей и алгебраической системой найдено условие разрешимости линейной неоднородной краевой задачи с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Оказалось, что при выполнении этого условия разрешимости существует хотя бы одно решение линейной неоднородной краевой задачи с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющее вид частичной суммы сходящегося ряда Лорана.

Ключевые слова: краевая задача с возмущением, порождающая краевая задача, критерий разрешимости, критический случай, бифуркация решения, алгебраическая система.

А.Н. Станжицкий*, Т.В. Шовкопляс

Тарас Шевченко атындағы Киев ұлттық университеті, Киев қ., Украина

*e-mail: ostanzh@gmail.com

Шеттік есептің шешілімділік шарты және оның шешімінің бифуркациясы

Ұсынылып отырған мақалада коэффициенттері кесіндіде нақты, үзіліссіз дифференциалданатын екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есебінің шешімділігі зерттеледі. Мақалада қарастырылған шеттік есеп оны туындайтын екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің еркін оң жақтарға сәйкес шешімі жоқ болған жағдайларда әрқашан шешіле бермейтіні белгілі. Қарастырылып отырған екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есеп және арнайы алгебралық жүйе арасындағы өзара байланысы анықталды. Алгебралық жүйенің коэффициенттері екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есептің коэффициенттерінен тұрады. Қарастырылып отырған шеттік есеп пен алгебралық жүйенің арасындағы өзара байланысы негізінде екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есептің шешілімділік шарты табылды. Осы шешілімділік шарт орындалғанда екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есептің жинақты Лоран қатарының дербес қосындысы түріндегі ең болмаса бір шешімі бар болатыны шықты.

Түйін сөздер: ауытқуы бар шеттік есеп, туындайтын шеттік есеп, шешілімділік критерийі, критиктік жағдай, шешімнің бифуркациясы, алгебралық жүйе.

O.M. Stanzhytskyi*, T.V. Shovkoplyas
 National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
 *e-mail: ostanzh@gmail.com

Condition for solvability of a boundary value problem and bifurcation of its solution

In this paper, we study the solvability of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbations for a system of second-order ordinary differential equations whose coefficients are real, continuous, and continuously differentiable on a segment. It is known that the boundary value problem considered in this paper is not always solvable, provided that the boundary value problem generating it for a system of second-order ordinary differential equations has no solutions for arbitrary inhomogeneities. The relationship between the considered linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations and an algebraic system is established. The coefficients of an algebraic system consist of the coefficients of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations. Based on the relationship between the boundary value problem under consideration and the algebraic system, a condition for the solvability of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations is found. It turned out that if this solvability condition is met, there is at least one solution of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations, which has the form of a partial sum of a convergent Laurent series.

Key words: boundary problem with perturbation, generated boundary problem, the criterion of solvability, the critical case, the bifurcation of solution, algebraical system.

1 Введение. Постановка задачи

Вопрос определения условий разрешимости и отыскания решений разных типов краевых задач является актуальным в течение длительного времени. Изучению разных аспектов рассматриваемой проблемы посвящено много научных работ. Нетеровы краевые задачи рассматривались и исследовались в работе [1]. Изучению автономных краевых задач посвящены работы [2–5]. Слабонелинейные краевые задачи рассмотрены в [2]. На протяжении длительного периода времени остается актуальным вопрос определения условий разрешимости и нахождения решений разных типов краевых задач. Изучению разных аспектов рассматриваемого вопроса посвящено большое количество научных работ. Изучение условий разрешимости краевых задач с возмущением для систем линейных дифференциальных уравнений I-го порядка рассмотрено в [6–9]. Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем интегро-дифференциальных уравнений, к которой применен метод усреднения, рассмотрена в [10]. Вырожденные краевые задачи, условия их разрешимости, бифуркации и разветвления решений рассмотрено в [11]. Условия разрешимости слабозвозмущенных краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка определено в [12, 13]. В данной работе рассматривается линейная неоднородная краевая задача с возмущением

$$(P(t)x')' - Q(t)x - \varepsilon Q_1(t)x = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$lx(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 x(\cdot, \varepsilon). \quad (2)$$

Тут $[a, b]$ – отрезок, на котором рассматривается линейная краевая задача с возмущением (1), (2), $x = x(t, \varepsilon)$ – n -измерима дважды непрерывно дифференцированная искомая векторная функция: $x(\cdot, \varepsilon) \in C^2([a, b] \times (0, \varepsilon_0])$, $x'(\cdot, \varepsilon), x''(\cdot, \varepsilon) \in C^2([a, b] \times (0, \varepsilon_0])$.

$P(t)$, $Q(t)$, $Q_1(t)$ – квадратные $(n \times n)$ -измеримые действительные матрицы-функции. Элементы матрицы $P(t)$ являются действительными, непрерывно-дифференцируемыми на отрезке $[a, b]$ функциями: $P(t) \in C^1([a, b])$; элементы матриц $Q(t)$ и $Q_1(t)$ являются непрерывными на отрезке $[a, b]$: $Q(t), Q_1(t) \in C([a, b])$. Матрица $P(t)$ является невырожденной: $\det P(t) \neq 0$.

Элементы матрицы $P(t)$ являются действительными, непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a, b]$ функциями: $P(t) \in C^1([a, b])$; элементы матриц $Q(t)$ и $Q_1(t)$ являются непрерывными на отрезке $[a, b]$ функциями: $Q(t), Q_1(t) \in C([a, b])$. $f(t)$ – n -измеримая непрерывная на отрезке $[a, b]$ вектор-функция: $f(t) \in C([a, b])$. l, l_1 – линейные ограниченные m -измеримые векторные функционалы, определенные на пространстве n -измеримых кусочно-непрерывных векторных функций: $l, l_1: C([a, b]) \rightarrow R^m$. α – m -измеримый действительный вектор: $\alpha \in R^m$; ε – малый неотрицательный параметр.

У краевой задачи с возмущением (1), (2) есть порождающая краевая задача:

$$(P(t)x')' - Q(t)x = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (3)$$

$$lx(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений второго порядка (3) имеет общее решение вида: $x(t) = X(t)c + \bar{x}(t)$, $c \in R^{2n}$, где $X(t)$ – $(n \times 2n)$ -измеримая фундаментальная матрица однородной системы второго порядка (3), которая состоит из $2n$ -линейно независимых решений однородной ($f(t) = 0$) системы (3); вектор-функция $\bar{x}(t) = \int_a^b K(t, s)P^{-1}(s)f(s)ds$ является частным решением системы дифференциальных уравнений (3); $K(t, s)$ – $(n \times n)$ -измеримая матрица Коши [13, 14].

В результате действия линейного m -измеримого функционала l на фундаментальную матрицу $X(t)$ образуется $(m \times 2n)$ -измеримая прямоугольная матрица D , $\text{rank } D = n_1$, $n_1 < \min(2n, m)$.

Матрица D^* есть транспонированной к матрице D . $(2n \times m)$ – измеримая матрица D^+ есть псевдообратной по Муру-Пенроузу к матрице D [7, 15].

Через P_D и P_{D^*} обозначим $(2n \times 2n)$ - и $(m \times m)$ -измеримые матрицы-ортопроекторы, проектирующие пространства R^{2n} и R^m на ноль-пространства $N(D)$ и $N(D^*)$ соответственно: $P_D: R^{2n} \rightarrow N(D)$, $N(D) = P_D R^{2n}$; $P_{D^*}: R^m \rightarrow N(D^*)$, $N(D^*) = P_{D^*} R^m$.

Размерность матрицы $N(D)$ равна r : $\dim N(D) = 2n - \text{rank } D = 2n - n_1 = r$, а размерность матрицы $N(D^*)$ равна d : $\dim N(D^*) = m - \text{rank } D = m - n_1 = d$. Откуда следует, что $\text{rank } P_D = r$, а $\text{rank } P_{D^*} = d$.

Это значит, что матрица P_D состоит из r линейно независимых столбцов, а матрица P_{D^*} состоит из d линейно независимых строк. Следовательно, $(2n \times 2n)$ -измеримую матрицу P_D можно заменить $(2n \times r)$ -измеримой матрицей P_{D_r} , которая состоит из r линейно независимых столбцов матрицы P_D ; $(m \times m)$ -измеримую матрицу P_{D^*} можно заменить $(d \times m)$ -измеримой матрицей $P_{D^*_d}$, которая состоит из полной системы d линейно независимых строк матрицы P_{D^*} [7].

Для порождающей краевой задачи (3), (4) справедливо утверждение [14].

Теорема 1 (Критический случай) Пусть выполняется условие $\text{rank } D = n_1 < \min\{2n, m\}$. Тогда однородная ($f(t) = 0$, $\alpha = 0$) краевая задача (3), (4) имеет r , ($r = 2n - n_1$)

и только r линейно независимых решений. Неоднородная краевая задача (3), (4) разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(t) \in C([a, b])$ и постоянный вектор $\alpha \in R^m$ удовлетворяют условию разрешимости

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\bar{x}(\cdot)] = 0, \quad (d = m - n_1). \quad (5)$$

При выполнении этих условий краевая задача (3), (4) имеет r -параметрическое семейство линейно независимых решений $x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f])(t) + X(t)D^+\alpha$, $t \in [a, b]$, $\forall c_r \in R^r$, где $X_r(t)$ – $(n \times r)$ -измеримая матрица, столбики которой образуют полную систему r линейно независимых решений однородной системы второго порядка (3): $X_r(t) = X(t)P_{D_r}$; P_{D_r} – $(2n \times r)$ -измеримая матрица-ортопроектор, состоящая из r линейно независимых столбиков матрицы P_D ; c_r – произвольный вектор-столбец из пространства R^r ; $(G[f])(t)$, $t \in [a, b]$, – обобщенный оператор Грина, который действует на произвольную вектор-функцию $f(t) \in C([a, b])$:

$$(G[f])(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b K(t, s)P^{-1}(s)f(s)ds - X(t)D^+l \int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)f(s)ds.$$

Необходимо определить, существуют ли условия, при выполнении которых, краевая задача с возмущением (1), (2) будет разрешима в случае, что ее порождающая краевая задача (3), (4) не имеет решений.

2 Условия бифуркации решений краевой задачи

Рассматривается случай, когда порождающая краевая задача (3), (4) не имеет решений при произвольных неоднородностях $f(t) \in C([a, b])$ и $\alpha \in R^m$, то есть, выполняется критический случай ($\text{rank } D = n_1 < n$) и в силу произвольного выбора неоднородностей $f(t) \in C([a, b])$ и $\alpha \in R^m$ критерий разрешимости (5) для порождающей краевой задачи (3), (4) не выполняется.

В публикации [13] рассмотрена линейная неоднородная краевая задача с возмущением (1), (2) в случае, когда ее порождающая краевая задача ($\varepsilon = 0$) (3), (4) не имеет решений. Тогда для рассматриваемой краевой задачи с помощью $(d \times r)$ -измеримой матрицы

$$B_0 := P_{D_d^*}\{l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)X_r(s)ds\}, \quad (6)$$

построенной с помощью коэффициентов задачи (1), (2), были определены условие разрешимости и условие единственности решения, которое имеет вид сходящегося ряда Лорана при $k = -1$.

P_{B_0} – $(r \times r)$ -измеримая матрица-ортопроектор, $P_{B_0}: R^r \rightarrow N(B_0)$; B_0^* – $(r \times d)$ -измеримая матрица, сопряженная к матрице B_0 , $P_{B_0^*}$ – $(d \times d)$ -измеримая матрица-ортопроектор, $P_{B_0^*}: R^d \rightarrow N(B_0^*)$; $(r \times d)$ – измеримая матрица B_0^+ является псевдообратной по Муру-Пенроузу к матрице B_0 [13].

В работе [16] рассматривались условия бифуркации решения импульсной краевой задачи в случае, когда условие $P_{B_0^*} = 0$ не выполнялось. Поэтому была построена $(d \times r)$ -измеримая матрица B_1 :

$$B_1 := P_{D_d^*}\{l_1 G_1(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_1(s)ds\}, \quad (7)$$

где $(n \times r)$ -измеримая матрица $G_1(t)$ имеет вид:

$$G_1(t) = (G[Q_1(s)X_r(s)])(t) + X(t)D^+l_1X_r(\cdot). \quad (8)$$

B_1^* – $(r \times d)$ -измеримая матрица, транспонированная к матрице B_1 ; P_{B_1} – $(r \times r)$ -измеримая матрица-ортопроектор, проектирующая r -измеримое евклидово пространство R^r на ноль-пространство $N(B_1)$ матрицы B_1 ; $P_{B_1^*}$ – $(d \times d)$ -измеримая матрица-ортопроектор, проектирующая d -измеримое евклидово пространство R^d на ноль-пространство $N(B_1^*)$ матрицы B_1^* .

В работе [16] с помощью матриц B_0 и B_1 были найдены условия бифуркации решения рассматриваемой импульсной краевой задачи. Доказано, что в случае, когда условие $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$ выполняется, рассматриваемая импульсная краевая задача разрешима и имеет решение в виде сходящегося ряда Лорана при $k = -2$.

В данной работе рассматривается случай, когда условия $P_{B_0^*} = 0$, $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$ не выполняются.

Поэтому построена $(d \times r)$ -измеримая матрица $\overline{B_1} := -P_{B_0^*}B_1P_{B_0}$, при выполнении определенных условий на которую, задача (3), (4) будет разрешимой. В этом случае решение краевой задачи (3), (4) ищется с помощью метода Вишика-Люстерника [17] в виде части сходящегося ряда Лорана при $k = -3$.

Имеет место теорема.

Теорема 2 Пусть порождающая краевая задача (3), (4) при произвольных неоднородностях $f(t) \in C([a, b])$ и $\alpha \in R^m$ не имеет решений и для краевой задачи с возмущением (1), (2) выполнены условия $P_{B_0^*} \neq 0$, $P_{B_1^*}P_{B_0^*} \neq 0$.

Тогда краевая задача с возмущением (1), (2) разрешима, если выполняется условие

$$P_{\overline{B_1}}P_{B_0^*} = 0 \quad (9)$$

и ее решение при достаточно малой фиксированной величине $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет вид части сходящегося ряда Лорана:

$$x(\cdot, \varepsilon) = \sum_{k=-3}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \quad (10)$$

коэффициенты x_k , $k \geq -3$, ряда (10) ищутся из соответствующих краевых задач, образованных после подстановки в задачу (1), (2) ряда (10) и приравнивания соответствующих коэффициентов при каждом из степеней ε .

Доказательство. Подставим ряд (10) в задачу (1), (2), и тогда при каждой степени ε получим соответствующую однородную краевую задачу.

При ε^{-3} имеем однородную краевую задачу:

$$(P(t)x'_{-3})' - Q(t)x_{-3} = 0, \quad t \in [a, b], \quad (11)$$

$$lx_{-3}(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

По теореме 1 краевая задача (11) всегда разрешима и имеет r -параметрическое множество решений:

$$x_{-3}(t) = X_r(t)c_{-2}, \quad c_{-2} \in R^r, \quad (12)$$

c_{-2} – произвольный r -измеримый вектор, который будет найден из условия разрешимости краевой задачи при ε^{-2} .

При ε^{-2} получаем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x'_{-2})' - Q(t)x_{-2} = Q_1(t)x_{-3}, \quad t \in [a, b], \quad (13)$$

$$l x_{-2}(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-3}(\cdot, \varepsilon).$$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости неоднородной краевой задачи (13) имеет вид:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 x_{-3}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) x_{-3}(s) ds \right\} = 0, \quad d = m - n_1. \quad (14)$$

Подставив в (14) значение вектора $x_{-3}(t, c_{-2})$, выраженное равенством (12), получим:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) X_r(s) ds \right\} c_{-2} = 0. \quad (15)$$

Учитывая обозначения (6), из (15) получим алгебраическую систему:

$$B_0 c_{-2} = 0. \quad (16)$$

Алгебраическая система (16) всегда разрешима, ее решением является r -измеримый вектор:

$$c_{-2} = P_{B_0} c_{-2r}, \quad c_{-2r} \in R^r. \quad (17)$$

Подставив (17) в (12), получим r -параметрическое множество решений краевой задачи (11):

$$x_{-3}(t) = X_r(t) P_{B_0} c_{-2r}, \quad c_{-2r} \in R^r. \quad (18)$$

По теореме 1 краевая задача (13) имеет r -параметрическое множество решений:

$$x_{-2}(t, c_{-1}) = X(t)c_{-1} + (G[Q_1(s)x_{-3}(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 x_{-3}(\cdot, \varepsilon), \quad c_{-1} \in R^r. \quad (19)$$

Подставим (18) в (19), тогда r -параметрическое множество решений краевой задачи (13) имеет вид:

$$x_{-2}(t, c_{-1}) = X(t)c_{-1} + G_1(t)P_{B_0}c_{-2r}, \quad c_{-1} \in R^r, \quad (20)$$

где матрица $G_1(t)$ имеет вид (8).

Неизвестный вектор c_{-1} будет найден на следующем шаге из условия разрешимости краевой задачи, образованной при ε^{-1} . При ε^{-1} имеем краевую задачу:

$$(P(t)x'_{-1})' - Q(t)x_{-1} = Q_1(t)x_{-2}, \quad t \in [a, b], \quad (21)$$

$$l x_{-1}(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-2}(\cdot, \varepsilon).$$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости краевой задачи (21) есть таким:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 x_{-2}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) x_{-2}(s) ds \right\} = 0, \quad d = m - n_1. \quad (22)$$

Подставим (20) в (22), откуда, учитывая обозначения (6) и (7), получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_{-1} \in R^r$:

$$B_0 c_{-1} = -B_1 P_{B_0} c_{-2r}. \quad (23)$$

Условие разрешимости алгебраической системы (23) является таким:

$$P_{B_0^*} [-B_1 P_{B_0} c_{-2r}] = 0. \quad (24)$$

Обозначим за $(d \times r)$ -измеримую матрицу \bar{B}_1 матрицу вида:

$$\bar{B}_1 := -P_{B_0^*} B_1 P_{B_0}. \quad (25)$$

Учитывая обозначения (25), равенство (24) перепишем в таком виде:

$$\bar{B}_1 c_{-2r} = 0. \quad (26)$$

Запишем r -параметрическое множество решений алгебраической системы (23):

$$c_{-1} = B_0^+ [-B_1 P_{B_0} c_{-2r}] + P_{B_0} c_{-1r}, \quad c_{-1r} \in R^r. \quad (27)$$

Подставим (27) в (20), в результате получим r -параметрическое множество решений краевой задачи (13):

$$x_{-2}(t, c_{-1}) = X_r(t) P_{B_0} c_{-1r} + [X_r(t) B_0^+ [-B_1] + G_1(t)] P_{B_0} c_{-2r}, \quad c_{-1r} \in R^r. \quad (28)$$

Согласно теоремы 1 r -параметрическое множество краевой задачи (21) является таковым:

$$x_{-1}(t, c_0) = X_r(t) c_0 + (G[Q_1(s) x_{-2}(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 x_{-2}(\cdot, \varepsilon), \quad c_0 \in R^r. \quad (29)$$

Обозначим через $(n \times r)$ -измеримую матрицу $G_2(t)$ матрицу вида:

$$G_2(t) = (G[Q_1(s) G_1(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_1(\cdot), \quad (30)$$

тогда, применяя к (29) обозначения (8) и (30), получим:

$$x_{-1}(t, c_0) = X_r(t) c_0 + G_1(t) P_{B_0} c_{-1r} + [G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)] P_{B_0} c_{-2r}. \quad (31)$$

(31) – r -параметрическое множество решений краевой задачи (21). Неизвестный вектор $c_0 \in R^r$ будет найден на следующем шаге. При ε^0 имеем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x_0')' - Q(t)x_0 = Q_1(t)x_{-1} + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (32)$$

$$l x_0(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-1}(\cdot, \varepsilon) + \alpha.$$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости краевой задачи (32) таково:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 x_{-1}(\cdot) + \alpha - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) [Q_1(s) x_{-1}(s) + f(s)] ds \right\} = 0, \quad d = m - n_1. \quad (33)$$

В (33) подставим (31) и, выполнив соответствующие преобразования, получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_0 \in R^r$:

$$B_0 c_0 = \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - [B_1 B_0^+ [-B_1] + B_2] P_{B_0} c_{-2r}. \quad (34)$$

В (34) B_0 и B_1 – матрицы вида (6), (7) соответственно, $(d \times r)$ -измеримая матрица B_2 и d -измеримая вектор-функция φ_0 определены таким образом:

$$B_2 := P_{D_d^*} \{ l_1 G_2(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) G_2(s) ds \}, \quad d = m - n_1, \quad (35)$$

$$\varphi_0 = P_{D_d^*} [\alpha - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) f(s) ds]. \quad (36)$$

Условие разрешимости алгебраической системы (34) таково:

$$P_{B_0^*} [\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - [B_1 B_0^+ [-B_1] + B_2] P_{B_0} c_{-2r}] = 0. \quad (37)$$

Положим

$$B_{21} := B_1 B_0^+ [-B_1] + B_2, \quad (38)$$

B_{21} – $(d \times r)$ -измеримая матрица. Откуда,

$$-P_{B_0^*} B_1 P_{B_0} c_{-1r} = P_{B_0^*} [B_{21} P_{B_0} c_{-2r} - \varphi_0]. \quad (39)$$

В (39) произведение матриц $-P_{B_0^*} B_1 P_{B_0}$, согласно обозначения (25) является $(d \times r)$ -измеримой матрицей $\overline{B_1}$, следовательно, условие (39) равносильно условию:

$$\overline{B_1} c_{-1r} = P_{B_0^*} [B_{21} P_{B_0} c_{-2r} - \varphi_0]. \quad (40)$$

Условие разрешимости алгебраической системы (40) таково:

$$P_{\overline{B_1}} P_{B_0^*} [B_{21} P_{B_0} c_{-2r} - \varphi_0] = 0, \quad (41)$$

условие (41) выполняется, если $P_{\overline{B_1}} P_{B_0^*} = 0$.

Условие разрешимости алгебраической системы (40) является условием разрешимости алгебраической системы (34). Следовательно, алгебраическая система (34) является разрешимой и имеет r -параметрическое множество решений:

$$c_0 = P_{B_0} c_{0r} + B_0^+ [\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - B_{21} P_{B_0} c_{-2r}], \quad c_{0r} \in R^r. \quad (42)$$

Значение вектора c_0 вида (42) подставим в (31), после чего r -параметрическое множество решений краевой задачи (21) является таковым:

$$x_{-1}(t, c_0) = X_r(t) P_{B_0} c_{0r} + \{X_r(t) B_0^+ [-B_1] + G_1(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \{X_r(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + X_r(t) B_0^+ \varphi_0, \quad c_{0r} \in R^r. \quad (43)$$

Согласно теоремы 1 краевая задача (32) имеет r -параметрическое множество решений:

$$x_0(t, c_1) = X(t)c_1 + (G[Q_1(s)x_{-1}(s) + f(s)])(t) + X(t)D^+(l_1x_{-1}(\cdot) + \alpha), \quad c_1 \in R^r. \quad (44)$$

Подставим $x_{-1}(t, c_0)$ в (44). Обозначим через $G_3(t)$ – $(n \times r)$ -измеримую матрицу, а через $G_0^{(0)}(t)$ – n -измеримую векторную функцию:

$$G_3(t) := (G[Q_1(s)G_2(s)])(t) + X(t)D^+l_1G_2(\cdot), \quad (45)$$

$$G_0^{(0)}(t) := (G[f(s)])(t) + X(t)D^+\alpha. \quad (46)$$

Тогда r -параметрическое множество решений краевой задачи (32) является таковым:

$$\begin{aligned} x_0(t, c_1) = & X(t)c_1 + G_1(t)P_{B_0}c_{0r} + \{G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{-1r} + \\ & + \{G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{-2r} + G_1(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(0)}(t), \quad c_1 \in R^r. \end{aligned} \quad (47)$$

Вектор c_1 будет найден на следующем шаге. При ε^1 имеем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x_1')' - Q(t)x_1 = Q_1(t)x_0, \quad t \in [a, b], \quad (48)$$

$$l x_1(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_0(\cdot, \varepsilon).$$

Согласно теоремы 1, условие разрешимости краевой задачи есть таковым:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 x_0(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) x_0(s) ds \right\} = 0, \quad d = m - n_1. \quad (49)$$

В (49) подставим (47). Используя обозначения (6), (7), (35), (38) получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_1 \in R^r$:

$$B_0 c_1 = \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{0r} - B_{21} P_{B_0} c_{-1r} - B_{31} P_{B_0} c_{-2r}, \quad (50)$$

в (50) φ_1 является d -измеримой вектор-функцией, имеющей вид:

$$\varphi_1 = P_{D_d^*} [l_1 G_0^{(0)}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) G_0^{(0)}(s) ds]. \quad (51)$$

В (50) $(d \times r)$ -измеримая матрица B_{31} определена таким образом:

$$B_{31} := B_1 B_0^+ [-B_{21}] + B_2 B_0^+ [-B_1] + B_3. \quad (52)$$

Условие разрешимости алгебраической системы (50) есть таковым:

$$P_{B_0^*} [\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{0r} - B_{21} P_{B_0} c_{-1r} - B_{31} P_{B_0} c_{-2r}] = 0. \quad (53)$$

Откуда, используя обозначения (25), получаем:

$$\bar{B}_1 c_{0r} = P_{B_0^*} [B_{21} P_{B_0} c_{-1r} + B_{31} P_{B_0} c_{-2r} + B_1 B_0^+ \varphi_0 - \varphi_1]. \quad (54)$$

(54) – алгебраическая система относительно вектора $c_{0r} \in R^r$.

Условие разрешимости алгебраической системы (54) следующее:

$$P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*} [B_{21} P_{B_0} c_{-1r} + B_{31} P_{B_0} c_{-2r} + B_1 B_0^+ \varphi_0 - \varphi_1] = 0. \quad (55)$$

Условие разрешимости (55) алгебраической системы (54) выполняется, если имеет место равенство: $P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*} = 0$.

Из условия разрешимости (55) алгебраической системы (54) следует разрешимость алгебраической системы (50) относительно неизвестного вектора $c_1 \in R^r$.

r -параметрическое множество решений алгебраической системы (50) таково:

$$c_1 = P_{B_0} c_{1r} + B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{0r} - B_{21} P_{B_0} c_{-1r} - B_{31} P_{B_0} c_{-2r} \}, \quad c_{1r} \in R^r. \quad (56)$$

Подставим (56) в (47), в результате чего получим r -параметрическое множество решений краевой задачи (32):

$$\begin{aligned} x_0(t, c_1) = & X_r(t) P_{B_0} c_{1r} + [X_r(t) B_0^+ [-B_1] + G_1(t)] P_{B_0} c_{0r} + \\ & + \{ X_r(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t) \} P_{B_0} c_{-1r} + \\ & + \{ X_r(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t) \} P_{B_0} c_{-2r} + \\ & + X_r(t) B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} + G_1(t) B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(0)}(t), \quad c_{1r} \in R^r. \end{aligned} \quad (57)$$

Согласно теоремы 1 краевая задача (48) имеет r -параметрическое множество решений:

$$x_1(t, c_2) = X(t) c_2 + (G[Q_1(s) x_0(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 x_0(\cdot), \quad c_2 \in R^r. \quad (58)$$

(57) подставим в (58). Учитывая ранее введенные обозначения функций (8), (30), (45) и, обозначив за $G_4(t)$ – $(n \times r)$ -измеримую матрицу-функцию, за $G_0^{(1)}(t)$ – n -измеримую вектор-функцию вида:

$$G_4(t) := (G[Q_1(s) G_3(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_3(\cdot), \quad (59)$$

$$G_0^{(1)}(t) := (G[Q_1(s) G_0^{(0)}(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_0^{(0)}(\cdot), \quad (60)$$

из (58) получим r -параметрическое множество решений краевой задачи (48):

$$\begin{aligned} x_1(t, c_2) = & X_r(t) c_2 + G_1(t) P_{B_0} c_{1r} + \{ G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t) \} P_{B_0} c_{0r} + \\ & + \{ G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t) \} P_{B_0} c_{-1r} + \\ & + \{ G_1(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_2(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_3(t) B_0^+ [-B_1] + G_4(t) \} P_{B_0} c_{-2r} + \\ & + G_1(t) B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} + G_2(t) B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(1)}(t), \quad c_2 \in R^r. \end{aligned} \quad (61)$$

Неизвестный вектор $c_2 \in R^r$ будет найден на следующем шаге из условия разрешимости краевой задачи, образованной при ε^2 .

При ε^2 имеем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x_2)' - Q(t)x_2 = Q_1(t)x_1, \quad t \in [a, b], \quad (62)$$

$$lx_2(\cdot, \varepsilon) = l_1x_1(\cdot, \varepsilon).$$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости краевой задачи (62) есть таковым:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1x_1(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_1(s)ds \right\} = 0. \quad (63)$$

Подставим (61) в (63). Учитывая обозначения (6), (7), (35), (38), (52), и, положив:

$$\varphi_2 := -P_{D_d^*} [l_1G_0^{(1)}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_0^{(1)}(s)ds], \quad (64)$$

$$B_{41} := B_1B_0^+[-B_{31}] + B_2B_0^+[-B_{21}] + B_3B_0^+[-B_1] + B_4, \quad (65)$$

в (64) и (65) φ_2 – d -измеримая вектор-функция, B_{41} – $(d \times r)$ -измеримая матрица, соответственно; тогда из (63) получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_2 \in R^r$:

$$B_0c_2 = -B_1P_{B_0}c_{1r} - B_{21}P_{B_0}c_{0r} - B_{31}P_{B_0}c_{-1r} - B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\ - B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0 + \varphi_2. \quad (66)$$

Условие разрешимости алгебраической системы (66) является таковым:

$$P_{B_0^*} \{\varphi_2 - B_1P_{B_0}c_{1r} - B_{21}P_{B_0}c_{0r} - B_{31}P_{B_0}c_{-1r} - B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\ - B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0\} = 0. \quad (67)$$

Откуда, учитывая, что $\bar{B}_1 := -P_{B_0^*}B_1P_{B_0}$, равенство (67) имеет вид:

$$\bar{B}_1c_{1r} = P_{B_0^*} \{B_{21}P_{B_0}c_{0r} + B_{31}P_{B_0}c_{-1r} + B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\ - \varphi_2 + B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + B_2B_0^+\varphi_0\}. \quad (68)$$

(68) – алгебраическая система относительно вектора $c_{1r} \in R^r$, ее условие разрешимости есть таковым:

$$P_{\bar{B}_1^*}P_{B_0^*} \{B_{21}P_{B_0}c_{0r} + B_{31}P_{B_0}c_{-1r} + B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\ - \varphi_2 + B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + B_2B_0^+\varphi_0\} = 0. \quad (69)$$

Условие (69) выполняется, если имеет место равенство: $P_{\bar{B}_1^*}P_{B_0^*} = 0$.

Запишем решение алгебраической системы (66):

$$c_2 = P_{B_0}c_{2r} + B_0^+\{\varphi_2 - B_1P_{B_0}c_{1r} - B_{21}P_{B_0}c_{0r} - B_{31}P_{B_0}c_{-1r} - B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\ - B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0\}, \quad c_{2r} \in R^r, \quad (70)$$

(70) – решение алгебраической системы (66). Зная вектор c_2 , можно записать r -параметрическое множество решений краевой задачи

$$\begin{aligned}
x_1(t, c_2) = & X_r(t)P_{B_0}c_{2r} + \{X_r(t)B_0^+[-B_1] + G_1(t)\}P_{B_0}c_{1r} + \{X_r(t)B_0^+[-B_{21}] + \\
& + G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{0r} + \\
& + \{X_r(t)B_0^+[-B_{31}] + G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{-1r} + \\
& + \{X_r(t)B_0^+[-B_{41}] + G_1(t)B_0^+[-B_{31}] + G_2(t)B_0^+[-B_{21}] + G_3(t)B_0^+[-B_1] + G_4(t)\}P_{B_0}c_{-2r} + \\
& + X_r(t)B_0^+\{\varphi_2 - B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0\} + \\
& + G_1(t)B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + G_2(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(1)}(t). \quad (71)
\end{aligned}$$

Запишем r -параметрическое множество решений краевой задачи (62):

$$x_2(t, c_3) = X_r(t)c_3 + (G[Q_1(s)x_1(s)])(t) + X(t)D^+l_1X_1(\cdot), \quad c_3 \in R^r. \quad (72)$$

Подставим $x_1(t, c_2)$ в (72), используя ранее введенные обозначения (8), (30), (45), (59), и, обозначив через $(n \times r)$ -измеримую матрицу-функцию $G_5(t)$ и через n -измеримую векторную функцию $G_0^{(2)}(t)$ следующие функции:

$$G_5(t) = (G[Q_1(s)G_4(s)])(t) + X(t)D^+l_1G_4(\cdot), \quad (73)$$

$$G_0^{(2)}(t) = (G[Q_1(s)G_0^{(1)}(s)])(t) + X(t)D^+l_1G_0^{(1)}(\cdot), \quad (74)$$

в результате подстановки r -параметрическое множество (72) решений краевой задачи (62) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
x_2(t, c_3) = & X_r(t)c_3 + G_1(t)P_{B_0}c_{2r} + \{G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{1r} + \\
& + \{G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{0r} + \\
& + \{G_1(t)B_0^+[-B_{31}] + G_2(t)B_0^+[-B_{21}] + G_3(t)B_0^+[-B_1] + G_4(t)\}P_{B_0}c_{-1r} + \\
& + \{G_1(t)B_0^+[-B_{41}] + G_2(t)B_0^+[-B_{31}] + G_3(t)B_0^+[-B_{21}] + G_4(t)B_0^+[-B_1] + G_5(t)\}P_{B_0}c_{-2r} + \\
& + G_1(t)B_0^+\{\varphi_2 - B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0\} + \\
& + G_2(t)B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + G_3(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(2)}(t). \quad (75)
\end{aligned}$$

Вектор $c_3 \in R^r$ будет найден на следующем шаге.

Продолжая этот процесс, при ε^k , $k \geq 1$ получим неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x_k') - Q(t)x_k = Q_1(t)x_{k-1}, \quad t \in [a, b], \quad (76)$$

$$lx_k(\cdot, \varepsilon) = l_1x_{k-1}(\cdot, \varepsilon),$$

которая, согласно теоремы 1 имеет условие разрешимости:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1x_{k-1}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{k-1}(s)ds \right\} = 0, \quad (77)$$

из которой следует алгебраическая система относительно неизвестного вектора c_k :

$$\begin{aligned} B_0 c_k = & \varphi_k - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-1} - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-2} - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-3} - \\ & - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-4} - \dots - B_{k-4} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - B_{k-2} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - B_{k-2} B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - \\ & - B_{k-1} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - B_{k-1} B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - B_k B_0^+ \varphi_0. \end{aligned} \quad (78)$$

которая разрешима в том случае, когда выполняется условие

$$P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0. \quad (79)$$

r -параметрическое множество решений алгебраической системы (78) имеет вид:

$$\begin{aligned} c_k = & P_{B_0} c_{kr} + B_0^+ [\varphi_k - B_1 P_{B_0} c_{kr} - B_{21} P_{B_0} c_{(k-1)r} - \dots - B_{k+2} P_{B_0} c_{-2r} - \\ & - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-1} - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-2} - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-3} - B_1 B_0^+ \{ \dots \} - \dots - B_{k-2} B_0^+ \varphi_0 \} - \\ & - \dots - B_{k-2} B_0^+ \varphi_0 \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - B_{k-1} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - B_{k-1} B_0^+ \varphi_0 \} - \\ & - \dots - B_{k-2} B_0^+ \varphi_0 \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - B_k B_0^+ \varphi_0], \quad c_{kr} \in R^r, \end{aligned} \quad (80)$$

здесь

$$\begin{aligned} \varphi_k := & -P_{D_d^*} [l_1 G_0^{(k-1)}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) G_0^{(k-1)}(s) ds], \\ G_0^{(k)}(t) = & (G[Q_1(s) G_0^{(k-1)}(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_0^{(k-1)}(\cdot). \end{aligned}$$

r -параметрическое множество решений краевой задачи (76) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_k(t, c_{k+1}) = & X_r(t) c_{k+1} + G_1(t) P_{B_0} c_{kr} + \{ G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t) \} P_{B_0} c_{(k-1)r} + \\ & + \{ G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t) \} P_{B_0} c_{(k-2)r} + \dots + \\ & + \{ G_1(t) B_0^+ [-B_{(k+2)}] + G_2(t) B_0^+ [-B_{(k+1)}] + \dots + G_{k+2}(t) B_0^+ [-B_1] + G_{k+3}(t) \} P_{B_0} c_{-2r} + \\ & + G_1(t) B_0^+ \cdot \{ \varphi_k - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-1} - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-2} - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-3} - B_1 B_0^+ \{ \dots \} - \dots - \\ & - B_{k-2} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - B_{k-2} \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - B_{k-1} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - \\ & - B_{k-1} B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - B_k B_0^+ \varphi_0 \} \} + G_2(t) B_0^+ \{ \varphi_{k-1} - \\ & - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-2} - B_1 B_0^+ \{ \varphi_{k-3} - B_1 B_0^+ \{ \dots \} - \dots - B_{k-2} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - \\ & - B_{k-2} B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - B_{k-1} B_0^+ \varphi_0 \} - \dots - B_{k-1} B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} - \\ & - B_k B_0^+ \varphi_0 \} + \dots + G_k(t) B_0^+ \{ \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 \} + G_{k+1} B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(k)}(t), \quad c_{k+1} \in R^r. \end{aligned} \quad (81)$$

С помощью метода математической индукции для произвольного натурального $k \geq 1$ можно доказать, что краевая задача вида (76), которая образована после подстановки ряда (10) в краевую задачу (1), (2) и приравнивания соответствующих коэффициентов при каждом из степеней ε^k , будет разрешима, если выполняется условие (79), и при этом имеет r -параметрическое множество решений (81).

Сходимость ряда Лорана доказывается с помощью традиционных методов мажорирования [17]. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 2 базируется на методе Вишика-Люстерника [17]. Полученные в работе результаты являются обобщением результатов, приведенных в [12, 13] и согласовываются с ранее полученными в теории краевых задач результатами [6–9, 13, 14].

Список литературы

- [1] S.M. Chuiko and I.A. Boichuk. Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case // *Nonlin. Oscillat.* – 2009. – V. 12, №3. – P. 417–428.
- [2] A.A. Boichuk, S.M. Chujko. Autonomous weakly nonlinear boundary value problems // *Differ. Equ.* – 1992. – V. 28, №10. – P. 1353–1358.
- [3] Chuiko S.M. Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem // *Nonlin. Oscillat.* – 2006. – V. 9, №3. – P. 405–422. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11072-006-0053-y>
- [4] Chuiko S.M., Boichuk I.A. & Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton–Kantorovich method // *J. Math. Sci.* – 2013. – V. 189, №5. – P. 867–881. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1225-9>
- [5] Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономные краевые задачи в частном критическом случае // *Динамические системы.* – 2009. – Вып. 27. – С. 127–142.
- [6] Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. – К.: Научн.мысль, 1990. – 96 с.
- [7] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Труды Института математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
- [8] Chuiko S.M. Bifurcation of solutions of a linear Fredholm boundary-value problem // *Ukr. Math. J.* – 2007. – V. 59, №8. – P. 1274–1279. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-007-0087-z>
- [9] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht, Boston: VPS. – 2004. – 317 p.
- [10] Stanzhitskii A.N., Mynbayeva S.T. & Marchuk N.A. Averaging in Boundary-Value Problems for Systems of Differential and Integrodifferential Equations // *Ukr. Math. J.* – 2020. – V. 72, №2. – P. 277–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01781-2>
- [11] A.A. Boichuk, L.M. Shegda. Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems // *Differ. Equ.* – 2011. – Vol. 47, № 4. – P. 453–461. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001226611104001X>
- [12] Шовкопляс Т.В. Достаточные условия возникновения решения слабозмущенной краевой задачи // *Динамические системы.* – 2009. – Вып. 27. – С. 143–149. (На украинском).
- [13] Шовкопляс Т.В. Слабозмущенные линейные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений второго порядка // *Доклады НАН Украины.* – 2002. – №4. – С. 31–36. (На украинском).
- [14] Shovkoplyas T.S. A criterion for the solvability of A linear boundary-value problem for A system of the second order // *Ukr. Math. J.* – 2000. – V. 52, №6. – P. 987–991. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02591795>
- [15] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
- [16] Шовкопляс Т.В. Достаточные условия бифуркации решения импульсной краевой задачи с возмущением // *Динамические системы.* – 2010. – Вып. 28. – С. 141–152. (На украинском).
- [17] M.I. Vishik, L.A. Lyusternik. The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations. I // *Uspekhi Mat. Nauk.* – 1960. – V. 15, №3. – P. 3–80; *Russian Math. Surveys.* – 1960. – V. 15, №3. – P. 1–73.

References

- [1] S.M. Chuiko and I.A. Boichuk, "Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case", *Nonlin. Oscillat.* **12:3**(2009), 417–428.
- [2] A.A. Boichuk, S.M. Chujko, "Autonomous weakly nonlinear boundary value problems", *Differ. Equ.* **28:10**(1992), 1353–1358.
- [3] Chuiko S.M., "Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem", *Nonlin. Oscillat.* **9:3**(2006), 405–422. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11072-006-0053-y>
- [4] Chuiko S.M., Boichuk I.A. & Pirus O.E., "On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton–Kantorovich method", *J. Math. Sci.* **189:5**(2013), 867–881. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1225-9>

-
- [5] Chuiko S. M., Starkova O. V., "Avtonomnye kraevye zadachi v chastnom kriticheskom sluchae [Autonomous boundary value problems in a particular critical case]", *Dynamic systems* **27**(2009), 127–142. [in Russian].
- [6] Boichuk A. A., *Konstruktivnye metody analiza kraevykh zadach [Constructive methods of analysis of boundary value problems]* (K.: Scientific.thought, 1990) [in Russian].
- [7] A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev and A. M. Samoilenko, *Obobshchenno-obratnye operatory i neterovy kraevye zadachi [Generalized inverse operators and Noether boundary-value problem]* (Kiyv: Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1995) [in Russian].
- [8] Chuiko S.M., "Bifurcation of solutions of a linear Fredholm boundary-value problem", *Ukr. Math. J.* **59**:8(2007), 1274–1279. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-007-0087-z>
- [9] Boichuk A.A., Samoilenko A.M., *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* (Utrecht, Boston: VPS. 2004).
- [10] Stanzhitskii A.N., Mynbayeva S.T. & Marchuk N.A., "Averaging in Boundary-Value Problems for Systems of Differential and Integrodifferential Equations", *Ukr. Math. J.* **72**:2(2020), 277–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01781-2>
- [11] A.A. Boichuk, L.M. Shegda, "Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems", *Differ. Equ.* **47**:4(2011), 453–461. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001226611104001X>
- [12] Shovkoplyas T.V., "Dostatochnye usloviya vozniknoveniya resheniya slabovozmushchennoj kraevoy zadachi [Sufficient conditions for the emergence of a solution to a weakly confused boundary value problem]", *Dynamical systems* **27**(2009), 143–149 [in Ukrainian].
- [13] Shovkoplyas T.V., "Slabovozmushchennyye linejnye kraevye zadachi dlya sistem differencial'nykh uravnenij vtorogo poryadka [Weakly confused linear boundary value problems for systems of second-order differential equations]", (Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 4(2002), 31–36) [in Russian].
- [14] Shovkoplyas T.S., "A criterion for the solvability of A linear boundary-value problem for A system of the second order", *Ukr. Math. J.* **52**:6(2000), 987–991. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02591795>
- [15] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A., *Matricy i vychisleniya [Matrices and computations]* (M.: Science, 1984) [in Russian].
- [16] Shovkoplyas T.V., "Dostatochnye usloviya bifurkacii resheniya impul'snoj kraevoy zadachi s vozmushcheniem [Sufficient bifurcation conditions for the solution of a pulsed boundary value problem with perturbation]", *Dynamical Systems* **28**(2010), 141–152 [in Ukrainian].
- [17] M.I. Vishik, L.A. Lyusternik, "The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations. I", *Russian Math. Surveys* **15**:3(1960), 1–73.

МРНТИ 27.29.21, УДК 517.984+517.928

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.02>**Х.К. Ишкин*** , **Р.И. Марванов**

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

*e-mail: Ishkin62@mail.ru

НЕСЕКТОРИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Впервые уравнения Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом изучал М.А. Наймарк. М.А. Наймарку удалось найти достаточные условия на комплексный потенциал, когда соответствующий оператор Штурма–Лиувилля на полуоси имеет дискретный спектр. В дальнейшем результат М.А.Наймарка был усилен в работах В.Б. Лидского. Условия на комплексный потенциал, приведенные В.Б. Лидским, гарантируют аккретивность исследуемых операторов Штурма–Лиувилля. Актуальным оставался вопрос о существовании неаккретивных операторов Штурма–Лиувилля с дискретным спектром. В предлагаемой статье дается ответ на указанный вопрос. Для уравнения Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом построено специальное решение, которое убывает на бесконечности и при каждом фиксированном значении независимой переменной является целой функцией спектрального параметра. Используя это решение, получено обобщение известной теоремы В.Б. Лидского об условиях на потенциал, при которых спектр соответствующего оператора Штурма–Лиувилля дискретен, а система корневых векторов полна и минимальна. В отличие от работы В.Б. Лидского, вместо ограниченности снизу вещественной части или полуограниченности мнимой части потенциала требуется лишь, чтобы область значений потенциала лежала вне некоторого угла произвольного раствора с биссектрисой по отрицательной вещественной полуоси.

Ключевые слова: спектральная неустойчивость, локализация спектра, уравнение Штурма–Лиувилля, тривиальная монодромия.

Х.К. Ишкин*, Р.И. Марванов

Башқұрт мемлекеттік университеті, Уфа қ., Ресей

*e-mail: Ishkin62@mail.ru

Дискретті спектрі бар Штурм–Лиувилль секторлық емес операторы

Алғаш рет комплекс потенциалды Штурм–Лиувилль теңдеулерін М.А. Наймарк зерттеді. М.А. Наймарк комплекс потенциал үшін оған сәйкес келетін Штурм–Лиувилль операторының жартылай өсте дискретті спектрі болған жағдайда жеткілікті шарттарды таба алды. Кейін М.А. Наймарктың нәтижесі В.Б. Лидскийдің жұмыстарында күшейтілді. Комплекс потенциалға В.Б. Лидскиймен келтірген шарттар Штурм–Лиувилль операторларының аккретивтілігіне кепілдік береді. Дискретті спектрі бар Штурм–Лиувилльдің аккретивті емес операторларының бар болуы туралы мәселе өзекті болып қала берді. ұсынылып отырған мақалада көрсетілген сұраққа жауап беріледі. Комплекс потенциалды Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін шексіздікте кемитін және тәуелсіз айнымалының әр бір бекітілген мәнінде спектрлік параметрдің бүтін функциясы болатын арнайы шешімі құрылды. Осы шешімді қолдана отырып, В.Б. Лидскийдің потенциалға қойылатын шарттар туралы белгілі теоремасының жалпыламасы алынды. Осы шарттар орындалғанда сәйкес Штурм–Лиувилль операторының спектрі дискретті, ал түбірлік векторлар жүйесі толық және минималды болады. В.Б. Лидскийдің жұмысына қарағандағы айырмашылық - потенциалдың нақты бөлігінің төменнен шенелген болуы немесе жорамал бөлігінің жартылай шенелген болуы шарттарының орнына тек қана потенциалдың мәндер жиыны биссектриса мен кейбір түзудің арасындағы бұрыштан тыс жорамал өс бойында оранласу талап етіледі.

Түйін сөздер: спектрлік тұрақсыздық, спектрдің локализациясы, Штурм–Лиувилль теңдеуі, тривиалды монодромия.

Kh.K. Ishkin*, R.I. Marvanov
 Bashkir State University, Ufa, Russia
 *e-mail: Ishkin62@mail.ru

Non-accretive Sturm–Liouville operator with discrete spectrum

For the first time, the Sturm-Liouville equations with a complex potential were studied by M.A. Naimark. M.A. Naimark managed to find sufficient conditions for a complex potential when the corresponding Sturm-Liouville operator on the semi-axis has a discrete spectrum. later, the result of M.A. Naimark was strengthened in the works of V.B. Lidskii. the conditions for the complex potential given by V.B. Lidskii guarantee the accretivity of the studied Sturm-Liouville operators. the question of the existence of non-discrete Sturm-Liouville operators with a discrete spectrum remained relevant. The proposed article provides an answer to this question. For the Sturm - Liouville equation with a complex potential, we have constructed a special solution that decreases at infinity and, for each fixed value of the independent variable, is an entire function of the spectral parameter. Using this solution, a generalization of the well-known theorem of V.B. Lidskii on the conditions on the potential under which the spectrum of the corresponding Sturm - Liouville operator is discrete and the system of root vectors is complete and minimal. In contrast to Lidskii's work, instead of bounded below the real part or semi-boundedness of the imaginary part of the potential, it is only required that the region of potential values lie outside a certain angle of an arbitrary opening with a bisector along the negative real semiaxis.

Key words: spectral instability, spectrum localization, Sturm–Liouville equation, trivial monodromy

1 Введение

Пусть q – комплекснозначная функция, локально суммируемая на $(0, +\infty)$ и L – оператор, действующий в пространстве $L^2(0, +\infty)$ по формуле $Ly = l(y) := -y'' + qy$ на функциях из $D(L) = D := \{y \in L^2(0, +\infty) : y, y' \in AC[0, +\infty), l(y) \in L^2(0, +\infty)\}$. Здесь $AC[0, +\infty)$ – множество функций, абсолютно непрерывных на каждом отрезке $[0, b]$, $b > 0$. Далее пусть D'_0 – множество функций из D , равных нулю вне некоторого отрезка $[0, a]$ (своего для каждой функции) и удовлетворяющих условиям $y(0) = y'(0) = 0$; L'_0 – сужение оператора L в D'_0 . Введем оператор $M'_0 = JL'_0J$, где J – оператор комплексного сопряжения.

Точно так же, как в случае вещественного q [1, § 17, 4⁰] доказывается, что оператор M'_0 плотно определен и

$$(M'_0)^* = L. \quad (1)$$

Следовательно, $JM'_0L'_0 \subset (M'_0)^*$, то есть оператор M'_0 J -симметричен [2, 22⁰]. В силу (1) оператор L замкнут, следовательно, оператор M'_0 замыкаем, поэтому замыкаем и оператор L'_0 . Обозначим через L_0 замыкание L'_0 . Имеем

$$(JL_0J)^* = L. \quad (2)$$

Далее, используя (2), легко показать (см. [1, § 17, Предложение VI]), что

$$D(L_0) = \{y \in D : y(0) = y'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} (y\bar{z}' - y'\bar{z}) = 0 \text{ для всех } z \in D\}. \quad (3)$$

Введем оператор $L(\theta)$ – расширение оператора L_0 на $D_\theta = \{y \in D : y'(0) + \theta y(0) = 0\}$, где θ – фиксированное комплексное число или символ ∞ , которому соответствует краевое условие $y(0) = 0$. Таким образом, при каждом θ оператор $L(\theta)$ – одномерное расширение L_0 .

При вещественных q и θ оператор $L(\theta)$ впервые был подробно изучен Г. Вейлем [3]. Первый результат в случае комплексных q и θ принадлежит М. А. Наймарку [4]: если

- а) $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$,
 б) $0 \leq \arg q(x) \leq \gamma$, где $\gamma < \pi$,
 в) $|q'(x)| = O(q^\alpha(x))$, $x \rightarrow +\infty$, где $0 < \alpha < 3/2$,
 г) $q'(x) = O(|q'(x)|)$, $q''(x) = O(|q''(x)|)$, $x \rightarrow +\infty$,

то спектр оператора $L(\theta)$ дискретен. В дальнейшем этот результат был усилен в работах В. Б. Лидского [5] и [6]. Так, из Теорем 4 и 5 работы [6] следует¹: если $p, q \in L^1_{\text{loc}}[0, +\infty)$ и выполнено одно из условий

$$(A) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} q = +\infty,$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} q = +\infty \text{ (или } -\infty),$$

то спектр оператора $L(\theta)$ дискретен. Как показано в [6] (см. доказательство Теоремы 1), если $\operatorname{Re} q$ ограничена снизу, то для любого $y \in D(L(\theta))$

$$(L(\theta)y, y) = \int_0^\infty (|y'|^2 + q|y|^2) dx - \theta|y(0)|^2. \quad (4)$$

Отсюда, поскольку $y^2(0) = -2 \int_0^{+\infty} yy' dx$ и

$$2|yy'| \leq \varepsilon|y'|^2 + \varepsilon^{-1}|y|^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (5)$$

то при некотором α $\operatorname{Re}((L(\theta) + \alpha)y, y) \geq 0$ для всех $y \in D(L(\theta))$, то есть оператор $L(\theta) + \alpha$ *аккретивен* [7, гл. V, § 3.10]. Более того, из той же Теоремы 1 следует, что при каждом λ из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha$ дефектное число $m(\lambda) := \dim(\operatorname{Ran}(L(\theta) - \lambda))^\perp$ равно 0. Следовательно, оператор $L(\theta) + \alpha$ m -аккретивен, а при вещественных θ J -самосопряжен. Это утверждение верно и для оператора $-i(L + \alpha)$ (или $i(L + \alpha)$), если $\operatorname{Im} q$ полуограничена, а $\operatorname{Re} q$ удовлетворяет некоторым условиям, аналогичным условиям Сирса в самосопряженном случае [8] (см. Добавление, п. Д.1). Если q удовлетворяет условию Наймарка б), то легко показать (см. Добавление, п. Д.2), что оператор $e^{-i\gamma/2}L(\theta)$ не только аккретивен, но даже m -секториален [7, гл. V, § 3.10].

Конечно, m -аккретивные (m -секториальные – тем более) операторы, благодаря целому ряду свойств² более удобны в обращении по сравнению с произвольным (пусть даже замкнутым) оператором. Вместе с тем неаккретивные операторы довольно часто возникают в различных разделах физики и механики [9, 10]. Как правило, такие операторы спектрально неустойчивы (см., [11–15] и имеющиеся там ссылки) и ввиду высокой чувствительности их спектральных свойств к малым возмущениям для изучения последних приходится привлекать методы, использующие индивидуальные свойства каждого из таких операторов [16–22].

¹В работе [6] L – оператор, порожденный выражением $l(y)$ с $D(L) = \{y \in L^2(-\infty, +\infty) : y' \in AC(-\infty, +\infty), l(y) \in L^2(-\infty, +\infty)\}$. Однако доказательства Теорем 1, 4, 5 без особых изменений переносятся на случай оператора $L(\theta)$ на полуоси.

²Резольвентное множество любого m -аккретивного оператора, как минимум, содержит полуплоскость; на каждом луче внутри этой полуплоскости резольвента имеет наилучшую (со степенью -1) скорость убывания и др.

Предлагаемая работа посвящена исследованию условий дискретности спектра оператора $L(\theta)$ в случае, когда потенциал q не подчинен ни условию б) Наймарка, ни условиям (А) или (В) Лидского, вследствие чего оператор $L(\theta)$ не является аккретивным. Как известно (см., например [2, гл. I, п. 21]), для любого замкнутого оператора T , действующего в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , его числовая область

$$Num(T) = \{(Tf, f) : f \in D(T), \|f\| = 1\}$$

является выпуклым множеством, поэтому в случае неаккретивности T совпадает со всей плоскостью \mathbb{C} . Мы покажем, что даже в случае, когда $Num(L(\theta)) = \mathbb{C}$, оператор $L(\theta)$ может иметь дискретный спектр, если существует область $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R, |\arg z + \pi| < \varepsilon\}$, не пересекающаяся с областью значений функции q . Метод основан на построении специального решения $\varphi(x, \lambda)$ уравнения

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad x > 0, \quad (6)$$

которое, с одной стороны, удовлетворяет стандартным ВКБ-оценкам [23, гл. II, § 2], с другой – при каждом фиксированном $x \geq 0$ является целой функцией λ . Это свойство играет важную роль при исследовании различных спектральных свойств оператора L_θ . Например, метод Левинсона (см. [24, Приложение 4]) доказательства (не)полноты системы корневых векторов как раз основан на указанном свойстве функции φ .

2 Формулировка основных результатов

На функцию q наложим следующие ограничения:

- 1) Существует $a > 0$, что q суммируема на $(0, a)$, дифференцируема на $[a, +\infty)$ и q' абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a, b]$, $b > a$;
- 2) На $[a, +\infty)$ функция $|q|$ положительна и

$$|\arg q(x)| \leq \frac{\pi}{1 + \delta} \quad (\delta > 0), \quad x \geq a, \quad (7)$$

$$\int_a^\infty |q|^{-1/2} dx < \infty; \quad (8)$$

- 3) Функция $(q^{-1/4})'' q^{-1/4}$ суммируема на $(a, +\infty)$.

Здесь и всюду далее считаем: $q^{-1/n} = 1/q^{1/n}$, $q^{1/n} = \sqrt[n]{q} = |q|^{1/n} e^{i(\arg q)/n}$.

Замечание 1 Условиям 1) – 3) удовлетворяет, например, функция $q = re^{i\theta}$, где r, θ – вещественнозначные функции, такие, что при некотором $a > 0$

- a) $q \in L^1(0, a)$,
- b) $r, \theta \in C^2[a, +\infty)$ и при всех $x \geq a$ $|\theta(x)| \leq \pi/(1 + \delta)$, $r(x) \geq C_0 x^\alpha$, $\delta > 0$, $\alpha > 2$,
- c) функции $(r^{-1/4})'' r^{-1/4}$ и $(\theta'^2 + |\theta''|) r^{-1/2}$ суммируемы на $(a, +\infty)$.

Если, например, $r = x^\alpha$, $\theta = \frac{\pi}{1+\delta} \cos x^\beta$, $\alpha > 2$, $\beta < \alpha/4 + 1/2$, то условия а) – с) выполнены, при этом ни мнимая, ни вещественная части функции q не удовлетворяют условиям (А) и (В).

Введем обозначения

$$\Delta_1(x) = \int_x^\infty \left| (q^{-1/4})'' q^{-1/4} \right| dt, \quad \Delta_2(x) = \int_x^\infty |q|^{-1/2} dt, \quad x \geq a,$$

и договоримся, что всюду далее C, C_0, C_1, \dots – абсолютные (то есть не зависящие от каких-либо параметров) положительные постоянные, точное значение которых нас не интересует. Кроме того, если $y(x, \lambda)$ – решение уравнения (6), то ее производную по x условимся обозначать $y'(x, \lambda)$.

Теорема 1 Пусть выполнены условия 1) – 3). Тогда

(i) уравнение (6) имеет решение $\varphi = \varphi(x, \lambda)$, которое

(i₁) при каждом $x \geq 0$ является целой функцией λ порядка не выше 1,

(i₂) удовлетворяет оценке

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)} dt\right) (1 + r_0(x, \lambda)), \quad x \geq a, \quad (9)$$

$$|r_0(x, \lambda)| \leq C_0 (\Delta_1(x) + (e^{C|\lambda|\Delta_2(x)} - 1)); \quad (10)$$

(ii) если выполнено дополнительное условие

$$q'(x) = o(q^{3/2}(x)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (11)$$

то для функции φ' справедливы аналогичные утверждения: при каждом $x \geq 0$ функция $\varphi(x, \cdot)$ – целая порядка не выше 1 и

$$\varphi'(x, \lambda) = -\sqrt[4]{q(x)} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)} dt\right) (1 + r_1(x, \lambda)), \quad x \geq a, \quad (12)$$

$$|r_1(x, \lambda)| \leq C_1 \left(\Delta_1(x) + (e^{C|\lambda|\Delta_2(x)} - 1) + \left| \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} \right| \right); \quad (13)$$

(iii) любое убывающее решение уравнения (6) отличается от φ лишь постоянным множителем, так что φ оценкой (9) – (10) определяется однозначно.

Замечание 2 Хотя оценка (9) – (10) при фиксированном λ и больших x совпадает с обычной ВКБ-оценкой

$$\varphi(x, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{q(x) - \lambda}} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t) - \lambda} dt\right) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (14)$$

есть, по крайней мере, два соображения, по которым оценка (9) – (10) представляется более ценной, нежели оценка (14). Во-первых, оценка (9) – (10) равномерна по λ , в то время как

ВКБ-оценка теряет смысл вблизи точек поворота³. Это обстоятельство усугубляется еще тем, что при сделанных нами предположениях 1) – 3) множество точек поворота вообще не поддается контролю. Второй, еще более важный фактор: оценка (9) – (10), в отличие от (14), «не портит» решение – она работает, сохраняя важное свойство (i₁).

Тем не менее, сравнение между указанными оценками не всегда оказывается в пользу первой. Основной недостаток оценки (9) – (10) – ее неоптимальность. Если λ меняется в области, которая не пересекается областью значений функции q , то точек поворота не возникает, поэтому появляется возможность прибегнуть классическому методу ВКБ. В следующей теореме утверждается, что при некотором ужесточении условия 3) оценка (9) – (10) может быть существенно улучшена. Из доказательства теоремы будет видно, что это улучшение достигается именно благодаря методу ВКБ.

Введем в рассмотрение функцию \tilde{q} , которая на $[a+1, \infty)$ совпадает с q , на $[0, a]$ равна 0, и на $(a, a+1)$ такова, что $(\tilde{q})'$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[0, b]$, $b > 0$. Далее положим

$$S(R, \delta) = \left\{ \lambda = re^{i\beta} : r > R, |\beta| < \frac{\pi\delta}{1+\delta} \right\},$$

$$I(x, \lambda) = \int_x^\infty \left| ((\tilde{q} + \lambda)^{-1/4})'' (\tilde{q} + \lambda)^{-1/4} \right| dt + \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \int_x^{a+1} |q - \tilde{q}| dt,$$

$$Q(x, \lambda) = \lambda \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{\tilde{q}} + \sqrt{\tilde{q} + \lambda}} - \int_0^x \sqrt{\tilde{q}} dt.$$

Теорема 2 Пусть функция q удовлетворяет условиям 1) – 2) и

3) при каждом λ из сектора $S(R, \delta)$ интеграл $I(0, \lambda)$ сходится и при любом $\delta' \in (0, \delta)$ $I(0, re^{i\beta}) \rightarrow 0$, $r \rightarrow +\infty$, равномерно по $|\beta| \leq \pi\delta'/(1+\delta')$.

Тогда при любом $\delta' \in (0, \delta)$ решение φ , определяемое оценкой (9) – (10), имеет при больших $R > 0$ асимптотику

$$\varphi(x, -\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{\tilde{q}(x) + \lambda}} \exp(Q(x, \lambda)) (1 + O(I(x, \lambda))), \quad \lambda \in S(R, \delta'), \quad (15)$$

равномерную по $x \in [0, \infty)$ и $|\arg \lambda| \leq \pi\delta'/(1+\delta')$.

Положим

$$\rho(\eta, \zeta, x) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\eta, \zeta, x, r)}{\ln r},$$

где $M(\eta, \zeta, x, r) = \max_{\eta \leq \theta \leq \zeta} |\varphi(x, re^{i\theta})|$. Используя формулу (15), легко проверить, что если $q(x) = e^{i\theta} x^\alpha$ ($0 < \theta < \pi$, $\alpha > 2$), то

$$\rho(\eta, \zeta, x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{при всех } x \geq 0, \quad \frac{\pi}{1+\delta} < \eta < \zeta < \frac{\pi(1+2\delta)}{1+\delta}.$$

С другой стороны, из оценки (9) – (10) следует только $\rho(\eta, \zeta, x) \leq 1$. Отсюда возникает предположение, что в ситуациях, когда метод ВКБ применим, то он дает гораздо более точную оценку, чем (9) – (10). Однако справедлива

³По определению, точка a_λ полупрямой $[0, +\infty)$ называется точкой поворота, если $q(a_\lambda) = \lambda$.

Теорема 3 Если функция q удовлетворяет условиям 1) – 3), (11) и вместо (8) выполнено условие

$$M_1 x^\alpha < |q(x)| < M_2 x^\alpha \quad (M_1, M_2 > 0, \alpha > 2), \quad x > a, \quad (16)$$

то

$$\varphi^{(j)}(x, \lambda) = (q_a(x))^{(2j-1)/4} \exp\left(-\int_0^x \sqrt{q_a} dt\right) y_j(x, \lambda), \quad j = 0, 1, \quad (17)$$

$$\sup_{x \geq 0} |y_j(x, \lambda)| \leq \exp(\sigma_j |\lambda|^{1/2+1/\alpha}), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

$$q_a(x) = \begin{cases} q(x), & x \geq a, \\ 1, & 0 < x < a, \end{cases}$$

σ_j – положительные постоянные.

Теоремы 1 – 3 позволяют выявить некоторые спектральные свойства оператора $L(\theta)$.

Теорема 4 Пусть q удовлетворяет условиям 1) – 3). Тогда

- 1) оператор $L(\theta)$ имеет дискретный спектр;
- 2) если вместо 3) потребовать 3'), то спектр бесконечен;
- 3) если к условиям 1), 2), 3') добавить еще (11) и (16), где $\alpha > \max\{2/\delta, 2\}$, то система корневых векторов оператора $L(\theta)$ полна и минимальна.

3 Благодарности

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. №075-02-2020-1421/1 к согл. №075-02-2020-1421; второго автора – при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №20-31-90999.

References

- [1] M.A. Naimark, *Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a nonselfadjoint operator of the second order on a semi-axis* (Trudy Moskov. Mat. Obsc., **3** (1954), 181–270) [in Russian].
- [2] I.M. Glazman, *Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators* (Israel Program for Scientific Trans., Jerusalem, 1965).
- [3] H. Weyl, "Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen", *Math. Ann.* **68** (1910), 220–269.
- [4] M.A. Naimark, "On the spectrum of singular nonselfadjoint differential second-order operators", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **85:1** (1952), 41–44 [in Russian].
- [5] V.B. Lidskii, *Conditions for completeness of a system of root subspaces for non-selfadjoint operators with discrete spectrum* (Tr. Mosk. Mat. Obsc., **8** GIFML, Moscow, (1959), 83–120) [in Russian].
- [6] V.B. Lidskii, *A non-selfadjoint operator of Sturm–Liouville type with a discrete spectrum* (Tr. Mosk. Mat. Obsc., **9** (1960), 45–79) [in Russian].
- [7] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966).

-
- [8] D.B. Sears, "Note on the uniqueness of the Green's functions associated with certain differential equations", *Canadian J. of Math.* **2**:3(1950), 314–325.
- [9] R. Mennicken, M. Möller, *Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems* (Elsevier, Amsterdam–London, 2003). Zbl 1033.34001
- [10] F. Bagarello, J.P. Gazeau, F.H. Szafraniec, M. Znojil, *Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics: Mathematical Aspects* (Hoboken: John Wiley and Sons, New Jersey, 2015).
- [11] J. Sjöstrand, *Spectral instability for non-selfadjoint operators* (Palaiseau Cedex, Preprint / Ecole Polytechnique, 2002).
- [12] E.B. Davies, "Non-self-adjoint differential operators", *Bull. London Math. Soc.* **34**:5(2002), 513–532.
- [13] Kh.K. Ishkin, "On the Spectral Instability of the Sturm–Liouville Operator with a Complex Potential", *Differ. Equ.* **45**:4 (2009), 494–509 (Translated from *Differ. Uravneniya* **45**:4 (2009), 480–495).
- [14] Kh.K. Ishkin, "A localization criterion for the eigenvalues of a spectrally unstable operator", *Doklady Mathematics* **80**:3 (2009), 829–832 (Translated from *Dokl. AN* **429**:3 (2009), 301–304).
- [15] Kh.K. Ishkin, "Conditions of Spectrum Localization for Operators not Close to Self-Adjoint Operators", *Doklady Mathematics* **97**:2 (2018), 170–173 (Translated from *Dokl. AN* **479**:5 (2018), 497–500).
- [16] E.B. Davies, "Eigenvalues of an elliptic system", *Math. Zeitschrift* **243** (2003), 719–743.
- [17] Kh.K. Ishkin, "On localization of the spectrum of the problem with complex weight", *Journal of Mathematical Sciences* **150**:6 (2008), 2488–2499 (Translated from *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* **12**:5 (2006), 49–64).
- [18] Kh.K. Ishkin, "On analytic properties of Weyl function of Sturm–Liouville operator with a decaying complex potential", *Ufa Math. Journal* **5**:1 (2013), 36–55.
- [19] Kh.K. Ishkin, "On a Trivial Monodromy Criterion for the Sturm–Liouville Equation", *Math. Notes* **94**:4 (2013), 508–523 (Translated from *Matem. Zametki* **94**:4 (2013), 552–568).
- [20] A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov, "Spectral Properties of the Complex Airy Operator on the Half-Line", *Funct. Anal. Appl.* **51**:1 (2017), 66–79 (Translated from *Funk. analiz i ego pril.* **51**:1 (2017), 82–98).
- [21] Kh.K. Ishkin, "A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve", *St. Petersburg Math. J.* **28**:1 (2017), 37–63 (Translated from *Algebra i Analiz* **28**:1 (2016), 52–88).
- [22] Kh.K. Ishkin, A.V. Rezbayev, "Toward the Davies formula on the distribution of the eigenvalues of a nonselfadjoint differential operator", *Complex analysis, Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Prilozh. Temat. Obz., VINITI* **153** (2018), 84–93 [in Russian].
- [23] M.V. Fedoryuk, *Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1993). Zbl 0782.34001
- [24] B.Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions* (Gostekhizdat, Moscow, 1956); English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.

С.Е. Айтжанов^{1,2,*} , К.С. Бекенаева³, Г.О. Жұмағұл³

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

³Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com

РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Данная работа посвящена фундаментальной проблеме исследования разрешимости начально-краевой задачи для квазилинейного псевдогиперболического уравнения (называемых также уравнениями соболевского типа) с достаточно гладкой границей. В представленной работе исследуется начально-краевая задача для квазилинейного уравнения псевдогиперболического типа с нелинейным граничным условием Неймана-Дирихле. В статье с помощью метода Галеркина доказывается существование слабого решения квазилинейного псевдогиперболического уравнения в ограниченной области. С использованием теорем вложения Соболева, получены априорные оценки решения. Применение Галеркинских приближений позволяет получить оценку сверх времени существования решения. Доказана локальная теорема о существовании слабого обобщенного решения. При доказательстве существования искомого решения рассматриваемой краевой задачи используются априорные оценки и теорема Реллиха-Кондрашова. Единственность слабого обобщенного решения начально-краевой задачи квазилинейного уравнения псевдогиперболического типа доказывается на основе полученных априорных оценок и применения леммы Гронуолла-Беллмана. Необходимость рассмотрения и изучения такого рода начально-краевых задач для квазилинейного псевдогиперболического уравнения вытекает из практических потребностей. К примеру, при решении дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы, важно, чтобы было хорошее соответствие между выбранной моделью и реальным объектом.

Ключевые слова: псевдогиперболические уравнения, нелинейные граничные условия, метод Галеркина, существование решения, единственность решения.

С.Е. Айтжанов^{1,2,*}, К.С. Бекенаева³, Г.О. Жұмағұл³

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

³Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com

Сызықты емес шекаралық шартты псевдогиперболалық теңдеудің шешімділігі

Бұл жұмыс жеткілікті тегіс шекарасы бар квазисызықты псевдогиперболалық теңдеу үшін (Соболев типті теңдеулер деп те аталатын) бастапқы-шеттік есептің шешілуін зерттеудің іргелі мәселесіне арналған. ұсынылған жұмыста Нейман-Дирихле сызықты емес шекаралық шарттары бар псевдогиперболалық типті квазисызықты теңдеуіне арналған бастапқы-шеттік есеп зерттеледі. Мақалада Галеркин әдісі арқылы шектелген облыста квазисызықты псевдопараболалық теңдеудің әлсіз шешімінің бар болуы дәлелденеді. Соболевтың енгізу теоремаларын қолдану арқылы шешімнің априорлы бағалары алынды. Галеркиннің жуықтауларын қолдану шешімнің бар болу уақытынан тыс бағалауларды алуға мүмкіндік береді. Әлсіз жалпыланған шешімнің бар болу жөніндегі жергілікті теорема дәлелденді. Қарастырылған шеттік есептің ізделінді шешімінің бар болуын дәлелдеу кезінде априорлы бағалаулар мен Реллих-Кондрашов теоремасы қолданылады. Псевдопараболалық типті квазисызықты теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептің әлсіз жалпыланған шешімінің жалғыздығы алынған априорлы бағалаулар мен Гронуолл-Беллман леммасы негізінде дәлелденеді. Квазисызықты псевдогиперболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептерді қарастыру және зерттеу қажеттілігі практикалық мұқтаждықтардан туындайды. Мысалы, физикалық әдерістерді модельдейтін дифференциалдық теңдеулерді шешу кезінде таңдалған модель мен нақты объект арасында бір жақсы сәйкестік болуы қажетті әрі маңызды.

Түйін сөздер: псевдогиперболалық теңдеулер, сызықты емес шекаралық шарттар, Галеркин әдісі, шешімнің бар болуы, шешімнің жалғыздығы.

S.E. Aitzhanov^{1,2,*}, K.S. Bekenaeva³, G.O. Zhumagul³

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

³Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com

Solvability of a Pseudohyperbolic Equation with a Nonlinear Boundary Condition

This paper is devoted to the fundamental problem of investigating the solvability of an initial-boundary value problem for a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation (also called Sobolev type equations) with a sufficiently smooth boundary. In this work, we study an initial-boundary value problem for a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation with a nonlinear Neumann-Dirichlet boundary condition. The paper uses the Galerkin method to prove the existence of a weak solution of a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation in a bounded domain. Using Sobolev embedding theorems, priori estimates of the solution are obtained. The use of Galerkin approximations allows us to obtain an overtime estimate of the solution's existence. A local theorem on the existence of a weak generalized solution is proved. A priori estimates and the Rellich-Kondrashov theorem are used to prove the existence of the desired solution to the boundary value problem under consideration. The uniqueness of a weak generalized solution to the initial boundary value problem of a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation is proved on the basis of the obtained a priori estimates and the application of the Gronwall-Bellman Lemma. The need to consider and study such initial-boundary value problems for a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation follows from practical needs. For example, when solving differential equations that model physical processes, it is important that there is a good match between the selected model and the real object.

Key words: pseudohyperbolic equations, nonlinear boundary conditions, Galerkin method, existence of a solution, uniqueness of a solution.

1 Введение

Первым строгим математическим исследованием задач для уравнений, не являющихся уравнениями типа Коши-Ковалевской, является пионерская работа С.Л.Соболева [1]. Эта же работа пробудила большой интерес к исследованию неклассических уравнений, названных уравнениями соболевского типа. Исследование задач для псевдопараболического типа началось в конце 1970-х годах. Изучению нелинейных уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ [2]- [22]. Моделированию физических процессов, приводящих к уравнениям типа Соболева и, в частности, псевдопараболического типа, посвящены работы [6]- [19]. Вопросы асимптотического поведения решений рассматриваемых задач при больших временах, теория рассеяния и устойчивость решений типа уединенных волн как для одномерных так и для многомерных уравнений типа Бенджамена-Бона-Махони и Бенджамена-Бона-Махони-Бюргерса, Розенау-Бюргерса [4], [5]. Исследованию разрешимости начально-краевых задач для уравнении псевдопараболического и псевдогиперболического типа существенный вклад внесли Осколков А.П., Антонцев С.Н., Кожанов А.И., Свешников А.И., Корпусов М.О. и многие другие ученые.

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T\}$ квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - \Delta u) - \Delta u = b(x, t)|u_t|^{p-2}u_t + f(x, t), \quad (1)$$

с нелинейным граничным условием

$$\frac{\partial^2 \partial u}{\partial t^2 \partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} + K(x, t)|u|^{\sigma-2}u \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (3)$$

Здесь $\Omega \subset R^n$, $n \geq 3$ ограниченная область, граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, p и σ положительные константы.

Функции $b(x, t)$, $f(x, t)$, $K(x, t)$ и $u_0(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} 0 < k_0 \leq K(x, t) \leq k_1, \quad 0 < K_t(x, t) \leq k_1, \\ 0 < b(x, t) \leq b_1, \quad 0 < b_t(x, t) \leq b_1, \\ \|f(x, t)\|_{2, \Omega}^2 \leq C_0 e^{\gamma t}, \quad \gamma \leq 1, \quad u_0(x), u_1(x) \in W_2^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4)$$

Определение 1 Слабым обобщенным решением задачи (1)-(3) называется функция $u(x, t)$ из пространства $W_2^1(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_\sigma(\Gamma)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} v + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - b(x, t)|u_t|^{p-2}u_t v \right) dx dt + \\ + \int_0^T \int_{\Gamma} K(x, t)|u|^{\sigma-2}u v d\Gamma dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt, \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_\sigma(\Gamma)$.

1.2 Существование решения

Выберем в $H^1(\Omega)$ некоторую систему функций $\{\Psi_j(x)\}$ образующую базис в данном пространстве. Такая система заведомо существует, поскольку $H^1(\Omega)$ - сепарабельное пространство. Будем искать приближенное решение задачи (1)-(3) в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{k=1}^m C_{mk}(t) \Psi_k(x), \quad (6)$$

где коэффициенты $C_{mk}(t)$ ищутся из условий

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m C_{mk}''(t) \left\{ \int_{\Omega} \left[\Psi_k \Psi_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} \right] dx \right\} + \\ + \sum_{k=1}^m C_{mk}(t) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} dx + \sum_{k=1}^m C_{mk}(t) \int_{\Gamma} K(x, t)|u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma - \\ - \sum_{k=1}^m C_{mk}'(t) \int_{\Omega} b(x, t)|u_{mt}|^{p-2} \Psi_k \Psi_j dx = \int_{\Omega} f \cdot \Psi_j dx, \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_{m0} = u_m(0) = \sum_{k=1}^m C_{mk}(0)\Psi_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Psi_k, \quad (8)$$

$$\text{причем } u_{m0} \rightarrow u_0 \text{ сильно в } H^1(\Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{C}_m &\equiv \{C_{1m}(t), \dots, C_{mm}(t)\}^T, \\ a_{kj} &= \int_{\Omega} [\Psi_k \Psi_j + (\nabla \Psi_k, \nabla \Psi_j)] dx, \\ b_{kj} &= - \int_{\Gamma} K(x, t) |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma + \int_{\Omega} b(x, t) |u_{mt}|^{p-2} \Psi_k \Psi_j dx + \int_{\Omega} f \cdot \Psi_j dx, \\ A_m(\vec{C}_m) &\equiv \{a_{jk}(\vec{C}_m)\}, \vec{G}_m(\vec{C}_m) \equiv \{b_{jk}(\vec{C}_m)\}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (7) принимает матричный вид

$$A_m \vec{C}_m'' \equiv \vec{G}_m(\vec{C}_m) \vec{C}_m'. \quad (10)$$

Умножим обе части равенства (7) на $C'_{mj}(t)$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1, m}$. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [|u'_m|^2 + |\nabla u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} K(x, t) |u_m|^{\sigma} d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} K_t(x, t) |u_m|^{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega} b(x, t) |u'_m|^p dx + \int_{\Omega} f \cdot u'_m dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Оценим правую часть тождества (11), применим следующие интерполяционные неравенства

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leq C_1 \left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{\theta p}{2}} \|u\|_{2,\Omega}^{(1-\theta)p} \leq C_1 \left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

где $\theta = \frac{(p-2)N}{2p}$, $\theta < 1$, $2 < p < \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{\sigma,\Omega}^{\sigma} \leq C'_2 \left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{\theta \sigma}{2}} \|u\|_{2,\Omega}^{(1-\theta)\sigma} \leq C'_2 \left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}} \leq \\ \leq C_2 \left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p}{2}} + C_3, \end{aligned}$$

где $\theta = \frac{pN - 2(N-1)}{2p}$, $0 < \theta < 1$, $2 < \sigma < \frac{2(N-1)}{N-2}$, $N \geq 3$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} K_t(x, t) |u_m|^{\sigma} d\Gamma \right| \leq k_1 C_2 \left(\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p}{2}} + k_1 C_3, \\ \left| \int_{\Omega} b(x, t) |u'_m|^p dx \right| \leq b_0 \|u'_m\|_{p,\Omega}^p \leq b_0 C_1 \left(\|\nabla u'_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u'_m\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f \cdot u'_m dx \right| &\leq \|f\|_{2,\Omega} \|u'_m\|_{2,\Omega} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|u'_m\|_{2,\Omega}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|f\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left(\|\nabla u'_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u'_m\|_{2,\Omega}^2 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя полученные неравенства (12) и (13) в тождество (11), получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} [|u'_m|^2 + |\nabla u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx + \frac{2}{\sigma} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} K(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma \leq \\ &\leq \left(\|\nabla u'_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u'_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\sigma} \int_{\Gamma} K(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma \right) + \\ &+ C_4 \left(\|\nabla u'_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u'_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\sigma} \int_{\Gamma} K(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma \right)^{\frac{p}{2}} + C_0 e^{\gamma t} + 2k_1 C_3, \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим через $y(t) \equiv \int_{\Omega} [|u'_m|^2 + |\nabla u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx + \frac{2}{\sigma} \int_{\Gamma} K(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma$, тогда (14) примет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq y(t) + C_4 [y(t)]^{\frac{p}{2}} + C_0 e^{\gamma t} + 2k_1 C_3.$$

Обозначим через $z(t) \equiv e^{-t} y(t)$ и интегрируем от 0 до t , получим

$$z(t) \leq z(0) + 2k_1 C_3 + \frac{C_0}{1-\gamma} + C_4 \int_0^t e^{-\frac{p-2}{2}s} [z(s)]^{\frac{p}{2}} ds.$$

Применив к которому лемму Гронуолла-Беллмана-Бихари [23], если

$$C_4 \left(e^{\frac{p-2}{2}t} - 1 \right) < \frac{1}{\left(z(0) + 2k_1 C_3 + \frac{C_0}{1-\gamma} \right)^{\frac{p-2}{2}}}, \quad 0 \leq t < T,$$

тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [|u'_m|^2 + |\nabla u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx + \frac{2}{\sigma} \int_{\Gamma} K(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma \leq \\ &\leq \frac{C_5 e^t}{\left[1 - C_5 \frac{p-2}{2} C_4 \left(e^{\frac{p-2}{2}t} - 1 \right) \right]^{\frac{p-2}{2}}}, \\ C_5 &= \|u'_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u'_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \\ &+ \frac{2}{\sigma} \int_{\Gamma} K(x,t) |u_m(x,0)|^\sigma d\Gamma + 2k_1 C_3 + \frac{C_0}{1-\gamma}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из этой оценки можно сделать вывод, что существует $T_0 > 0$ такое, что

$$\int_{\Omega} [|u'_m|^2 + |\nabla u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx + \frac{2}{\sigma} \int_{\Gamma} K(x, t) |u_m|^\sigma d\Gamma \leq C_6, \quad (16)$$

для всех $t \in [0, T]$, $T < T_0$, где постоянная C_6 не зависит от $m \in N$.

Теперь умножим равенство (7) на $C''_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \|u''_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u''_m\|_{2,\Omega}^2 &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} b(x, t) |u'_m|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} b_t(x, t) |u'_m|^p dx - \\ &\quad - \int_{\Gamma} K(x, t) |u_m|^{\sigma-2} u_m u_{mtt} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla u_{mtt} dx + \int_{\Omega} f \cdot u''_m dx. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по τ от 0 до t , тогда получим соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\|u''_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u''_m\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau &= -\frac{1}{p} \int_{\Omega} b(x, 0) |u'_m(x, 0)|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} b(x, t) |u'_m|^p dx - \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_0^t \int_{\Omega} b_t(x, \tau) |u'_m|^p dx d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma} K(x, \tau) |u_m|^{\sigma-2} u_m u_{mtt} d\Gamma d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla u_{mtt} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} f \cdot u''_m dx d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценивая правую часть и подставим в тождество (17), получим

$$\frac{1}{2} \int_0^t \|u''_m\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \frac{2}{3} \int_0^t \|\nabla u''_m\|_{2,\Omega}^2 d\tau \leq C_7(t),$$

$$\int_0^T \|u''_m\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_0^T \|\nabla u''_m\|_{2,\Omega}^2 d\tau \leq C_7. \quad (18)$$

Из полученных оценок (16), (18) вытекают соответственно следующие утверждения:

$$u_m \text{ ограничено в } L_\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad (19)$$

$$u'_m \text{ ограничено в } L_\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad (20)$$

$$K(x, t) |u_m|^{\sigma-2} u_m \text{ ограничено в } L_\infty(0, T; L_{\sigma'}(\Gamma)), \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1. \quad (21)$$

$$u''_m \text{ ограничено в } L_2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (22)$$

Кроме того, в силу поставленных условий на p :

$$|u_m|^{p-2}u_m \in L_\infty(0, T; L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)), \quad 2 < p < \frac{2N}{N-2}, \quad N \geq 3. \quad (23)$$

Из (19) и (20) следует, что существует подпоследовательность u_{m_k} последовательности u_m , *-слабо сходящаяся к некоторому элементу $u' \in L_\infty(0, T; H^1(\Omega))$, т.е.

$$u'_{m_k} \rightharpoonup^* u' \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; H^1(\Omega)).$$

Аналогичным образом, из (20)-(23) вытекает, что существует такая последовательность $\{u'_{m_k}\} \subset \{u'_m\}$, что $u'_{m_k} \rightharpoonup^* u'$ слабо в $L_2(0, T; H^1(\Omega))$.

В силу теоремы Реллиха-Кондрашова, вложение $W_2^1(Q_T)$ в $L_2(Q_T)$ компактно. Это означает, что последовательность u'_{m_k} можно выбрать так, что $u'_{m_k} \rightarrow u'$ в норме $L_2(Q_T)$, а значит сходящейся почти всюду [24].

Из (22) следует, что $K(x, t)|u_m|^{\sigma-2}u_m \in L_\infty(0, T; L_{\sigma'}(\Gamma))$, $\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1$ и сходится почти всюду в $(0, T)$.

Из ограниченности $\sqrt{K(x, t)|u_m|^{\sigma-2}u_m}$ в $L_2(0, T; L_{\sigma'}(\Gamma))$, $\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1$ вытекает слабая сходимость в этом пространстве подпоследовательности $K(x, t)|u_{m_k}|^{\sigma-2}u_{m_k}$ к некоторой функции $\chi(x, t)$.

В силу леммы 1.3, доказанной в [24], следует $\chi(x, t) = K(x, t)|u|^{\sigma-2}u$.

Приведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (7). Но сначала умножим каждое из равенств (7) на $d_j(t) \in C[0, T]$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1, m}$. Затем проинтегрируем по t от 0 до T , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^3 u_m}{\partial t^2 \partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_m}{\partial t} \mu - b(x, t)|u_{mt}|^{p-2}u_{mt}\mu \right) dx dt - \\ & - \int_0^T \int_\Gamma K(x, t)|u_m|^{\sigma-2}u_m \mu d\Gamma dt = \int_0^T \int_\Omega f \mu dx dt, \quad (24) \end{aligned}$$

где $\mu(x, t) = \sum_{j=1}^m d_j(t)\Psi_j(x)$.

Учитывая полученные включения и сходимости, перейдем в (24) к пределу при $m \rightarrow \infty$ и получим (5) для $v = \mu$. Так как множество всех функций $\mu(x, t)$ плотно в $W_2^1(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_\sigma(\Gamma)$, то предельное соотношение выполняется для всех $v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_\sigma(\Gamma)$.

Теорема 1 Пусть выполняются условия (4), а также $2 < p < \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$, $2 < \sigma < \frac{2(N-1)}{N-2}$, $N \geq 3$. Тогда на интервале $(0, T)$, $T < T_0$, существует слабое обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1)-(3), причем имеют место следующие включения:

$$\begin{aligned} & u \in L_\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad u_t \in L_\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ & u_{tt} \in L_2(0, T; H^1(\Omega)), \quad |u|^{\sigma-2}u \in L_\infty(0, T; L_{\sigma'}(\Gamma)), \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1. \end{aligned}$$

1.3 Единственность слабого обобщенного решения

Предположим, что задача (1)-(3) имеет два решения: $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} v + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^2 \partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - b(x, \tau) (|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau}) v \right) dx d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\Gamma} K(x, \tau) (|u_1|^{\sigma-2} u_1 - |u_2|^{\sigma-2} u_2) v d\Gamma d\tau = 0.$$

В силу $v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_{\sigma}(\Gamma)$, то в качестве $v(x, t)$ можно взять $u_t(x, t)$, т.е. положим $v(x, t) = u_t(x, t)$

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} u_{\tau} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^2 \partial x_i} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial x_i} \right) - \right. \\ \left. - b(x, \tau) (|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau}) u_{\tau} \right) dx d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\Gamma} K(x, \tau) (|u_1|^{\sigma-2} u_1 - |u_2|^{\sigma-2} u_2) u_{\tau} d\Gamma d\tau = 0. \quad (25)$$

Применим следующее неравенство

$$||u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2| \leq (q+1) (|u_1|^q + |u_2|^q) |u_1 - u_2| \quad \text{при } q > 0.$$

Тогда (25) запишется в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [|u_{\tau}|^2 + |\nabla u_{\tau}|^2 + |\nabla u|^2] dx \leq K_1 (\sigma - 1) \int_0^t \int_{\Gamma} (|u_1|^{\sigma-2} + |u_2|^{\sigma-2}) u u_{\tau} d\Gamma d\tau + \\ + b_1 \int_0^t \int_{\Omega} (|u_{1\tau}|^{p-2} + |u_{2\tau}|^{p-2}) u_{\tau}^2 dx d\tau. \quad (26)$$

Оценим правую часть неравенства (26), применяя неравенство Гельдера

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} b(x, \tau) (|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau}) u_{\tau} dx d\tau \right| \leq \\ \leq b_1 (p-1) \int_0^t \int_{\Omega} (|u_{1\tau}|^{p-2} + |u_{2\tau}|^{p-2}) u_{\tau}^2 dx d\tau \leq \\ \leq b_1 (p-1) \left(\left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_{1\tau}|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} + \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_{2\tau}|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} \right) \times \\ \times \left(\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau}^r dx d\tau \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau}^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $r = \frac{2N}{N-2}$, $p \leq 2 + \frac{1}{N-2}$, $N \geq 3$. Тогда по теореме вложения Соболева $H^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ и $H^1(\Omega) \subset L_{2r(p-2)/(r-2)}(\Omega)$. В этом случае, учитывая класс гладкости решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, приходим к оценке

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} b(x, \tau) (|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau}) u_{\tau} dx d\tau \right| \leq C_5 \int_0^t \left(\|\nabla u_{\tau}\|_{2,\Omega}^2 + \|u_{\tau}\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau. \quad (27)$$

Аналогичным образом, оценивается

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Gamma} (|u_1|^{\sigma-2} + |u_2|^{\sigma-2}) uu_{\tau} d\Gamma d\tau \right| \leq \\ & \leq \left(\left(\int_0^t \int_{\Gamma} |u_1|^{\frac{2r(\sigma-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} + \left(\int_0^t \int_{\Gamma} |u_2|^{\frac{2r(\sigma-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} \right) \times \\ & \quad \times \left(\int_0^t \int_{\Gamma} u^r dx d\tau \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^t \int_{\Gamma} u_{\tau}^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Положим $r = \frac{2(N-1)}{N-2}$, $\sigma \leq 2 + \frac{1}{N-2}$, $N \geq 3$. Тогда по теореме вложения Соболева $H^1(\Omega) \subset L_r(\Gamma)$ и $H^1(\Omega) \subset L_{2r(\sigma-2)/(r-2)}(\Gamma)$. Учитывая класс гладкости решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, приходим к оценке

$$\left| \int_0^t \int_{\Gamma} (|u_1|^{\sigma-2} + |u_2|^{\sigma-2}) uu_{\tau} d\Gamma d\tau \right| \leq C_6 \int_0^t \left(\|\nabla u_{\tau}\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u_{\tau}\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau. \quad (28)$$

В силу (27), (28) получим

$$\int_{\Omega} [|u_{\tau}|^2 + |\nabla u_{\tau}|^2 + |\nabla u|^2] dx \leq C_7 \int_0^t \left(\|\nabla u_{\tau}\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u_{\tau}\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau, \quad (29)$$

которое в силу леммы Гронуолла-Беллмана влечет $\int_{\Omega} (|u_{\tau}|^2 + |\nabla u_{\tau}|^2 + |\nabla u|^2) dx = 0$ почти всюду на временном интервале $(0, T)$, что означает единственность слабого обобщенного решения. Таким образом справедлива

Теорема 2 Пусть выполняются условия (4),

$$2 < \sigma < 2 + \frac{1}{N-2}, \quad N \geq 3, \quad p \leq 2 + \frac{1}{N-2}, \quad N \geq 3.$$

Тогда слабое обобщенное решение задачи (1)-(3) на интервале $(0, T)$ единственно.

2 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проекта Министерством образования и науки Республики Казахстан (гранты № AP08052425).

Список литературы

- [1] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – №18 – С. 3-50.
- [2] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Коница И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. матем. и механ. – 1960. – Т. 24, №5 – С. 58-73.
- [3] Ting T.W. Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Japan. – 1969. – V. 14 – P. 1-26.
- [4] Benjamin T.B. Lectures on nonlinear wave motion // Ltd. Appl. Math. Vol. Amer. Math. Soc: Providence, R.I.– 1974. – V. 15 – P. 3-7.
- [5] Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Pliilos. Trans. Roy. Soc. – 1972. – V.272, №1220 – P. 47-78.
- [6] Showalter R.E. Existence and representation theorems for a semilinearSobolev equation in Banachspace // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – V.3, №3 – P. 527-543.
- [7] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1970. – V. 1, №1 – P. 1-26.
- [8] Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений //Мат. сб. –1975.– Т. 25, №1. – С. 145-158.
- [9] Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1988. – Вып. 179 – С. 126-164.
- [10] Осколков А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1991. – Вып. 198 – С. 31-48.
- [11] Габов С.Л., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. // М.: Наука, 1990.
- [12] Шишмарев И.А. Об одном нелинейном уравнении типа Соболева // Диффер. уравн. – 2005. – Т. 41, №1. – С. 1-3.
- [13] Корпусов М.О., Свешников А.Г. О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью // Ж. вычисл. мат. мат. физ. – 2003. – Т. 43, №7. – С. 944-962.
- [14] А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007.
- [15] А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987.
- [16] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term: Existence, uniqueness and blowup // Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – V. 446. – P. 1255-1273.
- [17] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh Generalized Kelvin-Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms // Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – V. 456. – P. 99-116.
- [18] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh Kelvin-Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping // Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – V. 473. – P. 1122-1154.
- [19] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Communications in Mathematical Sciences. – 2019. –V. 17, №7. – P. 1915-1948.
- [20] А.И. Кожанов, Н.С. Попов О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2010. – Т. 10, №3. – С. 46-62.
- [21] Ш. Амиров, А.И. Кожанов Разрешимость смешанной задачи для некоторых сильно нелинейных уравнений соболевского типа высокого порядка // Сиб.журн.индустр.матем. – 2014. – Т.17, №4. – С. 14-30.
- [22] А.И. Кожанов Краевые задачи для уравнения соболевского типа с необратимым оператором при старшей производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. – 2019. – Т. 167. – С. 34-41.
- [23] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
- [24] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Наука, 1972. – 588 с.

References

- [1] Sobolev S.L., "Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki.[On a new problem in mathematical physics]", *Izv. AN SSSR. Ser. mat.*, 18(1954), 3-50 [in Russian].
- [2] Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Konina I.N., "Ob osnovnykh predstavleniyakh teorii fil'tratsii v treshchinnovytykh sredakh. [On the basic concepts of the theory of filtration in fractured media]", *Prikl. matem. i mekhan.* **24**:5(1960), 73-58 [in Russian].
- [3] Ting T.W., "Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations" ,, *J. Math. Soc. Japan.* 14(1969), 1-26.
- [4] Benjamin T.B., "Lectures on nonlinear wave motion" , *Ltd. Appl. Math. Vol. Amer. Math. Soc: Providence; R.I.* 15(1974), 3-7.
- [5] Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J., "Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems" , *Philos. Trans. Roy. Soc.* **272**:1220(1972), 47-78.
- [6] Showalter R.E., "Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banachspace" , *SIAM J. Math. Anal.* **3**:3(1972), 527-543.
- [7] Showalter R.E., Ting T. W., "Pseudoparabolic partial differential equations" , *SIAM J. Math. Anal.* **1**:1(1970), 1-26.
- [8] Pokhozhaev S.I., "Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy.[On a class of quasilinear hyperbolic equations]" *Mat. Sb.* **25**:1(1975), 145-158 [in Russian].
- [9] Oskolkov A.P., *Nachal'no-krayevyye zadachi dlya uravneniy dvizheniya zhidkostey Kel'vina-Foygta i zhidkostey Oldroyta [Initial-boundary value problems for the equations of motion of Kelvin-Voigt fluids and Oldroyd fluids]* (Tr. Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR, **179**(1988), 126-164) [in Russian].
- [10] Oskolkov A.P., "Nelokal'nyye problemy dlya odnogo klassa nelineynykh operatornykh uravneniy, vznikayushchikh v teorii uravneniy tipa S. L. Soboleva. [Nonlocal problems for a class of nonlinear operator equations arising in the theory of equations of the Sobolev type]" , *Zap. nauch. semin. LOMI.* **198**(1991), 31-48 [in Russian].
- [11] Gabov S.L., Sveshnikov A.G., *Lineynyye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennikh voln.[Linear problems in the theory of nonstationary internal waves.]* (M.: Nauka, 1990) [in Russian].
- [12] Shishmarev I.A., "Ob odnom nelineynom uranenii tipa Soboleva. [On a nonlinear uranium of the Sobolev type]" , *Differ. Equ.* **41**:1(2000), 1-3 [in Russian].
- [13] Korpusov M.O., Sveshnikov A.G., "O razreshimosti sil'no nelineynogo uravneniya psevdoparabolicheskogo tipa s dvoynoy nelineynost'yu. [On the solvability of a strongly nonlinear equation of pseudoparabolic type with double nonlinearity]" , *ZH. vychisl. mat. mat. fiz.* **43**:7(2003), 944-962 [in Russian].
- [14] Sveshnikov G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner YU.D., *Lineynyye i nelineynyye uravneniya sobolevskogo tipa [Pletner, Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type]* (M.: Fizmatlit, 2007) [in Russian].
- [15] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P., *Rezhimy s obostreniyem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy [Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations]* (M.: Nauka, 1987) [in Russian].
- [16] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh, "Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term: Existence, uniqueness and blowup" , *Mathematical Analysis and Applications* **446**(2017), 1255-1273.
- [17] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh, "Generalized Kelvin-Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms" , *Mathematical Analysis and Applications* **456**(2017), 99-116.
- [18] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, "Kelvin-Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping" , *Mathematical Analysis and Applications* **473**(2019), 1122-1154.
- [19] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, "Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids" , *Communications in Mathematical Sciences* **17**:7(2019), 1915-1948.
- [20] A.I. Kozhanov, N.S. Popov, "O razreshimosti nekotorykh zadach so smeshcheniyem dlya psevdoparabolicheskikh uravneniy [On the solvability of some displacement problems for pseudoparabolic equations]" , *Vestnik NGU. Ser. matem., mekh., inform.* **1**:3(2010), 46-62 [in Russian].
- [21] Sh. Amirov, A., I. Kozhanov, "Razreshimost' smeshannoy zadachi dlya nekotorykh sil'no nelineynykh uravneniy sobolevskogo tipa vysokogo poriyadka [Solvability of the mixed problem for some highly nonlinear high-order sobolev type equations]" , *Sib. zhurn. industr. matem.* **17**:4(2014), 14-30 [in Russian].

-
- [22] A.I. Kozhanov, "Krayevyye zadachi dlya uravneniy sobolevskogo tipa s neobratimym operatorom pri starshey proizvodnoy [Boundary value problems for Sobolev type equations with an irreversible operator for the highest derivative]", *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i yeye pril.* **167**(2019), 34-41 [in Russian].
- [23] Demidovich B.P., *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]* (M.: Nauka, 1967) [in Russian].
- [24] Lions ZH.-L., *Nekotoryye metody resheniya nelineynykh krayevykh zadach [Some methods for solving nonlinear boundary value problems]* (M.: Nauka, 1972, 588 pp.) [in Russian].

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Механика

Механика

Mechanics

IRSTI 55.30.03

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.04>

Zh.Zh. Baigunchekov^{id}, A.N. Kassinov*^{id}
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: kasinov07@gmail.com

DIRECT KINEMATICS OF A 3-PRPS TYPE PARALLEL MANIPULATOR

Parallel manipulators with six degrees of freedom and three limbs have a large workspace and less complex singular configurations compared to the parallel manipulators with six degrees of freedom and six limbs. This paper is presented to solve the direct kinematics of a novel 3-PRPS type parallel manipulator with six-degrees-of-freedom, where P, R, and S are prismatic, revolute and spherical kinematic pairs respectively. The considered parallel manipulator is formed by connecting a moving platform with a fixed platform (base) through three closing kinematic chains of a PRPS type in which the prismatic kinematic pairs are active and they are located on a fixed platform and legs. The constant and variable parameters of the considered parallel manipulator characterizing its geometry and kinematics respectively are determined. In the direct kinematics, the positions of the moving platform are determined by the known constant parameters of the links and the given variable parameters of the active kinematic pairs. An analysis of the obtained equations of the direct kinematics showed that the variable parameters of the active prismatic kinematic pairs are set free, and these equations are reduced to a 16th –order polynomial equation with passive kinematic pairs variables. Numerical examples of the considered parallel manipulator’s direct kinematics are presented, and the results showed that the direct kinematics equations have four solutions corresponding to the four assemblies of the parallel manipulator.

Key words: parallel manipulator, moving and fixed platforms, direct kinematics.

Ж.Ж. Байгунчеков, А.Н. Касинов*
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
*e-mail: kasinov07@gmail.com

3-PRPS түрдегі параллель манипулятордың тура кинематикалық есебі

Алты еркіндік дәрежесі және үш аяғы бар параллель манипуляторлар алты еркіндік дәрежесі және алты аяғы бар параллель манипуляторларға қарағанда үлкен жұмыс алаңы және қарапайым сингулярлық конфигурациясына ие. Бұл жұмыста P, R және S-ілгерілемелі, айналмалы және сфералық кинематикалық жұптар. Қарастырылған параллелді манипулятор ілгерілемелі кинематикалық белсенді болатын және олар қозғалмайтын платформа мен аяқтарда орналасқан PRPS типті үш тұйықтаушы кинематикалық тізбектер арқылы жылжымалы платформаны жылжымайтын платформамен (негізбен) біріктіру жолымен құрылған. Параллелді манипулятордың оның геометриясы мен кинематикасын сипаттайтын тұрақты және айнымалы параметрлері анықталды. Тура кинематикада қозғалатын платформаның орналасуы буындардың белгілі тұрақты параметрлерімен және белсенді кинематикалық жұптардың берілген айнымалы параметрлерімен анықталады. Тура кинематиканың алынған теңдеулерін талдау белсенді ілгерілемелі кинематикалық жұптардың айнымалы параметрлері босатылғанын көрсетті және бұл теңдеулер 16–ретті полиномиалдық теңдеуден пассивті кинематикалық жұптардың айнымалылар теңдеуінен құралады. Қарастырылған параллель манипулятордың тікелей кинематикасының сандық мысалдары келтірілген және нәтижелер тікелей кинематиканың теңдеулерінде параллель манипулятордың төрт түйініне сәйкес төрт шешім болатындығын көрсетеді.

Түйін сөздер: параллелді манипулятор, жылжымалы және қозғалмайтын платформалар, тура кинематика.

Ж.Ж. Байгунчеков, А.Н. Касинов*

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: kasinov07@gmail.com

Прямая задача кинематики параллельного манипулятора вида 3-PRPS

Параллельные манипуляторы с шестью степенями свободы и тремя ногами имеют большую рабочую зону и менее сложные сингулярные конфигурации по сравнению с параллельными манипуляторами с шестью степенями свободы и шестью ногами. Данная работа посвящена решению прямой кинематики нового параллельного манипулятора типа 3-PRPS с шестью степенями свободы, где Р, R и S-призматические, вращательные и сферические кинематические пары соответственно. Рассматриваемый параллельный манипулятор образован путем соединения подвижной платформы с неподвижной платформой (основанием) через три замыкающие кинематические цепи типа PRPS, в которых активны призматические кинематические пары и они расположены на неподвижной платформе и ножках. Определены постоянные и переменные параметры рассматриваемого параллельного манипулятора, характеризующие соответственно его геометрию и кинематику. В прямой кинематике положения движущейся платформы определяются известными постоянными параметрами звеньев и заданными переменными параметрами активных кинематических пар. Анализ полученных уравнений прямой кинематики показал, что переменные параметры активных призматических кинематических пар освобождаются, и эти уравнения сводятся к полиномиальному уравнению 16-го порядка с переменными пассивных кинематических пар. Представлены численные примеры прямой кинематики рассматриваемого параллельного манипулятора, и результаты показали, что уравнения прямой кинематики имеют четыре решения, соответствующие четырем узлам параллельного манипулятора.

Ключевые слова: параллельный манипулятор, подвижные и неподвижные платформы, прямая кинематика.

1 Introduction

Parallel manipulators with closed-loop kinematic chains, in comparison with serial manipulators with open-loop kinematic chains, have high stiffness, carrying capacity, positioning accuracy and dynamic characteristics [1–7]. Most parallel manipulators with six-degrees-of-freedom have six legs, i.e. six kinematic chains connecting a moving platform with a fixed platform (base). One of the problems of parallel mechanisms is a reduction in the number of their legs. With a decrease in the number of legs, the workspace of parallel manipulators increases and singular configurations are reduced.

Three-legged parallel manipulators (tripods) are currently being developed. The following types of tripods are known: 3-URS [8], 3-ESR [9], 3-RRPS [10], 3-RES [11–13], 3-PPSR [14], 3-CRS [16], 3-CCC [17, 18]. We have developed a modern 3-PRPS type parallel mechanism with six-degrees-of-freedom which in comparison with existing tripods, has a large load capacity. Figure 1 shows the 3D model of the developed parallel mechanism, where the moving platform 2 is connected to the fixed base 1 through three identical legs 4-5, 7-8, 10-11 of a PRPS type.

One of the legs 4-5 of this parallel manipulator (Fig. 1), where the hydraulic cylinder 3 moves the leg 3-4 on the fixed base 1, forms the prismatic kinematic pair A. Link 4 is connected by forming the revolute kinematic pair B. Link 4 is connected with link 3 by hydraulic cylinder and the moving platform 2 through the hydraulic cylinder C and spherical D kinematic pairs respectively.

In works [15] and [19], the geometry of this parallel mechanism was studied and the inverse kinematics was solved. According to the developed principle of forming of parallel manipulators, the considered parallel mechanism of a 3-PRPS type is formed by connecting the moving platform 2 with the fixed base 1 through three passive closing kinematic chains 4-5, 7-8, 10-11 of a PRPS type with zero degrees-of-freedom. To describe the geometry and study the kinematics of this

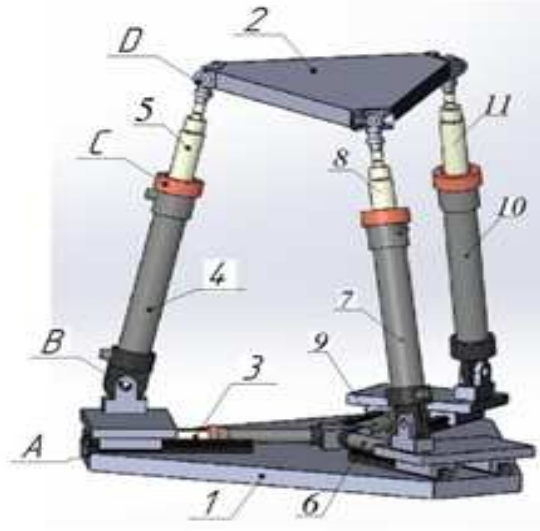


Figure 1 – 3D model of a 3-PRPS type parallel manipulator

parallel manipulator, two Cartesian coordinate systems UVW and XYZ are fixed at two elements of each kinematic pairs. The W and Z axes of these coordinate systems are directed along the axis of rotational and translational motions of the kinematic pairs elements, and the U and X axes are directed along the direction of the perpendicular t , drawn from the W axis to the Z -axis. The transformation matrix $\mathbf{T}_{jk} = \mathbf{T}_{jk}(a_{jk}, \alpha_{jk}, b_{jk}, \beta_{jk}, c_{jk}, \gamma_{jk})$ between the coordinate systems $U_j V_j W_j$ and $X_k Y_k Z_k$, having six parameters has been formed in [19]. The transformation matrix \mathbf{G}_{jk} of the coordinate systems fixed at the ends of binary links is called the matrix of binary link, and it has constant parameters characterizing the geometry of the links. The transformation matrix \mathbf{P}_j of the coordinate systems fixed at the two elements of each kinematic pair is called the matrix of kinematic pair, and it has variable parameters characterizing the relative motions of the kinematic pair's elements.

2 Direct kinematics of a 3-PRPS type parallel manipulators

In Figure 2 the leg 3-4 with the chosen coordinate systems, where $U_1 V_1 W_1$ is an absolute coordinate system fixed at the base 1, and $P X_p Y_p Z_p$ is a coordinate system fixed at the moving platform 2.

This leg has the following constant parameters $\alpha_{12} = 90^\circ, c_{13} = OO_3, a_{34} = O'_3 O_4, \alpha_{12} = -90^\circ, \gamma_{13}$ and the following variable parameters $c_{33} = O_3 O'_3 = s_3, c_{42} = O_4 O_2 = s_5, \gamma_{44} = \theta_4$. Other two legs have similar parameters. Let consider the direct kinematics of a 3-PRPS type parallel mechanism. Since all three legs 3-4, 7-8, 10-11 have similar constant and variable parameters, for the convenience of calculating, the parameters $a_{jk}, \alpha_{jk}, b_{jk}, \beta_{jk}, c_{jk}, \gamma_{jk}$ are denoted by $a_i, \alpha_i, b_i, \beta_i, c_i, \gamma_i$, and the lengths of the links 3,4,7,8,10,11 and the angles determining their positions, are denoted by s_{3i}, s_{5i} and θ_{4i} where i is the serial numbers of the legs, i.e. $i = 1, 2, 3$.

We, then, determine the coordinates of the centers of the spherical joints O_{2i} of the moving platform 2 in the absolute coordinate system $U_1 V_1 W_1$

$$[1, U_{O_{2i}}, V_{O_{2i}}, W_{O_{2i}}]^T = \mathbf{G}_{13i} \cdot \mathbf{P}_{3i}^P \cdot \mathbf{G}_{34i} \cdot \mathbf{P}_{5i}^R \cdot \mathbf{P}_{5i}^P [1, 0, 0, 0]^T, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

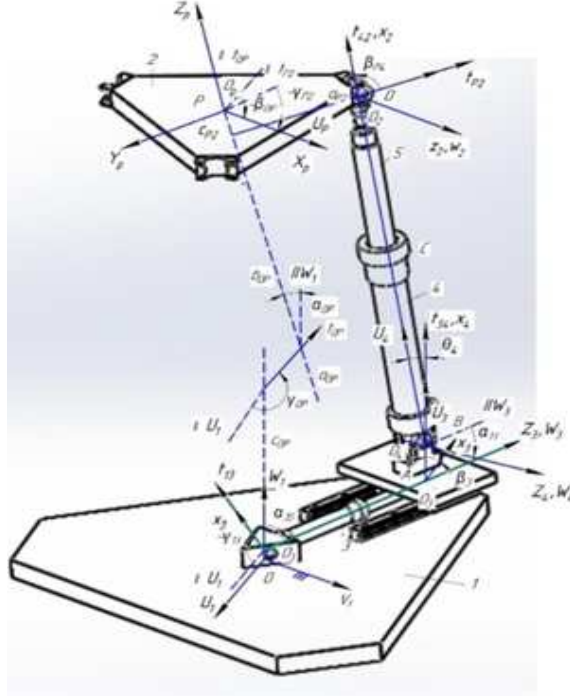


Figure 2 – Leg 3-4 with the coordinate systems

where \mathbf{G}_{13i} , \mathbf{G}_{34i} are the matrices of links, and \mathbf{P}_{3i}^P , \mathbf{P}_{5i}^R , \mathbf{P}_{5i}^P are the matrices of kinematic pairs.

From the systems of matrix equations (1) we obtain

$$\left. \begin{aligned} s_{3i} \cdot s\gamma_{13i} - s_{5i} \cdot s\gamma_{13i} \cdot s\theta_{4i} &= U_{O_{2i}} \\ -s_{3i} \cdot c\gamma_{13i} - s_{5i} \cdot c\gamma_{13i} \cdot s\theta_{4i} &= V_{O_{2i}} \\ c_{3i} + a_{34i} - s_{5i} \cdot s\theta_{4i} &= W_{O_{2i}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where, s and c denote \sin and \cos .

Multiplying the first and the second equations of the system (2) on $c\gamma_{13i}$ and $s\gamma_{13i}$ respectively, and add them, we obtain, that all three variable parameters have disappeared. Therefore, these two equations are interdependent and the variable parameters s_{3i} should be setting.

Then, we set the parameters s_{5i} and for determine the angles θ_{4i} derive the following system of equations

$$\left. \begin{aligned} (U_{O_{21}} - U_{O_{22}})^2 + (V_{O_{21}} - V_{O_{22}})^2 + (W_{O_{21}} - W_{O_{22}})^2 &= a^2 \\ (U_{O_{21}} - U_{O_{23}})^2 + (V_{O_{21}} - V_{O_{23}})^2 + (W_{O_{21}} - W_{O_{23}})^2 &= a^2 \\ (U_{O_{22}} - U_{O_{23}})^2 + (V_{O_{22}} - V_{O_{23}})^2 + (W_{O_{22}} - W_{O_{23}})^2 &= a^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where a are the distances between the spherical joints O_{2i} . After some transformations, from the systems of equations (3) we obtain

$$\left. \begin{aligned} -s_{51} \cdot s_{52} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132}) \cdot s\theta_{41} \cdot s\theta_{42} - s_{31} \cdot s_{51} \cdot s\theta_{41} + s_{31} \cdot s_{52} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132}) \cdot s\theta_{42} + \\ + s_{32} \cdot s_{51} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132}) \cdot s\theta_{41} - s_{32} \cdot s_{52} \cdot s\theta_{42} - s_{51} \cdot s_{52} \cdot c\theta_{42} \cdot c\theta_{41} &= N_1, \\ -s_{51} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133}) \cdot s\theta_{41} \cdot s\theta_{43} - s_{31} \cdot s_{51} \cdot s\theta_{41} + s_{31} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133}) \cdot s\theta_{43} + \\ + s_{31} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133}) \cdot s\theta_{41} - s_{33} \cdot s_{53} \cdot s\theta_{43} - s_{51} \cdot s_{53} \cdot c\theta_{43} \cdot c\theta_{41} &= N_2, \\ -s_{52} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132}) \cdot s\theta_{43} \cdot s\theta_{42} - s_{33} \cdot s_{53} \cdot s\theta_{43} + s_{52} \cdot s_{33} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132}) \cdot s\theta_{42} + \\ + s_{32} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132}) \cdot s\theta_{43} - s_{32} \cdot s_{52} \cdot s\theta_{42} - s_{52} \cdot s_{53} \cdot c\theta_{42} \cdot c\theta_{43} &= N_3, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{a^2 - s_{31}^2 - s_{32}^2 - s_{51}^2 - s_{52}^2 + 2 \cdot s_{31} \cdot s_{32} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132})}{2}, \\ N_2 &= \frac{a^2 - s_{31}^2 - s_{51}^2 - s_{33}^2 - s_{53}^2 + 2 \cdot s_{31} \cdot s_{33} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133})}{2}, \\ N_3 &= \frac{a^2 - s_{32}^2 - s_{52}^2 - s_{33}^2 - s_{53}^2 + 2 \cdot s_{32} \cdot s_{33} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132})}{2}. \end{aligned}$$

We use the following expressions $t_{4i} = \tan(\theta_{4i}/2)$, $s_{\theta_{4i}} = 2 \cdot t_{4i}/(1 + t_{4i}^2)$, $c_{\theta_{4i}} = (1 - t_{4i}^2)/(1 + t_{4i}^2)$, $i = 1, 2, 3$ to the system of equations (4)

$$\left. \begin{aligned} A \cdot t_{341}^2 + B \cdot t_{41} + C &= 0, \\ D \cdot t_{41}^2 + E \cdot t_{41} + F &= 0, \\ Q \cdot t_{41}^2 + R \cdot t_{41} + T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

where $A = A_{11} \cdot t_{41}^2 + A_{12} \cdot t_{41} + A_{13}$, $B = B_{11} \cdot t_{42}^2 + B_{12} \cdot t_{42} + B_{13}$, $C = C_{11} \cdot t_{42}^2 + C_{12} \cdot t_{41} + C_{13}$, $D = D_{11} \cdot t_{43}^2 + D_{12} \cdot t_{43} + D_{13}$, $E = E_{11} \cdot t_{43}^2 + E_{12} \cdot t_{43} + E_{13}$, $F = F_{11} \cdot t_{43}^2 + F_{12} \cdot t_{43} + F_{13}$, $Q = Q_{11} \cdot t_{42}^2 + Q_{12} \cdot t_{42} + Q_{13}$, $R = R_{11} \cdot t_{42}^2 + R_{12} \cdot t_{42} + R_{13}$, $T = T_{11} \cdot t_{42}^2 + T_{12} \cdot t_{42} + T_{13}$, $A_{11} = N_1 + s_{51} \cdot s_{52}$, $A_{12} = 2 \cdot s_{32} \cdot s_{52} - 2 \cdot s_{31} \cdot s_{52} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132})$, $A_{13} = N_1 - s_{51} \cdot s_{52}$, $B_{11} = 2 \cdot s_{31} \cdot s_{51} - 2 \cdot s_{32} \cdot s_{51} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132})$, $B_{12} = 4 \cdot s_{51} \cdot s_{52} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132})$, $B_{13} = 2 \cdot s_{31} \cdot s_{51} - s_{32} \cdot s_{51} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132})$, $C_{11} = N_1 - s_{51} \cdot s_{52}$, $C_{12} = 2 \cdot s_{32} \cdot s_{52} - 2 \cdot s_{31} \cdot s_{52} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{132})$, $C_{13} = N_1 + s_{51} \cdot s_{52}$, $D_{11} = N_2 + s_{51} \cdot s_{53}$, $D_{12} = 2 \cdot s_{33} \cdot s_{53} - 2 \cdot s_{31} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133})$, $D_{13} = N_2 - s_{51} \cdot s_{53}$, $E_{11} = 2 \cdot s_{31} \cdot s_{51} - 2 \cdot s_{51} \cdot s_{33} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133})$, $E_{12} = 4 \cdot s_{51} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133})$, $E_{13} = 2 \cdot s_{31} \cdot s_{51} - s_{51} \cdot s_{33} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133})$, $F_{11} = N_2 - s_{31} \cdot s_{51}$, $F_{12} = 2 \cdot s_{33} \cdot s_{53} - 2 \cdot s_{31} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{131} - \gamma_{133})$, $F_{13} = N_2 + s_{51} \cdot s_{53}$, $Q_{11} = N_3 + s_{52} \cdot s_{53}$, $Q_{12} = 2 \cdot s_{32} \cdot s_{52} - 2 \cdot s_{52} \cdot s_{33} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132})$, $Q_{13} = N_3 - s_{52} \cdot s_{53}$, $R_{11} = 2 \cdot s_{33} \cdot s_{53} - 2 \cdot s_{32} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132})$, $R_{12} = 4 \cdot s_{52} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132})$, $R_{13} = 2 \cdot s_{33} \cdot s_{53} - 2 \cdot s_{32} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132})$, $T_{11} = N_3 - s_{52} \cdot s_{53}$, $T_{12} = 2 \cdot s_{32} \cdot s_{52} - 2 \cdot s_{52} \cdot s_{53} \cdot c(\gamma_{133} - \gamma_{132})$, $T_{13} = N_3 + s_{52} \cdot s_{53}$.

On the base of the Sylvester method [20] from the first two equations of the system (5) we derive the following matrix

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ D & E & F & 0 \\ 0 & D & E & F \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

and get out of the variable t_{41} . From the determinant of the matrix (6), we obtain

$$\sum_{i=0}^4 G_i \cdot t_{43}^i \quad (7)$$

where the coefficients G_i are the 4th-order polynomial equation with the variable t_{42} . Continuing to use the Sylvester method from the equation (7) and the third equation of the system (4), we get out of the variable

$$\begin{vmatrix} Q & R & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & R & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & R & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & R & T \\ G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & 0 \\ 0 & G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

From the matrix (8) we obtain the 16th-order polynomial equation with the variable t_{41}

$$\sum_{k=0}^{16} P_k \cdot t_{41}^k = 0 \quad (9)$$

The variable t_{41} is determined from the equation (9), then we can determine the variables t_{42} and t_{43} . The formation of coefficients G_i and P_k of the equations (7) and (9) and their calculation are based on Matlab. Of all the solutions of the equation (9), we choose those solutions for which the distances between the spherical joints are equal a .

3 Numerical examples

The following constant parameters $a_i = 15$, $c_i = 7$, $\gamma_1 = 90^\circ$, $\gamma_2 = 210^\circ$, $\gamma_3 = -30^\circ$, $a = 74,48$, and for each case we set parameters of the legs 4-5, 7-8, 10-11.

Using the obtained values of the angles θ_{41} , θ_{42} , θ_{43} , the coordinates of the spherical joints centers of the moving platform 2 in the absolute coordinate system $OU_0V_0W_0$ are determined (Table - 1, 2, 3, 4).

Table - 1 – $s_{3i} = 60$, ($i = 1, 2, 3$), $s_{51} = 93,7618$, $s_{52} = 91,9882$, $s_{53} = 98,2112$

i	θ_{41}	θ_{42}	θ_{43}	U_{O4i}	V_{O4i}	W_{O4i}
1	0.235	1.255	0.125	37.004	-0.000	118.047
2				16.681	-28.892	52.479
3				-24.280	-42.053	113.274
1	1.259	0.231	0.129	-33.993	0.000	52.317
2				-18.737	32.454	117.593
3				-24.078	-41.704	113.222
1	0.173	0.173	0.190	42.970	-0.000	119.282
2				-21.514	37.263	118.733
3				-21.327	-36.940	112.338
1	0.177	0.169	1.208	42.563	-0.000	119.210
2				-21.717	37.615	118.804
3				12.996	22.510	54.665
1	2.964	2.972	1.934	42.563	-0.000	-75.210
2				-21.717	37.615	-74.804
3				12.996	22.511	-10.665
1	2.968	2.968	2.952	42.970	-0.000	-75.282
2				-21.513	37.262	-74.733
3				-21.327	-36.940	-68.338
1	1.883	2.910	3.012	-33.993	0.000	-8.317
2				-18.737	32.454	-73.593
3				-24.077	-41.703	-69.222

Table - 2 - $s_{3i} = 60$, ($i = 1, 2, 3$), $s_{51} = 95$, $s_{52} = 93$, $s_{53} = 96$

i	θ_{41}	θ_{42}	θ_{43}	U_{O4i}	V_{O4i}	W_{O4i}
1	1.260	0.205	0.157	-30.438	0.000	51.085
2				-20.245	35.065	115.997
3				-22.714	-39.341	113.851
1	0.198	1.267	0.166	41.317	-0.000	115.145
2				15.797	-27.362	50.747
3				-22.323	-38.665	113.724
1	0.180	0.178	0.184	43.016	-0.000	115.469
2				-21.488	37.218	116.478
3				-21.476	-37.197	113.424
1	0.171	0.187	1.244	43.799	-0.000	115.608
2				-21.096	36.539	116.334
3				14.046	24.328	51.813
1	2.970	2.955	1.897	43.799	-0.000	-71.608
2				-21.096	36.539	-72.334
3				14.046	24.328	-7.813
1	2.962	2.963	2.957	43.016	-0.000	-71.469
2				-21.096	37.218	-72.478
3				-21.476	-37.197	-69.424
1	2.943	1.874	2.976	41.316	-0.000	-71.145
2				15.797	-27.362	-6.747
3				-22.323	-38.665	-69.724

Table - 3 - $s_{3i} = 60$, ($i = 1, 2, 3$), $s_{51} = 95$, $s_{52} = 90$, $s_{53} = 75$

i	θ_{41}	θ_{42}	θ_{43}	U_{O4i}	V_{O4i}	W_{O4i}
1	0.216	1.196	0.155	39.671	-0.000	114.799
2				4.890	-8.470	49.488
3				-23.066	-39.950	110.925
1	0.188	0.265	0.183	42.199	-0.000	115.317
2				-20.161	34.920	94.373
3				-21.808	-37.773	110.496
1	1.387	0.076	0.343	-33.398	-0.000	39.372
2				-27.153	47.031	96.784
3				-14.864	-25.746	106.756
1	0.370	0.040	1.357	25.663	-0.000	110.578
2				-28.466	49.305	96.937
3				13.973	24.202	41.118
1	2.772	3.101	1.785	25.663	-0.000	-66.578
2				-28.466	49.305	-52.937
3				13.973	24.202	2.882
1	1.755	3.066	2.799	-33.3984	0.000	4.628
2				-27.153	47.031	-52.784
3				-14.864	-25.746	-62.756
1	2.953	2.876	2.959	42.199	-0.000	-71.317
2				-20.161	34.920	-50.372
3				-21.808	-37.773	-66.496

Table - 4 – $s_{31} = 60$, $s_{32} = 70$, $s_{33} = 50$, $s_{51} = 105$, $s_{52} = 90$, $s_{53} = 75$

i	θ_{41}	θ_{42}	θ_{43}	U_{O4i}	V_{O4i}	W_{O4i}
1				30.071	-0.000	122.644
2	0.289	1.145	0.182	9.159	-15.864	52.945
3				-26.839	-46.486	110.507
1				39.184	-0.000	124.916
2	0.200	0.130	0.286	-20.121	34.851	96.363
3				-22.300	-38.625	108.342
1				-43.370	0.000	40.429
2	1.394	-0.031	0.430	-26.174	45.334	96.963
3				-16.259	-28.162	103.824
1				17.332	-0.000	117.940
2	0.418	-0.147	1.307	-30.484	52.799	96.194
3				8.445	14.627	45.455
1				17.3319	-0.000	-73.940
2	2.723	-2.995	1.834	-30.484	52.799	-52.194
3				8.445	14.627	-1.455
1				-43.370	0.000	3.571
2	1.747	-3.110	2.712	-26.174	45.334	-52.963
3				-16.259	-28.162	-59.824
1				39.184	-0.000	-80.916
2	2.942	3.011	2.855	-20.121	34.851	-52.363
3				-22.300	-38.625	-64.342

References

- [1] Jean-Pierre Merlet, "Parallel robots", (Kluwer Academic Publishers, 2000), 48-62.
- [2] K.H. Hunt, "Structural kinematic of in-parallel-actuated robot-arms", *ASME J. Mechanisms, Transmissions, and Automat. Des.*, **105**(1983), 705-711.
- [3] Xin-Jun Liu Jinsong Wang, "Parallel Kinematics: Type, Kinematics, and Optimal Design", (Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2014), ch. 1, pp. 3-30, ch.2, pp.31-77.
- [4] Takeda Y., Funubashi., Ichimaru H., "Development of spatial in-parallel actuated manipulators with six degrees of freedom with high motion transmissibility", *JSME International Journal Series C* 2(1997), 299-308.
- [5] Ma O., Angeles J., *Optimum architecture design of platform manipulators. Proceeding of the Fifth International Conference on Advanced Robotics* (Pisa, IEEE, Press, Piscataway, N.J., 1991), 1130-1135.
- [6] Wang L.C.T. and Change C.C., "On the dynamic analysis of general parallel manipulators", *In Journal Robotics and Automation* 2(1997), 81-87.
- [7] McAree P.R., Selig J.M., "Constrained robot dynamics II: Parallel machines", *Journal of Robotic Systems* **16**:9(1999), 487-498.
- [8] Clearly C., Uebel M., *Jacobian Formulation for a Novel 6-DOF Parallel Manipulator* (IEEE International Conference on Robotics and Automation, **3**, 1994), 2377-2382.
- [9] Tsai L.-W., Tahmasebi F., "Synthesis and Analysis of a New Class of Six-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators", *Journal of Robotic Systems* **10**:5(1993), 561-580.
- [10] Alizade R.I., Tagiyev N.R., and Duffy J., "A Forward and Reverse Displacement Analysis of a 6-DOF In-Parallel Manipulator", *Mechanism and Machine Theory* **29**:1(1994), 115-124.
- [11] Collins C.L. Long G.L., "The Singularity Analysis of an in-Parallel Hand Controller for Force-Reflected Teleoperation", *IEEE Transaction on Robotics and Automation* **11**(1995), 661-669.

-
- [12] Mimuza N., Funabashi Y., *A New Analytical System Applying 6 DOF Parallel Link Manipulator For Evaluating Motion Sensation* (IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995), 227-333.
- [13] Ebert U., Gosselin C.M., *Kinematic Study of a New Type of Spatial Parallel Platform Mechanism* (ASME Design Engineering Technical Conference, Atlanta, 13-16 September, 1998), 170-177.
- [14] Byun Y.K., Cho H.S., "Analysis of a Novel 6-DOF 3-PPSP Parallel Manipulator", *The International Journal of Robotics Research* **16**:6(1997), 859-872.
- [15] Baigunchekov Zh., Mustafa A., Kairov R., Kassinov A., "Structural synthesis and geometry of 3-PRRS and 3-PRPS type parallel manipulators", *Herald of the Kazakh-British Technical University* **16**(2019), 67-71.
- [16] Khali D., Lee S-H, Tsai K.-Y., Sandor G.N., "Manipulator Configurations Based on Rotary-Liner (R-L) Actuators and Their Direct and Inverse Kinematics", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* **110**(1988), 397-404.
- [17] Zhumadil Baigunchekov, Myrzabai Izmambetov, *Inverse Kinematics of Six - DOF Three - Limbed Parallel Manipulator* (Advances in Robot Design and Intelligent Control, Proceedings of the 25th Conference on Robotics in Aple-Adria-Danube Region – RAAD 2016, Springer, 2016), 171-178.
- [18] Zhumadil Baigunchekov, Myrzabai Izmambetov, *Geometry and Direct Kinematics of Six-DOF Three-Limbed Parallel Manipulators* (ROMANSY 21 - Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of the 21st CISM – IFToMM Symposium. Springer, 2016), 39-46.
- [19] Zh. Baigunchekov, M.A. Laribi, A. Mustafa, R. Kaiyrov, B.Amanov, A.Kassinov, "Inverse kinematics of 3-PRPS type parallel manipulator", *Herald of the Kazakh-British Technical University* **16**(2019), 82–86.
- [20] Lung-Wen Tsai, "Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators", (John Wiley & Sons, Inc., 1999), ch.3, pp.116-164.

У.К. Жапбасбаев¹ , Д.Ж. Босинов^{1,2,*} 

¹Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева,
г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: bossinov.daniyar@gmail.com

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ПАРАФИНИСТОЙ НЕФТИ В ТРУБОПРОВОДЕ

В данной статье исследовано неизотермическое движение парафинистой нефти в трубопроводе с переходом ньютоновской жидкости в вязкопластическое состояние. Реологические свойства парафинистой нефти (вязкость, предельное напряжение сдвига) в высокой степени зависят от температуры. При горячей перекачке парафинистой нефти по трубопроводам происходит неизотермическое движение с теплообменом с окружающей средой. Это приводит к снижению температуры парафинистой нефти, увеличению вязкости, появлению предельного напряжения сдвига, кристаллизации парафина и осаждению твердых фракций на внутренней стенке трубопровода. Отложение твердых фракций нефти уменьшает проходное сечение трубопровода, приводит к появлению "застойной зоны" с тепловой изоляцией в пристенной области. Структура нефти изменяется - ньютоновское свойство при высоких температурах переходит в неньютоновское состояние. Одномерное моделирование неизотермического движения парафинистой нефти в трубопроводе путем традиционного усреднения температуры и скорости по сечению трубы не позволяет объяснить физику явления перестройки потока. Поэтому в данной работе построена двумерная модель движения и теплообмена парафинистой нефти. Расчетные данные показывают переход ньютоновской жидкости в вязкопластическое состояние из-за теплообмена парафинистой нефти с окружающей средой. Полученные результаты создают основу для моделирования течений аномальных жидкостей с тепломассообменом и фазовым переходом. Содержание статьи будет полезным для широкого круга исследователей, занимающихся в области гидродинамики и тепломассообмена.

Ключевые слова: парафинистая нефть, неизотермическое движение, переход ньютоновской жидкости в вязкопластическое состояние.

У.К. Жапбасбаев¹, Д.Ж. Босинов^{1,2,*}

¹Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: bossinov.daniyar@gmail.com

Құбыр желісіндегі парафинді мұнайдың изотермиялық емес қозғалысы

Бұл мақалада құбыр желісіндегі парафинді мұнайдың изотермиялық емес қозғалысы ньютондық сұйықтық жағдайынан созылмалы тұтқыр сұйықтық жағдайына ауысуы зерттелінді. Парафинді мұнайдың реологиялық қасиеттері (тұтқырлық, шектік ығысу кернеуі) температураға жоғары дәрежеде тәуелді. Парафинді мұнайды құбыр желілері бойымен ыстық айдау кезінде қоршаған ортамен жылу алмасу есебінен изотермиялық емес қозғалыс орын алады. Бұл парафинді мұнайдың температурасының төмендеуіне, тұтқырлықтың жоғарылауына, шектік ығысу кернеуінің пайда болуына, парафиннің кристалдануына және қатты бөлшектердің құбырдың ішкі қабырғасына тұнуына әкеледі. Мұнайдың қатты бөлшектерінің жиналуы құбырдың көлденең қимасын азайтады, қабырға бойында жылу оқшаулығы бар "тоқырау аймағының" пайда болуына әкеледі. Мұнай құрылымы өзгереді - ньютондық қасиет жоғары температурада ньютондық емес күйге ауысады. Құбырдағы парафинді мұнайдың изотермиялық емес қозғалысын температура мен жылдамдықты дәстүрлі түрде құбыр қимасы арқылы орташаалап бір өлшемді түрде модельдеу ағынның қайта құ-

рылу құбылысының физикасын түсіндіруге мүмкіндік бермейді. Сондықтан да бұл жұмыста парафинді мұнай қозғалысы мен жылу алмасуының екі өлшемді моделі салынды. Есептеу деректері парафинді мұнайдың қоршаған ортамен жылу алмасуына байланысты ньютон сұйықтығының тұтқыр пластикалық күйге ауысуын көрсетеді. Алынған нәтижелер жылу-масса алмасуы және фазалық ауысуы бар аномальды сұйықтың ағындарын модельдеуге негіз болады. Мақаланың мазмұны гидродинамика және жылу-масса алмасу саласындағы көптеген зерттеушілерге пайдалы болады.

Түйін сөздер: парафинді мұнай, изотермиялық емес қозғалыс, ньютондық сұйықтықтың созылмалы тұтқыр сұйықтық жағдайына ауысуы.

U.K. Zhabasbaev¹, D.Zh. Bossinov^{1,2,*}

¹K.I. Satbayev Kazakh National Research Technical University, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: bossinov.daniyar@gmail.com

Non-isothermal paraffin oil flow in the pipeline

In this article, Non-isothermal paraffin oil flow in the pipeline with Newtonian fluid transition to viscoplastic state is investigated. Rheological properties of paraffin oil (viscosity, ultimate shear stress) are highly dependent on temperature. During hot pumping of paraffin oil through pipelines, non-isothermal flow occurs due to heat transfer to the environment. This leads to a decrease in flow temperature, an increase in viscosity, ultimate shear stress appearance, wax crystallization and solid particles deposition on the pipeline inner wall. Oil solid particles deposition reduces pipeline flow area, leads to the appearance of a "stagnant zone" with thermal insulation in the near-wall region. Oil structure changes - Newtonian property at high temperatures transits to non-Newtonian state. One-dimensional modeling of non-isothermal paraffin oil flow in the pipeline by traditional averaging of temperature and velocity over the pipe cross section does not allow explaining physics phenomenon. Therefore, in this work, a two-dimensional model of motion and heat transfer of paraffin oil is constructed. Calculated data show Newtonian fluid transition to viscoplastic state due to the heat exchange of paraffin oil with the environment. Obtained results form the basis for modeling anomalous fluid flows with heat and mass transfer and phase transition. Article content will be useful for a wide range of researchers involved in the field of hydrodynamics and heat and mass transfer.

Key words: paraffin oil, non-isothermal flow, Newtonian fluid flow transition to viscoplastic state.

1 Введение

Высоковязкие и высокозастывающие (парафинистые) нефти месторождений Жетыбай, Узень и Кумколь занимают значительную долю в объеме транспортировки магистральных нефтепроводов Казахстана.

Серьезные трудности при перекачке парафинистой нефти связаны с существенной зависимостью вязкости и предельного напряжения сдвига от температуры. При снижении температуры возможно застывание нефти в трубопроводе, приводящее к полной остановке перекачки и значительным затратам на ее возобновление [1–4].

Парафинистая нефть при высоких температурах подчиняется законам ньютоновской жидкости, понижение температуры приводит к возникновению вязкопластичного свойства неньютоновской жидкости [5, 6].

В неизотермическом нефтепроводе изменения температуры из-за теплообмена потока с окружающей средой приводят к переходу движения нефти из ньютоновского в вязкопластичное состояние.

2 Обзор литературы

Характерной особенностью парафинистых нефтей казахстанских месторождений являются высокая вязкость из-за содержания асфальтенов и смол, повышенное напряжение сдвига [7,8]. Нефть может иметь высокую температуру застывания (температуру потери текучести) в диапазоне от 12 до 30°C в зависимости от количества содержания парафина в его составе [9,10]. В холодный (зимний и весенне-осенний) период эксплуатации нефтепровода температура нефти в трубе может значительно отличаться от температуры окружающей среды. Теплообмен нефти с окружающей средой приводит к снижению температуры, росту вязкости и предельного напряжения сдвига. Это в значительной степени проявляется в пристенной области и приводит к возникновению застойной зоны и уменьшению рабочего сечения трубопровода [11].

В результате перекачка нефти по трубопроводу большого диаметра переходит в перекачку по трубопроводу с меньшим диаметром с застойной зоной. Увеличение средней скорости потока из-за застойной зоны не позволяют остыть порции жидкости, и гидравлическое сопротивление данного участка трубопровода становится меньше, чем должно быть по классической теории [11].

Одномерное моделирование режимов работы нефтепровода путем традиционного усреднения температуры и скорости по сечению трубы не дает возможности объяснить появление застойной зоны [12].

Как видно из обзора, указанные выше факты показывают сложность неизотермического движения парафинистой нефти в трубопроводе.

3 Материал и методы

В данной работе исследуется ламинарный режим течения парафинистой нефти в трубопроводе. Моделирование движения и теплообмена основывается на законах сохранения массы, импульса и энергии. Замыкающими условиями математической модели являются зависимости вязкости, предельного напряжения, теплоемкости, теплопроводности и плотности от температуры [7,10].

3.1 Реологические и физико-химические свойства

Сложные реологические свойства парафинистой нефти определяются резким ростом вязкости и предельного напряжения сдвига с уменьшением ее температуры. В начальном участке движения в трубе парафинистая нефть с высокой температурой является ньютоновской жидкостью. В результате теплообмена с окружающей средой и снижением температуры возрастает вязкость и предельное напряжение сдвига, что приводит к проявлению неньютоновского (вязкопластичного) состояния парафинистой нефти.

В вязкопластичном состоянии парафинистой нефти эффективную молекулярную вязкость μ можно описать моделью бингамовской жидкости [5]:

$$\mu = \mu_p + \tau_0 \cdot \Pi^{-1}, \quad (1)$$

где μ – эффективная молекулярная вязкость, μ_p – пластическая вязкость, τ_0 – предельное напряжение сдвига, $\Pi = \sqrt{2S_{ij} \cdot S_{ij}}$, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$.

Формулу Бингама-Шведова для стационарного течения вязкопластических сред в трубе можно получить с помощью (1) в виде [12]:

$$\tau_{zr} = -\tau_0 + \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2)$$

где u – продольная скорость, r – радиальная координата, отсчитываемая от оси трубы.

Снижение температуры может вызвать кристаллизацию парафина и выделение тепла фазового перехода. Учет общего количества скрытого тепла I может быть определен методом кажущейся теплоемкости [13, 14]. По этому методу кажущаяся теплоемкость парафинистой нефти в зоне кристаллизации находится по формуле:

$$c_p = \frac{\int_{t_s}^{t_l} c_l(t) dt + \varepsilon I}{t_l - t_s}, \quad (3)$$

где t_l , t_s – начальное и конечное значение температуры образования парафина в потоке нефти, ε – содержание парафина в составе нефти, I – удельная энтальпия фазового перехода парафина. В расчетах были приняты $I = 9.8$ ккал/кг, $\varepsilon = 0.15$, $t_l = 32^\circ C$, $t_s = 12^\circ C$.

Опытные данные теплоемкости нефти описываются формулой Кrego [7]:

$$c_l(t) = (53357 + 107.2 \cdot t) / \sqrt{\rho_{20}}, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ C), \quad (4)$$

где ρ_{20} – плотность нефти при температуре $20^\circ C$.

Подставляя $c_l(t)$ в интеграл (3), нетрудно найти кажущуюся теплоемкость нефти в зоне кристаллизации парафина.

Зависимости плотности и теплопроводности нефти от температуры выражаются стандартными формулами [7]:

$$\lambda = 5.057 \cdot (1 - 0.00054 \cdot t) / \sqrt{\rho_{20}}, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ C), \quad (5)$$

$$\rho(t) = \rho_{20} [1 + \zeta \cdot (20 - t)], \text{ кг}/\text{м}^3, \quad (6)$$

где $\zeta = 0.000738$, $1/^\circ C$ – коэффициент объемного расширения нефти.

Для парафинистой нефти важное значение имеют зависимости динамической вязкости $\mu_p(t)$ и предельного напряжения сдвига $\tau_0(t)$ от температуры. Эмпирические зависимости $\mu_p(t)$ и $\tau_0(t)$ получены путем обработки опытных данных с использованием регрессионной модели [10]:

$$\mu_p(t) = 0.3585 \cdot \exp(-0.1792 \cdot t), \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad (7)$$

$$\tau_0 = 589.56 \cdot \exp(-0.567 \cdot t), \text{ Па}. \quad (8)$$

Как видно из рисунка 1, зависимости динамической вязкости $\mu_p(t)$ и предельного напряжения сдвига $\tau_0(t)$, начиная со значения температуры $20^\circ C$, резко возрастают. Причем значение предельного напряжения сдвига до температуры $20^\circ C$ равно нулю, т.е. вязкопластичное состояние нефти наступает при температуре $20^\circ C$.

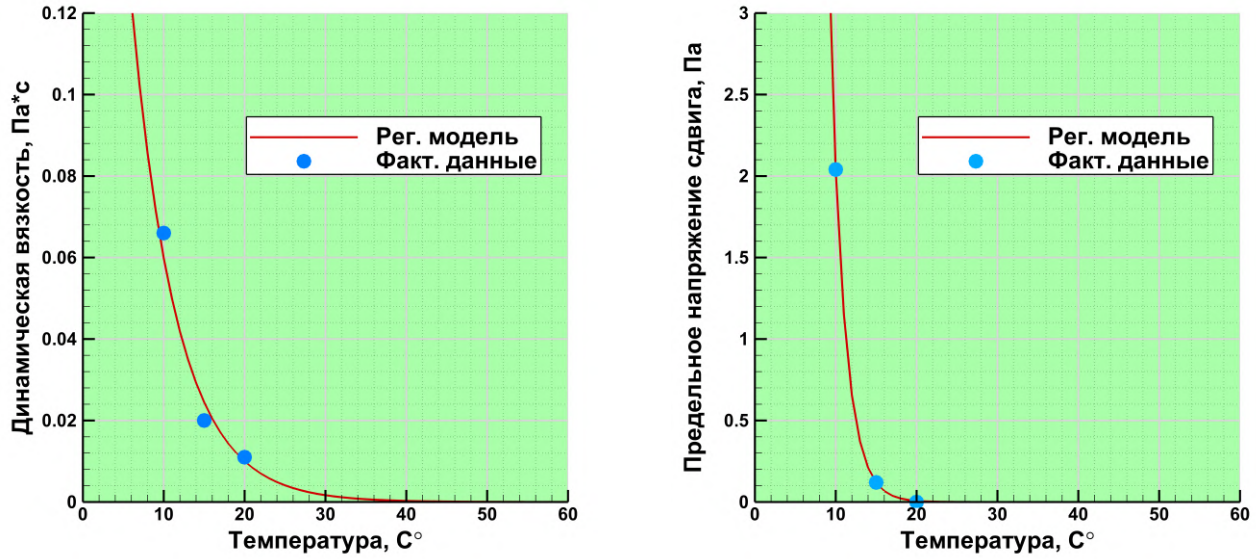


Рисунок 1 – Зависимости динамической вязкости $\mu_p(t)$ и предельного напряжения сдвига $\tau_0(t)$ от температуры

3.2 Постановка задачи

Неизотермический поток парафинистой нефти течет в подземном трубопроводе с внутренним диаметром D_1 , длиной L , глубиной заложения до оси H , скоростью U_o и начальной температурой t_0 . Длина трубопровода L – намного больше его диаметра D_1 , а температура окружающей среды t_w – гораздо меньше начальной температуры нефти t_0 . Теплообмен неизотермического потока с окружающей средой приводит к охлаждению парафинистой нефти. Нефть, являющаяся ньютоновской жидкостью в начале, начинает остывать, что приводит к изменению реологических и физико-химических свойств.

Течение считается ламинарным. Будем считать, что кондуктивный перенос тепла по радиусу трубопровода намного превосходит его величину по длине из-за теплообмена с окружающей средой. Поэтому можно пренебречь кондуктивным переносом тепла по длине трубопровода. Тогда систему уравнений движения и теплообмена двумерной модели [15] в стационарном режиме можно записать с учетом (2) и (3) в виде:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_p \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r v}{\partial r} = 0, \quad (10)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial t}{\partial z} + \rho c_p v \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2. \quad (11)$$

В уравнениях (9)-(11) приняты следующие обозначения: z, r – осевая и радиальная координаты; u, v – компоненты вектора скорости; $p, \rho, t, \tau_0, \mu_p, \lambda, c_p$ – давление, плотность, температура, предельное напряжение сдвига, динамическая вязкость, коэффициент теплопроводности, теплоемкость.

температура, предельное напряжение сдвига, коэффициент динамической вязкости, коэффициенты теплопроводности и кажущейся теплоемкости, соответственно.

Градиент давления находится из условия сохранения массового расхода [15]:

$$\int_0^{R_1} \rho u r dr = \rho_0 U_0 R_1^2 / 2, \quad (12)$$

где R_1 – внутренний радиус трубопровода.

Компоненты скорости и температура принимаются постоянными на входе трубопровода:

$$\text{при } z = 0 : u = U_0, v = 0, t = t_0 \quad (13)$$

Для скорости на оси трубопровода ставится условие симметричности, а на стенке – условие прилипания:

$$\text{при } z > 0, r = 0 : \frac{\partial u}{\partial r} = 0, r = R_1 : u = v = 0. \quad (14)$$

Для температуры на оси трубопровода ставится условие симметричности, а на стенке – условие теплопередачи окружающей средой:

$$\text{при } z > 0, r = 0 : \frac{\partial t}{\partial r} = 0; r = R_1 : -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = k \cdot (t - t_w). \quad (15)$$

Величина коэффициента теплопередачи k определяется по формуле [7]:

$$\frac{1}{kD_1} = \frac{1}{\alpha_1 D_1} + \sum_{i=1} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{D_{i+1}}{D_i} + \frac{1}{\alpha_2 D_2}. \quad (16)$$

Здесь k – коэффициент теплопередачи нефти в окружающую среду; α_1, α_2 – внутренний и внешний коэффициенты теплообмена; D_2 – наружный диаметр трубопровода; D_i – наружные диаметры слоев изоляции; λ_i – коэффициенты теплопроводности металла и слоев изоляционного покрытия.

В ламинарном режиме внутренний коэффициент теплообмена α_1 равен [7]:

$$\alpha_1 = 3.65 \cdot \lambda / D_1. \quad (17)$$

Внешний коэффициент теплоотдачи α_2 определяется по формуле Форхгеймера-Власова [7]:

$$\alpha_2 = \frac{2\lambda_w}{D_2 \ln \left[\frac{2H}{D_2} + \sqrt{\left(\frac{2H}{D_2} \right)^2 - 1} \right]}. \quad (18)$$

где λ_w – коэффициент теплопроводности грунта, H – глубина заложения трубопровода.

Система уравнений (9)-(12) при граничных условиях (13)-(18) решается численным методом [15]. Расчетная область разбивается на элементарные ячейки со сторонами $\Delta z_i, \Delta r_j$. Разностные аналоги уравнений движения (9) и энергии (11) получены по схеме Кранка-Никольсона, а разностный аналог уравнения (10) – двухслойной схемой второго порядка точности. Градиент давления определяется методом расщепления из условия сохранения массового расхода (12).

4 Результаты и обсуждение

Расчеты проводились в модельном трубопроводе, имеющем длину $L = 45\text{м}$, внутренний диаметр $D_1 = 0.04\text{м}$, глубина заложения трубопровода $H = 2.0\text{м}$, температура нефти на входе $t_0 = 25^\circ\text{C}$, температура окружающего грунта $t_w = 0^\circ\text{C}$, плотность нефти на входе $\rho_0 = 835\text{кг/м}^3$, скорость нефти на входе $U_0 = 0.05\text{м/с}$. Реологические и теплофизические свойства парафинистой нефти выражаются эмпирическими зависимостями (4)-(8). Число Рейнольдса на входе равно $Re = 411$, а число Прандтля – $Pr = 42$.

На входе трубопровода профили скорости и температуры считаются постоянными, равными начальным значениям. По мере движения нефти происходит теплопередача окружающей среде, поэтому температура и скорость потока будет изменяться, как по сечению, так и по длине трубопровода.

На рисунках 2 - 5 показаны распределения продольной компоненты скорости, температуры, динамической вязкости и предельного напряжения сдвига в трубопроводе. Из рисунка 2 видно, что входной профиль продольной компоненты скорости трансформируется, на стенке значение скорости равно нулю и монотонно повышается и достигает максимального значения на оси. По мере движения по длине трубопровода значения продольной скорости в приосевой зоне растут, а в пристенной зоне наоборот снижается.

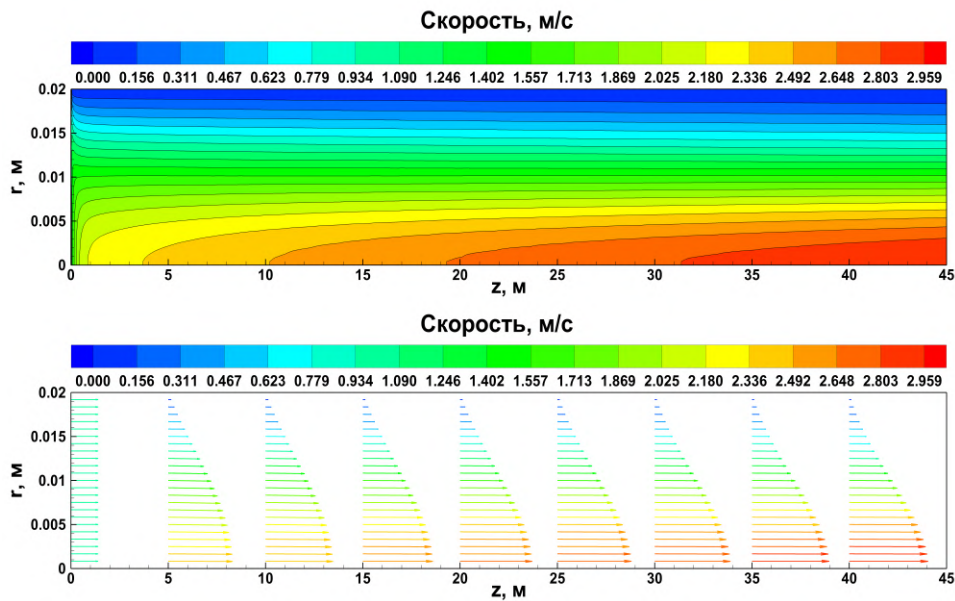


Рисунок 2 – Распределение продольной компоненты скорости в трубопроводе

Это объясняется тем, что, во-первых, массовый расход потока по сечению трубы сохраняется и, во-вторых, из-за снижения температуры в пристенной зоне (см. рис. 3) растут значения коэффициента динамической вязкости $\mu_p(t)$ (см. рис. 4). Кроме этого, при значении температуры $t = 20^\circ\text{C}$ в пристенной зоне возникает предельное напряжение сдвига $\tau_0(t)$ (см. рис. 5), которое также приводит к торможению скорости потока нефти.

Распределение температуры (см. рис. 3) иллюстрирует большую длину начального участка, где имеет место постоянное значение входной температуры $t_0 = 25^\circ\text{C}$. Это подтверждается значением числа Пекле, равное $Pe = 17262$, так как протяженность начального участка про-

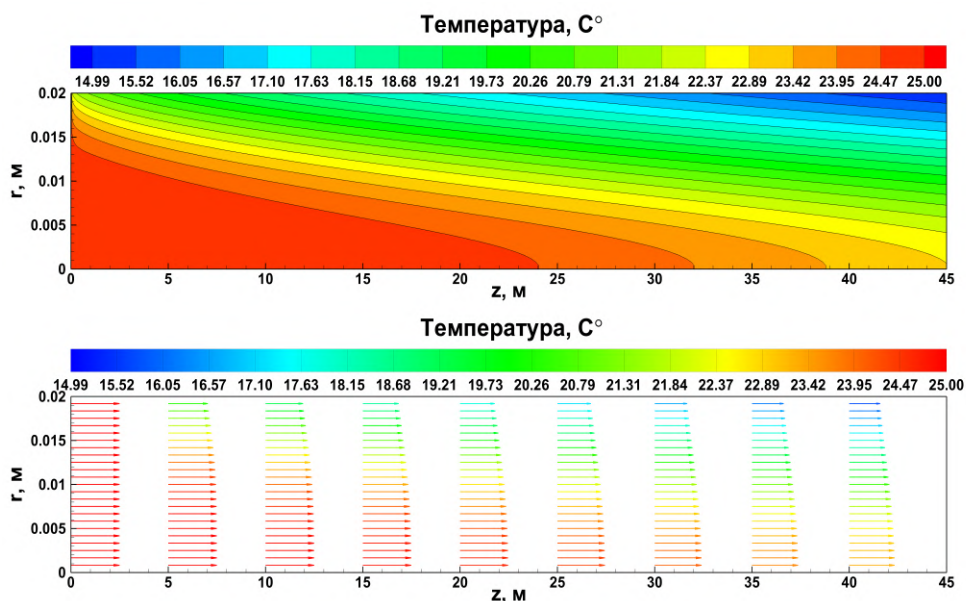


Рисунок 3 – Распределение температуры в трубопроводе

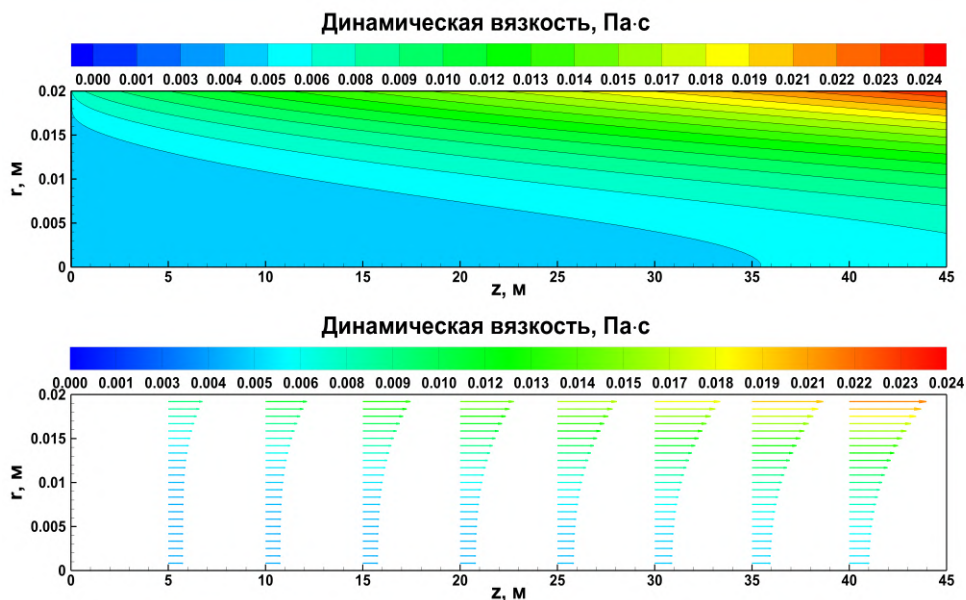


Рисунок 4 – Распределение динамической вязкости в трубопроводе

филя температуры определяется числом Пекле [15].

Теплообмен на стенке снижает температуру в пристенной зоне, приводит к появлению предельного напряжения сдвига и вязкопластичного состояния нефти при температуре $t = 20^{\circ}\text{C}$. Снижение температуры растет по длине и приводит к увеличению толщины зоны динамической вязкости и предельного напряжения сдвига (см. рис. 4, 5).

Распределения температуры, динамической вязкости и предельного напряжения сдвига по длине трубопровода показывают, что по сечению в области температуры $t > 20^{\circ}\text{C}$ парафи-

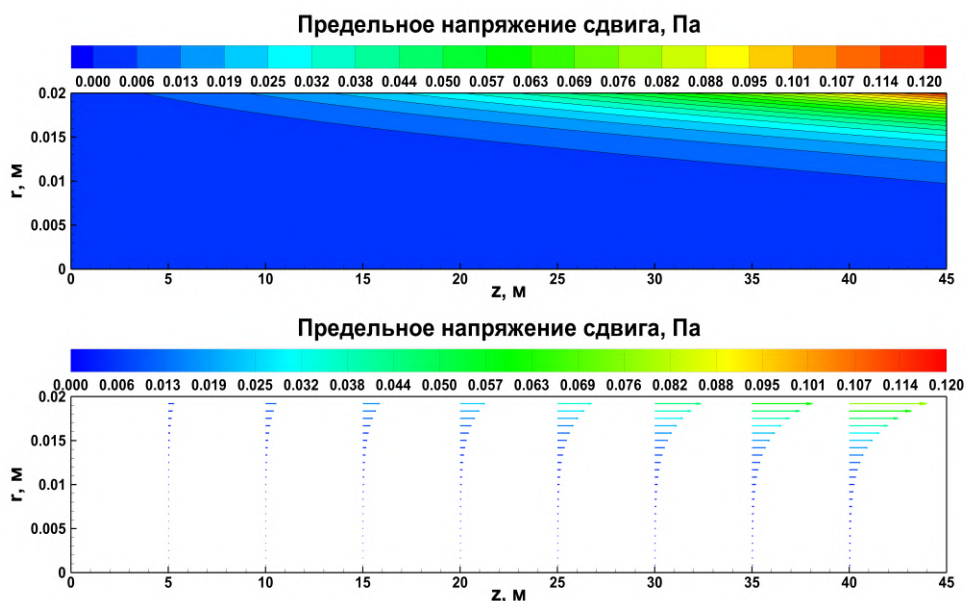


Рисунок 5 – Распределение предельного напряжения сдвига в трубопроводе

нистая нефть обладает свойством ньютоновской жидкости, тогда как в области температуры $t < 20^{\circ}\text{C}$ – свойством вязкопластичной (неньютоновской) жидкости. Такое свойство неизотермического движения объясняется теплообменом парафинистой нефти в трубопроводе с окружающей средой.

Таким образом, парафинистая нефть с ньютоновским свойством постепенно переходит в вязкопластичное состояние из-за теплообмена между телами с разной температурой в соответствии с представлениями второго закона термодинамики [15].

5 Заключение

1. Реологические свойства (вязкость, предельное напряжение сдвига) и теплофизические свойства (плотность, теплопроводность, теплоемкость) парафинистой нефти получены на основе опытных данных и обобщены в виде эмпирических формул с использованием регрессионной модели.

2. Результаты расчетов неизотермического движения в трубопроводе показывают изменение состояния парафинистой нефти. Ньютоновское свойство в начальном участке постепенно переходит в вязкопластичное (неньютоновское) состояние из-за теплообмена нефти с окружающей средой.

3. Распределения скорости, температуры, динамической вязкости и предельного напряжения сдвига установили закономерности неизотермического движения парафинистой нефти и выявили зоны торможения в пристенной области трубопровода.

6 Благодарности

Данная работа выполнена за счет средств грантового финансирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан научно-исследовательской работы на

тему №АР08855521 "Исследование перехода движения ньютоновской жидкости в вязкопластичное состояние" на 2020-2022 годы.

Список литературы

- [1] Ahmadpour A., Sadeghy K., Maddah-Sadatieh S.R. The effect of a variable plastic viscosity on the restart problem of pipelines filled with gelled waxy crude oils // *J. Non Newtonian Fluid Mech.* - 2014. - 205. - P. 16-27.
- [2] Li H., Zhang J., Song C., Sun G. The influence of the heating temperature on the yield stress and pour point of waxy crude oils // *J. Petrol. Sci. Eng.* - 2015. - V. 135. - P. 476-483.
- [3] Chala G.T., Sulaiman S.A., Japper-Jaafar A. Flow start-up and transportation of waxy crude oil in pipelines: a review // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* - 2018. - V. 251. - P. 69-87.
- [4] Ribeiro F.S., Souza Mendes P.R., Braga S.L. Obstruction of pipelines due to paraffin deposition during the flow of crude oils // *Int. J. Heat Mass Transfer.* - 1997. - V. 40. - P. 4319-4328.
- [5] Sahu K.C. Linear instability in a miscible core-annular flow of a Newtonian and a Bingham fluid // *J. Non Newtonian Fluid Mech.* - 2019. - V. 264. - P. 159-169.
- [6] Aiyejina A., Chakrabarti D.P., Pilgrim A., Sastry M.K.S. Wax formation in oil pipelines: a critical review // *Int. J. Multiphase Flow.* - 2011. - V. 37. - P. 671-694.
- [7] Beisembetov I.K., Bekibayev T.T., Zhabbasbayev U.K. et al. Management of energy-saving modes of oil mixtures transportation by the main oil pipelines. - Almaty: KBTU, 2016. - 215 pp.
- [8] Жумагулов Б.Т., Смагулов Ш.С., Евсеева А.У., Нестеренкова Л.А. Трубопроводный транспорт высоковязких и высокозаствывающих нефтей. - Алматы: Ғылым, 2002. - 287 с.
- [9] Алдыяров Т.К., Махмотов Е.С., Дидух А.Г., Габсаттарова Г.А., Боранбаева Л.Е. Реология нефтей и нефтесмесей (транспортируемых АО "КазТрансОйл"). - қ. Алматы: Дала, 2012. - 254 с.
- [10] Bekibayev T.T., Zhabbasbayev U.K., Ramazanova G.I., Makhmotov E.S., Sayakhov B.K. Management of Oil Transportation by Main Pipelines // *Communications in Computer and Information Science.* - 2019. - V. 8. - P. 44-53.
- [11] Бахтизин Р.Н., Шутов А.А., Штукагуров К.Ю. Моделирование режимов работы трубопроводов с применением комплекса программ NIPAL 3.0. - Нефтегазовое дело, 2004. - 24 с.
- [12] Шутов А.А. Об одном классе течения неньютоновской жидкости // *Сб. науч. трудов.* - Уфа: ИПТЭР, 1994. - 185 с.
- [13] Voller V.R., Swaminathan C.R., Thomas B.G. Fixed grid techniques for phase change problems: a review // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* - 1990. - V. 30, №4. - P. 875-898.
- [14] Hu H., Argyropoulos S.A. Mathematical modelling of solidification and melting: a review // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering.* - 1996. - V. 4, №4. - P. 371-396.
- [15] Dale Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.* - CRC Press, 1990.

References

- [1] Ahmadpour A., Sadeghy K., Maddah-Sadatieh S.R., "The effect of a variable plastic viscosity on the restart problem of pipelines filled with gelled waxy crude oils", *J. Non Newtonian Fluid Mech.* **205**(2014), 16-27.
- [2] Li H., Zhang J., Song C., Sun G., "The influence of the heating temperature on the yield stress and pour point of waxy crude oils", *J. Petrol. Sci. Eng.* **135**(2015), 476-483.
- [3] Chala G.T., Sulaiman S.A., Japper-Jaafar A., "Flow start-up and transportation of waxy crude oil in pipelines: a review", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **251**(2018), 69-87.
- [4] Ribeiro F.S., Souza Mendes P.R., Braga S.L., "Obstruction of pipelines due to paraffin deposition during the flow of crude oils", *Int. J. Heat Mass Transfer* **40**(1997), 4319-4328.
- [5] Sahu K.C., "Linear instability in a miscible core-annular flow of a Newtonian and a Bingham fluid", *J. Non Newtonian Fluid Mech.* **264**(2019), 159-169.

-
- [6] Aiyejina A., Chakrabarti D.P., Pilgrim A., Sastry M.K.S., "Wax formation in oil pipelines: a critical review" , *Int. J. Multiphase Flow.* **37**(2011), 671-694.
- [7] Beisembetov I.K., Bekibayev T.T., Zhapbasbayev U.K. et al., *Management of energy-saving modes of oil mixtures transportation by the main oil pipelines* (Almaty: KBTU, 2016), 215.
- [8] Zhmagulov B.T., Smagulov SH.S., Evseeva A.U., Nesterenkova L.A., *Truboprovodnyi transport vysokovyazkikh i vysokozastyvayushchikh neftei [Pipeline transportation of highly viscous and highly solidifying oils]* (Almaty: Gylym, 2002), 287 [in Russian].
- [9] Aldyyarov T.K., Makhmotov E.S., Didukh A.G., Gabsattarova G.A., Boranbaeva L.E., *Reologiya neftei i neftesmesi (transportiruemykh AO "KazTransOil") [Rheology of oils and oil mixtures (transported by "KazTransOil" JSC)]* (Almaty: Dala, 2012), 287 [in Russian].
- [10] Bekibayev T.T., Zhapbasbayev U.K., Ramazanova G.I., Makhmotov E.S., Sayakhov B.K., "Management of Oil Transportation by Main Pipelines" , *Communications in Computer and Information Science* **8**(2019), 44-53.
- [11] Bakhtizin R.N., Shutov A.A., Shtukaturov K.YU., *Modelirovanie rezhimov raboty truboprovodov s primeneniem kompleksa programm NIPAL 3.0 [Modeling pipeline operation modes using the NIPAL 3.0 software package]* (Neftegazovoe delo, 2004), 24.
- [12] Shutov A.A., *Ob odnom klasse techeniya nen'yutonovskoi zhidkosti [About one class of non-Newtonian fluid flow]* (Sb. nauch. trudov, Ufa: IPTER, 1994), 185.
- [13] Voller V.R., Swaminathan C.R., Thomas B.G., "Fixed grid techniques for phase change problems: a review" , *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **30**:4(1990), 875-898.
- [14] Hu H., Argyropoulos S.A., "Mathematical modelling of solidification and melting: a review" , *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* **4**:4(1996), 371-396.
- [15] Dale Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (CRC Press, 1990).

Р.А. Кайыров Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
e-mail: kairov.rustem@mail.ru

ЖАҢА ТРИПОД ТҮРДЕГІ 3-PRRS ПАРАЛЛЕЛЬ МАНИПУЛЯТОРДЫҢ КИНЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУЫ

Тұйық кинематикалық тізбек параллель манипулятордың (ПМ) беріктігін жоғарлатып, жетекші түйіндерге түсіретін күшті азайтады. Жоғары жүккөтергіштік пен жақсы динамикалық көрсеткіштер мұндай жүйелерді өндірістің көптеген салаларында қолдануға мүмкіндік береді. Қазіргі кезде тәжірибеде көбінесе Стюарт платформасы негізінде жасалған алты еркіндік дәрежелі, алты аяқты параллель манипуляторлар (гексопод) қолданылады. Мұндай параллель манипулятордың қозғалмалы платформасы алты аяқпен қозғалысқа келтірілетіндіктен оның жұмыс аймағы кіші болады. Параллель роботтың жұмыс аймағының ұлғаюын жылжымалы платформаны тірекпен байланыстыратын аяқтардың санын кеміту арқылы алуға болады. Үш аяқты параллель роботтар (трипод) негізінен үш еркіндік дәрежеге ие болады, яғни олар еркіндік дәрежесі алтыға тең жылжымалы платформаның кеңістіктегі берілген қозғалысын толық қамтамасыз ете алмайды. Жұмыста әрқайсысы PRRS (P - ілгерлемелі, R - айналмалы, S - сфералық кинематикалық жұптар) кинематикалық тізбектен тұратын алты еркіндік дәрежелі және үш аяқты жаңа 3-PRRS трипод түрдегі ПМ ұсынылады. Жұмыстың мақсаты манипулятордың жұмыс аймағын анықтап, жылдамдықтың тура және кері кинематикалық есептерін шешу болып табылады. Айналмалы кинематикалық жұптар берілген ПМ аяқтарының қозғалысына шектеу жасайтындығы белгілі, осыған байланысты қозғалмалы платформаның центрінің кеңістіктегі орны X_P, Y_P, Z_P мен бағдарын ψ, θ, φ анықтайтын параметрлердің арасындағы тәуелділіктер ескеріліп, жұмыс аймағы анықталды. Аяқтардың контурларының тұйықталу теңдеулерінен Якоби матрицалары құрылды, айналмалы кинематикалық жұптардың шектеу теңдеулері бойынша ол матрицаларға толықтыру жасау арқылы, жылдамдықтың тура және кері кинематикалық есептері шешілді. Осылайша алты еркіндік дәрежелі жаңа 3-PRRS трипод түрдегі ПМ Стюарт платформасына қарағанда аяқтар саны алтыдан үшке азайтылды және ілгерлемелі кинематикалық жұптарды айналмалы кинематикалық жұптарға алмастыру арқылы жұмыс аймағы ұлғайтылды.

Түйін сөздер: трипод, параллель манипулятор, жұмыс аймағы, Якоби матрицасы, контурлардың тұйықталу теңдеуі, кинематикалық талдау.

Р.А. Кайыров

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: kairov.rustem@mail.ru

Кинематический анализ нового параллельного манипулятора 3-PRRS типа трипод

Замкнутая кинематическая цепь увеличивает прочность параллельных манипуляторов (ПМ) и снижает нагрузки, приложенные к ведущим звеньям. Высокая грузоподъемность и хорошие динамические показатели позволяют использовать такие системы во многих отраслях промышленности. В настоящее время на практике в основном используются ПМ с шестью степенями свободы и с шестью ногами (гексаподы) на основе платформы Стюарта. Поскольку подвижная платформа такого ПМ приводится в движение шестью ногами, его рабочая зона будет небольшой. Увеличение рабочей зоны параллельного робота можно получить за счет уменьшения количества ног, соединяющих подвижную платформу со стойкой. ПМ с тремя ногами (триподы) обычно имеют три степени свободы, то есть они не могут полностью обеспечить заданное движение мобильной платформы с шестью степенями свободы. В работе представлен новый ПМ 3-PRRS типа трипод с шестью степенями свободы и тремя ногами, каждая из которых состоит из кинематической цепи PRRS (P - поступательные, R - вращательные, S - сферические кинематические пары). Целью работы является определение рабочей зоны и решение прямой и обратной кинематической задачи скорости ПМ. Известно, что вращательные кинематические пары ограничивают движение ног дан-

ного параллельного манипулятора, в связи с этим рабочая зона определялась с учетом зависимости между параметрами, определяющими положение X_P, Y_P, Z_P и ориентацию ψ, θ, φ центра движущейся платформы в пространстве. Из уравнений замкнутости контуров кинематических цепей были построены матрицы Якоби, решены прямая и обратная скоростные задачи кинематики путем добавления в матрицу Якоби уравнений ограничения вращательных кинематических пар. Таким образом, в новом ПМ 3-PRRS типа трипод с шестью степенями свободы были уменьшены количество ног с шести до трех по сравнению с платформой Стюарта и увеличена рабочая зона за счет замены поступательных кинематических пар вращательными кинематическими парами.

Ключевые слова: трипод, параллельный манипулятор, рабочая зона, матрица Якоби, уравнения замкнутости контуров, кинематический анализ.

R.A. Kaiyrov

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

PhD student, e-mail: kairov.rustem@mail.ru

Kinematic analysis of a new 3-PRRS tripod type parallel manipulator

The closed kinematic chain increases the strength of the parallel manipulator (PM) and reduces the loads applied to the drive links. High carrying capacity and good dynamic performance allow the use of such systems in many industries. Currently, in practice, mainly PM with six degrees of freedom and six legs (hexapods), based on the Stewart platform, are used. Since the moving platform of such PM is driven by six legs, its workspace will be small. An increase in the workspace of a parallel robot can be obtained by reducing the number of legs connecting the moving platform to the base. PM with three legs (tripods) usually has three degrees of freedom, and, they cannot fully provide a given movement of a moving platform with six degrees of freedom. The paper presents a new 3-PRRS type tripod with six degrees of freedom and three legs, each of which consists of PRRS kinematic chains (P - prismatic, R - revolute, S - spherical kinematic pairs). The purpose of the work is to determine the workspace and to solve the direct and inverse problem of speed of the tripod. It is known that revolute kinematic pairs restrict the movement to the legs of this tripod, therefore, the workspace was determined taking into account the relationship between the parameters that determine the position X_P, Y_P, Z_P and orientation ψ, θ, φ of the moving platform center in space. The Jacobi matrixes were derived from the equations of the closed loops, the direct and inverse velocity problems of kinematics are solved by adding the constraints equations of revolute kinematic pairs to the matrix. Thus, in the new PM 3-PRRS type tripod with six degrees of freedom, the number of legs was reduced from six to three compared to the Stewart platform, and the workspace was increased by replacing the prismatic kinematic pairs by revolute kinematic pairs.

Key words: tripod, parallel manipulator, workspace, Jacobi matrix, equations for the closed loops, kinematic analysis.

1 Кіріспе

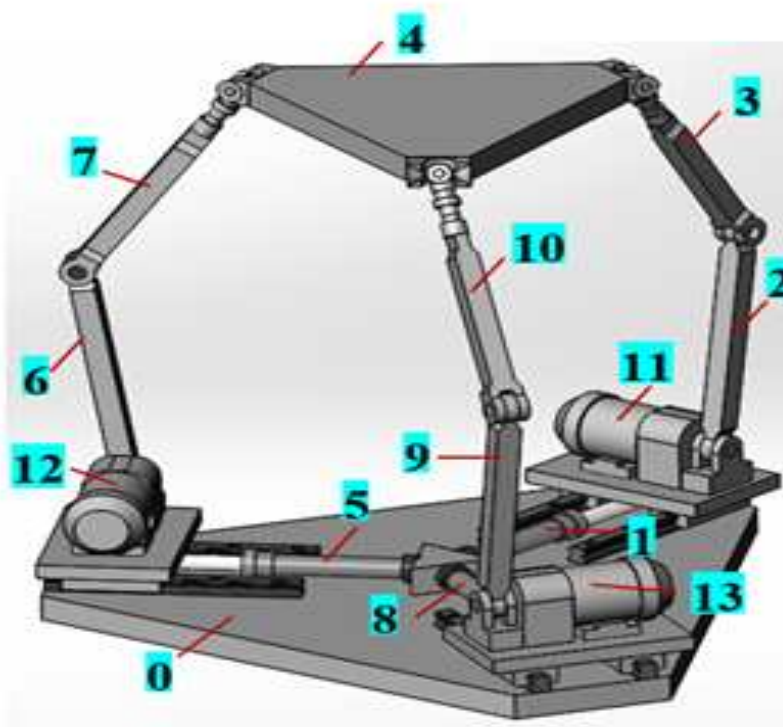
Қазіргі робототехниканың қалпын талдау [1–7] келесіні көрсетіп отыр: заманауи роботтардың көбісінің атқарушы механизмдері (манипуляторлары) ашық (антропоморфты) кинематикалық тізбек түріндегі сериялық манипуляторлар болып табылады. Сериялық манипуляторлар әмбебапты, кең жұмыс аймаққа және жоғары маневрлі болғанымен келесі кемшіліктерге ие: құрылымы арысты болғандықтан олардың қатаңдығы аз, жүккөтергіштігі нашар және позициялау дәлдігі төмен.

Роботтардың кинематикалық сұлбаларын жасаудағы баламалы әдіс ретінде тұйық кинематикалық тізбекке ие параллель манипуляторларды қолдану болып табылады [3, 8–10]. Сериялық манипуляторларға қарағанда параллель манипуляторлардың құрылымы қатаң болады және де жоғары жүккөтергіштікке, позициялаудың жоғары дәлдігіне және елеулі тез әрекеттілікке ие болады.

Белгілі үш аяқты параллель роботтарға жататындар: 3RRR [13–15] түрдегі сфералық

манипулятор (мұндағы R - айналмалы кинематикалық жұп), оның барлық алты айналмалы кинематикалық жұптардың айналу өстері бір нүктеде қиылысады және Дельта робот [16].

Үш аяқты және еркіндік дәрежесі алтыға тең параллель манипуляторлардың кейбір түрлері бар. Оларға әр үш аяғы ESR [17] (мұндағы E - жазықтық кинематикалық жұп), RRPS [18], RES [19], URS [20] (мұндағы U - әмбебап кинематикалық жұп) түріндегі кеңістіктік кинематикалық жұптарға ие параллель манипуляторлар жатады. Осы ПМ жазықтық және әмбебап кинематикалық жұптар қолданылатындықтан олардың құрылымы мен басқару жүйесі күрделі болады. 3RRPS [18] түрдегі ПМ бірінші кіріс айналмалы қозғалыс барлық параллель манипулятордың қозғалмайтын тіректің шеңбері бойынша айналуы арқылы іске асырылады, сондықтан бұл оның құрылымын күрделендіреді.

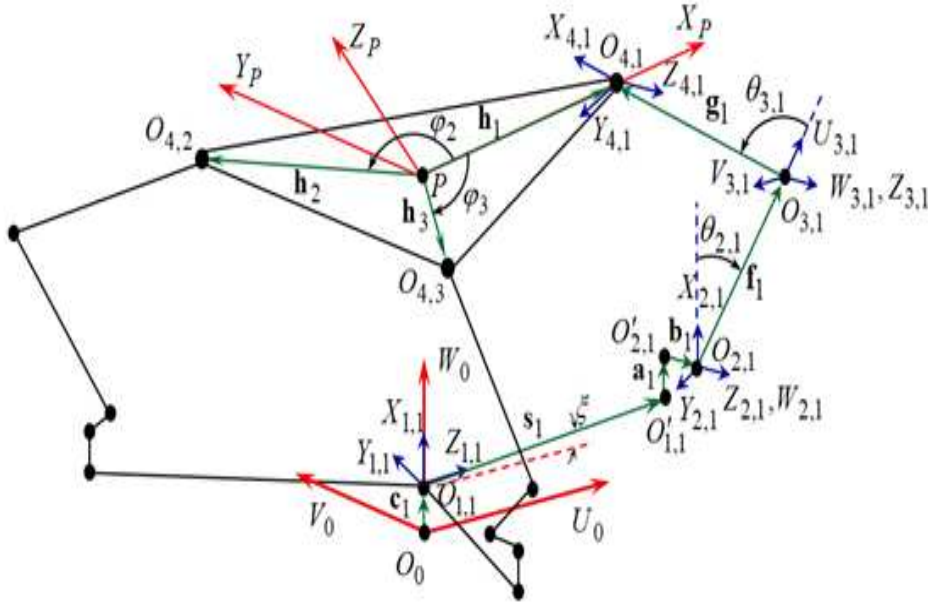


1-сурет - Жаңа трипод түрдегі 3-PRRS параллель манипулятордың 3D моделі

Қарастырылып отырған параллель манипуляторда кіріс ілгерілмелі кинематикалық жұптардың 120° бұрышпен орналасқан үш бағыттауыш бойымен ілгерілмелі қозғалуы гидроцилиндр арқылы іске асырылады. Кіріс кинематикалық жұптардың айналмалы қозғалысы үш гидроцилиндрдің штоктарымен бірге қозғалатын сервоприводтар арқылы іске асырылады. Аяқтарды жылжымалы платформамен біріктіретін сфералық кинематикалық жұптар оның қозғалысын шектемейді. Сондықтан алты жетектеменің қозғалысын басқара отырып қозғалмалы платформаның кез-келген берілген қозғалысын алуға болады.

2 Жұмыс аймағы

Негізгі $O_0U_0V_0W_0$ декарттық координаттар жүйесі үш бұрышты бекітілген 0 платформаның центрінде (Сур.1) O_0 орналасқан. Жергілікті $PX_PY_PZ_P$ координаттар жүйесі сфералық топсалардың $O_{4,1}, O_{4,2}, O_{4,3}$ центрі болып табылатын, қозғалмалы 4 платформаның P нүктесінде бекітілген.



2-сурет - Векторлар мен координаттар жүйелері

Ыңғайлылық үшін бастапқыда негізгі $O_0U_0V_0W_0$ және жергілікті $PX_PY_PZ_P$ координаттар жүйелері сәйкес келеді.

Негізгі координаттар жүйесінен сфералық топсалардың центрларына көшу матрицалары [21, 23, 24] жұмыстарда көрсетілген. Түрлендіру матрицаларының параметрлері 1-кестеде көрсетілген.

1-кесте – Түрлендіру матрицаларының параметрлері

$O_0U_0V_0W_0 \rightarrow O_{1,i}X_{1,i}Y_{1,i}Z_{1,i}$	$a_{01} = 0, b_{01} = 0, c_{01} = O_0O_{1,i} = c_i,$ $\alpha_{01} = \frac{\pi}{2}, \beta_{01} = 0, \gamma_{01} = \frac{\pi}{2} + \xi$
$O_{1,i}X_{1,i}Y_{1,i}Z_{1,i} \rightarrow O_{2,i}U_{2,i}V_{2,i}W_{2,i}$	$a_{12} = O'_{1,i}O'_{2,i} = a_i, b_{12} = O'_{2,i}O_{2,i} = b_i,$ $c_{12} = O_{1,i}O'_{1,i} = s_i, \alpha_{12} = \frac{3\pi}{2},$ $\beta_{12} = \theta_{2,i}, \gamma_{12} = \frac{\pi}{2}$
$O_{2,i}U_{2,i}V_{2,i}W_{2,i} \rightarrow O_{3,i}U_{3,i}V_{3,i}W_{3,i}$	$a_{23} = O_{2,i}O_{3,i}, b_{23} = 0, c_{23} = 0,$ $\alpha_{23} = 0, \beta_{23} = \theta_{3,i}, \gamma_{23} = 0$
$O_{3,i}U_{3,i}V_{3,i}W_{3,i} \rightarrow O_{4,i}X_{4,i}Y_{4,i}Z_{4,i}$	$a_{34} = O_{3,i}O_{4,i}, b_{34} = 0, c_{34} = 0,$ $\alpha_{34} = 0, \beta_{34} = 0, \gamma_{34} = 0$
$O_0U_0V_0W_0 \rightarrow O_PX_PY_PZ_P$	$a_{OP}, b_{OP}, c_{OP}, \alpha_{OP}, \beta_{OP}, \gamma_{OP}$

Бірінші кестеде таңдалған координаттар жүйелерінің түрлендіру матрицаларының параметрлері көрсетілген, онда s_i және $\theta_{2,i}$ - жалпыланған координаталар, ξ - бірінші белсенді ілгерлемелі кинематикалық жұп пен U_0 өсінің арасындағы бұрыш.

Берілгендер:

- барлық қозғалатын түйіндердің ұзындықтары $l_{O_{2,i}O_{3,i}} = f_i, l_{O_{3,i}O_{4,i}} = g_i;$
- $a_{01,i}, b_{01,i}, c_{01,i}, \alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}$, абсолюттік $O_0U_0V_0W_0$ координаттар жүйесіне қатысты $O_{1,i}X_{1,i}Y_{1,i}Z_{1,i}$, координаттар жүйелерінің орналасуын анықтайтын параметрлер;
- $h_i = l_{O_{4,i}P}$, φ_i жергілікті $PX_PY_PZ_P$ координаттар жүйесіне қатысты сфералық кинематикалық жұптардың $O_{4,i}$ полярлық координаталары;

- әр аяқтың түйіндер және кинематикалық жұптар геометриясын анықтайтын параметрлер.

Сфералық топсалардың $O_{4,i}$ координаталары былайша анықталады

$$\left. \begin{aligned} -b_i c\gamma_i + s_i s\gamma_i - f_i s\gamma_i s\theta_{2,i} - g_i s\gamma_i s\theta_{23,i} &= U_{O_{4,i}} \\ -b_i s\gamma_i - s_i c\gamma_i + f_i c\gamma_i s\theta_{2,i} + g_i c\gamma_i s\theta_{23,i} &= V_{O_{4,i}} \\ c_i + a_i + f_i c\theta_{2,i} + g_i c\theta_{23,i} &= W_{O_{4,i}} \end{aligned} \right\}, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

мұнда, $\theta_{23,i} = \theta_{2,i} + \theta_{3,i}$.

Айналмалы топсалардың механикалық шектеулерінің әсерінен параллель манипулятордың аяқтары, яғни RRS диадалары тек қана жазықтықтар бойынша қозғалатындығы белгілі. Сол жазықтықтардың теңдеулерін алу үшін, (1) жүйенің бірінші және екінші теңдеулерін сәйкесінше $c\gamma_i$ және $s\gamma_i$ алдын ала көбейту арқылы қосайық

$$c\gamma_i \cdot U_{O_{4i}} + s\gamma_i \cdot V_{O_{4i}} + b_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

ПМ жұмыс аймағын кері кинематикалық есеп бойынша қарастырайық. Қозғалмалы платформаның кеңістіктегі орналасуын келесі кіріс $\mathbf{q} = [s_1, \theta_{2,1}, s_2, \theta_{2,2}, s_3, \theta_{2,3}]^T$ және шығыс $\mathbf{X} = [X_P, Y_P, Z_P, \psi, \theta, \varphi]^T$ айнымалылары арқылы анықтауға болады. Біз негізгі санақ жүйесінің U_0, V_0 және W_0 өстеріне қатысты біртіндеп бұрылатын ψ, θ және φ Эйлер бұрыштарын [12] қолданамыз. Қозғалмалы платформаның $PX_P Y_P Z_P$ негізгі $O_0 U_0 V_0 W_0$ координаттар жүйесіне қатысты қозғалысын келесі $P = [X_P, Y_P, Z_P]^T$ орналасу векторы және 3×3 өлшемді R_{OP} бұрылу матрицалары арқылы былайша анықтауға болады

$$\mathbf{R}_{OP} = R_y(\theta)R_x(\psi)R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_{OP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ X_P & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ Y_P & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ Z_P & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

мұнда,

$$\begin{aligned} t_{11} &= c\theta c\varphi + s\psi s\theta s\varphi, & t_{12} &= -c\theta s\varphi + s\psi s\theta c\varphi, & t_{13} &= c\psi s\theta, \\ t_{21} &= c\psi s\varphi, & t_{22} &= c\psi c\varphi, & t_{23} &= -s\psi, \\ t_{31} &= -s\theta c\varphi + s\psi c\theta s\varphi, & t_{32} &= s\theta s\varphi + s\psi c\theta c\varphi, & t_{33} &= c\psi c\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Сфералық топсалардың координаталары былайша анықталады

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_{O_{41}} \\ V_{O_{41}} \\ W_{O_{41}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_{O_{42}} \\ V_{O_{42}} \\ W_{O_{42}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \begin{bmatrix} 1 \\ -h/2 \\ h \cdot \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_{O_{43}} \\ V_{O_{43}} \\ W_{O_{43}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \begin{bmatrix} 1 \\ -h/2 \\ -h \cdot \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

(6)-теңдеулерден (2), (4) және (5) ескеру арқылы қозғалмалы платформаның қозғалысының шектелу теңдеулерін анықтаймыз

$$\left. \begin{aligned} (X_P + h \cdot t_{11})c\gamma_1 + (Y_P + h \cdot t_{21})s\gamma_1 + b &= 0 \\ \left[X_P + \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{12} - t_{11}) \right] c\gamma_2 + \left[Y_P + \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{22} - t_{21}) \right] s\gamma_2 + b &= 0 \\ \left[X_P - \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{12} + t_{11}) \right] c\gamma_3 + \left[Y_P - \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{22} + t_{21}) \right] s\gamma_3 + b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

мұнда, $\xi - U_0$ мен s_1 векторларының оң бағыттарының арасындағы бұрыш, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} + \xi$, $\gamma_2 = \frac{3\pi}{2} + \xi$, $\gamma_3 = \xi - \frac{\pi}{6}$, $\xi = s^{-1}(b/h)$.

(7)-теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен үшінші теңдеуін сәйкесінше алдын ала $s\gamma_2$ және $s\gamma_3$ көбейту арқылы азайтатын болсақ, X_P былайша анықталады

$$X_P = \frac{h}{2} [t_{11} + (3 - 4c^2\xi)t_{22}] + hs(2\xi)t_{12} - 2bs\xi \quad (8)$$

Дәл осылай (7)-теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен үшінші теңдеуін сәйкесінше алдын ала $s\gamma_2$ және $s\gamma_3$ бөлу арқылы азайтатын болсақ, Y_P анықтаймыз

$$Y_P = \frac{h}{2} [t_{21} + (1 - 4c^2\xi)t_{12}] - hs(2\xi)t_{22} - 2bc\xi \quad (9)$$

(7)-теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуінен (8) және (9) ескере отырып келесі теңдеуді аламыз

$$(t_{11} + t_{22})s\xi + (t_{12} - t_{21})c\xi = \frac{2b}{h} \quad (10)$$

(10)-теңдеуден (5) теңдеуді ескере отырып келесі теңдеуді аламыз

$$Ac\varphi + Bs\varphi - \frac{2b}{h} = 0, \quad (11)$$

мұнда, $A = (c\psi + c\theta)s\xi + s\psi s\theta c\xi$, $B = s\psi s\theta s\xi - (c\psi + c\theta)c\xi$.

(11)-теңдеуден ПМ әр аяғының екі құрастырылуына сәйкес шешімдер аламыз,

$$\varphi_{1,2} = \pm c^{-1} \left(\frac{C}{r} \right) + \alpha, \quad (12)$$

мұнда, $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right)$, $r = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Біз RRS диадалардың оң жақ құрастырылуына сәйкес келетін шешімді қолданамыз.

Осылайша, Z_P , ψ және θ тәуелсіз айнымалыларды беру арқылы (8), (9) және (12) теңдеулерден X_P , Y_P және φ тәуелді параметрлерді анықтаймыз.

(6)-теңдеуден сфералық топсалардың координаталарын былайша анықтаймыз

$$\begin{aligned} W_{O_{4,1}} &= Z_P - h \cdot t_{31}, & W_{O_{4,2}} &= Z_P + \frac{h}{2} \cdot t_{31} - \frac{h\sqrt{3}}{2} \cdot t_{32}, \\ W_{O_{4,3}} &= Z_P + \frac{h}{2} \cdot t_{31} + \frac{h\sqrt{3}}{2} \cdot t_{32}. \end{aligned} \quad (13)$$

(3)-матрицаның белгілі қасиеттеріне байланысты келесі теңдік орынды

$$\left. \begin{aligned} t_{31} &= \pm \sqrt{1 - t_{11}^2 - t_{21}^2} \\ t_{32} &= \pm \sqrt{1 - t_{12}^2 - t_{22}^2} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Сфералық топсалардың $U_{O_{4,i}}$, $V_{O_{4,i}}$ нүктелеріне (14) теңдік орындалатындай $W_{O_{4,i}}$ координаталарының келесі төрт комбинациясы сәйкес келеді $(+t_{31}, +t_{32}; -t_{31}, -t_{32}; +t_{31}, -t_{32}; -t_{31}, +t_{32})$. Осы мәндердің ішінде тек қана алғашқы екеуі $(+t_{31}, +t_{32}; -t_{31}, -t_{32})$ қозғалмалы платформанң қажетті орналасу шарттарын (7) қанағаттандырады, яғни кеңістіктегі кез-келген нүктеге ПМ центрі ең көп дегенде екі бағдарда жете алады. Ал кейбір нүктелерге тек қана бір бағдарда бара алады.

3 Якоби матрицаларын құру

Аяқтардың контурларының $O_0O_{1,i}O'_{1,i}O'_{2,i}O_{3,i}O_{4,i}P$ тұйықталу теңдеулерін құрамыз

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O_{1,i}} + \mathbf{s}_i + \mathbf{a}_{1'2',i} + \mathbf{c}_{2'2,i} + \mathbf{f}_i + \mathbf{g}_i - \mathbf{h}_i \quad (15)$$

мұнда,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_P \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_P \cdot c\gamma_P + b_P \cdot s\gamma_P \cdot s\alpha_P \\ a_P \cdot s\gamma_P - b_P \cdot c\gamma_P \cdot s\alpha_P \\ c_P + b_P \cdot c\alpha_P \end{bmatrix}. \quad (16)$$

(16)-теңдеуден көрініп тұрғандай координаттар жүйелерінің бас нүктелерінің радиус векторларын орын ауыстыру матрицалары бойынша келесі түрде анықтауға болады

$$\mathbf{r}_P = [U_P V_P W_P]^T = {}^0\tau_P = \tau(a_{OP}, b_{OP}, c_{OP}, \alpha_{OP}, \beta_{OP}, \gamma_{OP}) \quad (17)$$

және

$$\mathbf{r}_{1,i} = [U_{1,i} V_{1,i} W_{1,i}]^T = {}^0\tau_i = \tau(a_{01,i}, b_{01,i}, c_{01,i}, \alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}). \quad (18)$$

Абсолюттік координаттар жүйесіндегі $O_0U_0V_0W_0$ қалған векторлардың координаталарын келесі бұрылу ішкі матрицаларының көмегімен анықтаймыз

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \overline{O_{2,i}O_{3,i}} = {}^0\mathbf{R}_{2,i} {}^{2,i}\mathbf{f}_i = {}^0\mathbf{R}_{1,i} \cdot {}^{1,i}\mathbf{R}_{2,i} \cdot \mathbf{f}_i = \\ &= \mathbf{R}(\alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}) \cdot \mathbf{R}(\alpha_{12,i}, \beta_{12,i}, \gamma_{12,i}) \cdot {}^{2,i}\mathbf{f}_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз $\gamma_i = \gamma_{01,i}$ және берілген параметрлерді пайдаланып $i = 1, 2, 3$ аяқтары үшін келесі векторларды анықтаймыз

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{R}(90^0, 0, \gamma_i) \cdot \mathbf{R}(270^0, \theta_{2,i}, 90^0) \cdot {}^{2,i}\mathbf{f}_i = \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma_i & 0 & s\gamma_i \\ s\gamma_i & 0 & -c\gamma_i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ c\theta_{2,i} & -s\theta_{2,i} & 0 \\ -s\theta_{2,i} & -\theta_{2,i} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_i \cdot s\gamma_i \cdot s\theta_{2,i} \\ f_i \cdot c\gamma_i \cdot s\theta_{2,i} \\ f_i \cdot c\theta_{2,i} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \overline{O_{3,i}O_{4,i}} = {}^0\mathbf{R}_{3,i} {}^{2,i}\mathbf{g}_i = {}^0\mathbf{R}_{1,i} \cdot {}^{1,i}\mathbf{R}_{2,i} \cdot {}^{2,i}\mathbf{R}_{3,i} {}^{3,i}\mathbf{g}_i = \\ &= \mathbf{R}(\alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}) \cdot \mathbf{R}(\alpha_{12,i}, \beta_{12,i}, \gamma_{12,i}) \cdot \mathbf{R}(\alpha_{23,i}, \beta_{23,i}, \gamma_{23,i}) {}^{3,i}\mathbf{g}_i = \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma_i & 0 & s\gamma_i \\ s\gamma_i & 0 & -c\gamma_i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ c\theta_{2,i} & -s\theta_{2,i} & 0 \\ -s\theta_{2,i} & -\theta_{2,i} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_{3,i} & -s\theta_{3,i} & 0 \\ s\theta_{3,i} & c\theta_{3,i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -g_i \cdot s\gamma_i \cdot s(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}) \\ g_i \cdot c\gamma_i \cdot s(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}) \\ g_i \cdot c(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{h}_i = \overline{PO_{4,i}} = {}^0\mathbf{R}_P \cdot {}^P\mathbf{h}_i = \mathbf{R}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \begin{bmatrix} h_i \cdot c\varphi_i \\ h_i \cdot s\varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

мұнда, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_3 = -\frac{2\pi}{3}$.

Абсолюттік $O_0U_0V_0W_0$ координаттар жүйесіне қатысты, (15)-теңдеудегі қалған векторлар анықталады.

Уақыт бойынша (15)-теңдеуден туынды аламыз

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_{O_{1,i}} + \dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{a}}_{1'2',i} + \dot{\mathbf{c}}_{2'2,i} + \dot{\mathbf{f}}_i + \dot{\mathbf{g}}_i - \dot{\mathbf{h}}_i \quad (23)$$

немесе $\mathbf{r}_{O_{1,i}}$, $\mathbf{a}_{1'2',i}$, $\mathbf{c}_{2'2,i}$ векторларының тұрақты екендігін ескере отырып, мынаны аламыз

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{s}}_i \times \mathbf{e}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i} \times \mathbf{f}_i + \omega_i \times \mathbf{g}_i - \omega_P \times \mathbf{h}_i \quad (24)$$

мұнда, $\dot{\mathbf{r}}_P = [\dot{U}_{OP}, \dot{V}_{OP}, \dot{W}_{OP}]^T = [\vartheta_{P_{U_0}}, \vartheta_{P_{V_0}}, \vartheta_{P_{W_0}}]^T$ - қозғалмалы платформаның центрінің, нүктесінің сызықтық жылдамдығы; $\dot{\mathbf{s}}_{1,i} = \dot{s}_{1,i} \cdot \mathbf{e}_{1,i}$ - сызықтық жалпыланған жылдамдықтардың векторлары; $\dot{\theta}_{2,i} = \dot{\theta}_{2,i} \mathbf{e}_{2,i}$ - бұрыштық жалпыланған жылдамдықтардың векторлары; $\mathbf{e}_{2,i}$ - i -ші белсенді бұрыштық өстің бірлік векторы; ω_i - i -ші аралық түйіннің бұрыштық жылдамдығы; $\omega_P = [\omega_{P_{U_0}}, \omega_{P_{V_0}}, \omega_{P_{W_0}}]^T$ - қозғалмалы платформаның бұрыштық жылдамдығының векторы; Барлық векторлар абсолюттік $O_0U_0V_0W_0$ координаттар жүйесіне қатысты анықталған.

(24)-теңдеудің екі жағын аралық түйіннің векторына скаляр көбейтеміз

$$\mathbf{g}_i^T \cdot \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{s}_i \cdot \mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{e}_{1,i} + \mathbf{g}_i^T \cdot (\dot{\theta}_{2,i} \times \mathbf{f}_i) + \mathbf{g}_i^T \cdot (\omega_i \times \mathbf{g}_i) - \mathbf{g}_i^T \cdot (\omega_P \times \mathbf{h}_i) \quad (25)$$

немесе векторлардың өзара орналасуын ескере отырып, мынаны аламыз

$$\mathbf{g}_i^T \cdot \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{s}_i \cdot (\mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{e}_{1,i}) + \dot{\theta}_{2,i} \cdot \mathbf{e}_{2,i} \cdot (\mathbf{f}_i \times \mathbf{g}_i) - \omega_P^T \cdot (\mathbf{h}_i \times \mathbf{g}_i). \quad (26)$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{r}}_P^T, \omega_P^T], \quad \dot{\mathbf{q}} = [\dot{s}_1, \dot{\theta}_{2,1}, \dot{s}_2, \dot{\theta}_{2,2}, \dot{s}_3, \dot{\theta}_{2,3}]^T \quad (27)$$

және (26) теңдеуді келесі матрицалық түрге келтіреміз

$$\mathbf{J}_x \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_q \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (28)$$

мұнда,

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{g}_1)^T \\ \mathbf{g}_2^T & (\mathbf{h}_2 \times \mathbf{g}_1)^T \\ \mathbf{g}_3^T & (\mathbf{h}_3 \times \mathbf{g}_3)^T \end{bmatrix}_{63},$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T \cdot \mathbf{e}_{1,1} & \mathbf{e}_{2,1}^T \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{g}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_2^T \cdot \mathbf{e}_{1,2} & \mathbf{e}_{2,2}^T \cdot (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{g}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_3^T \cdot \mathbf{e}_{1,3} & \mathbf{e}_{2,3}^T \cdot (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{g}_3) \end{bmatrix}_{63}.$$

\mathbf{J}_x және \mathbf{J}_q матрицалары кіріс және шығыс жалпыланған координаталарды байланыстыратын Якоби матрицалары болып табылады.

4 Жылдамдықтық талдау

4.1 Жылдамдықтың тура кинематикалық есебі

Жетекші түйіндердің жылдамдықтарын беріп, қозғалмалы платформаның жылдамдығын анықтау үшін, (28) матрицалық тәуелділік жеткіліксіз. \mathbf{J}_x матрицасын толықтыру үшін, келесі теңдеуді қарастырайық

$$\mathbf{O}_{4,i} = \mathbf{OP} + \mathbf{h}_i. \quad (29)$$

(29)-теңдеуді уақыт бойынша дифференциалдау арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$\mathbf{V}_{O_{4,i}} = \dot{\mathbf{r}}_P + \omega_P \times \mathbf{h}_i. \quad (30)$$

Айналмалы кинематикалық жұптардың шектеулеріне байланысты, сфералық кинематикалық жұптардың жылдамдықтары $\mathbf{V}_{O_{4,i}}$ әрқашанда айналмалы кинематикалық жұптардың айналу әстерінің бірлік векторларына $\mathbf{e}_{2,i}$ және $\mathbf{e}_{3,i}$ перпендикуляр болады. Ендеше (30) теңдеудің екі жағын $\mathbf{e}_{2,i}$ векторына скаляр көбейтеміз

$$\mathbf{0} = \mathbf{e}_{2,i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_P + \mathbf{e}_{2,i} \cdot (\omega_P \times \mathbf{h}_i) \quad (31)$$

Векторлардың өзара орналасуларына байланысты келесі теңдеуді аламыз

$$\mathbf{e}_{2,i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_P + (\mathbf{h}_i \times \mathbf{e}_{2,i}) \cdot \omega_P = 0 \quad (32)$$

(32)-теңдеуді матрицалық түрде жазамыз

$$\mathbf{J}_g \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{6 \times 3} \quad (33)$$

мұнда,

$$\mathbf{J}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{2,1}^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{e}_{2,1})^T \\ \mathbf{e}_{2,2}^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{e}_{2,1})^T \\ \mathbf{e}_{2,3}^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{e}_{2,1})^T \end{pmatrix}$$

(28) және (33) теңдеулерді бірге жазамыз, сонымен бірге \mathbf{J}_q матрицасына толықтыру жасаймыз

$$\mathbf{J}_a \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_e \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (34)$$

мұнда,

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} & n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} & n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} & n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \\ -c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & h_{1z} \cdot s\gamma_1 & -h_{1z} \cdot c\gamma_1 & h_{1y} \cdot c\gamma_1 - h_{1x} \cdot s\gamma_1 \\ -c\gamma_2 & -s\gamma_2 & 0 & h_{2z} \cdot s\gamma_2 & -h_{2z} \cdot c\gamma_2 & h_{2y} \cdot c\gamma_2 - h_{2x} \cdot s\gamma_2 \\ -c\gamma_3 & -s\gamma_3 & 0 & h_{3z} \cdot s\gamma_3 & -h_{3z} \cdot c\gamma_3 & h_{3y} \cdot c\gamma_3 - h_{3x} \cdot s\gamma_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} -g \cdot s\theta_{23,1} & f \cdot g \cdot s\theta_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g \cdot s\theta_{23,2} & f \cdot g \cdot s\theta_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g \cdot s\theta_{23,3} & f \cdot g \cdot s\theta_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$s\theta_{23,i} = \sin(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}), \quad s\theta_{3,i} = \sin \theta_{3,i}, \quad c\gamma_i = \cos \gamma_i, \quad s\gamma_i = \sin \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

4.2 Жылдамдықтың кері кинематикалық есебі

Жылдамдықтың кері кинематикалық есебінің мақсаты 3-PRRS параллель манипулятордың белгілі орналасуы кезінде қозғалмалы платформаның берілген жылдамдықтарын қамтамасыз ету үшін, алты жетектегіштің қажетті жылдамдықтарын анықтау болып табылады.

Тәуелсіз айнымалылардың Z_P , ψ және θ белгілі мәндерін (5) теңдеуді ескеру арқылы (8), (9) және (12) теңдеулерге қойып тәуелді X_P , Y_P және φ айнымалылардың мәндерін анықтауға болады. Келесі белгілеуді енгізейік $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{Z}_P, \dot{\psi}, \dot{\theta}]$, онда келесі теңдік орынды

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_r \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (35)$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial Z_P} & \frac{\partial X_P}{\partial \psi} + \frac{\partial X_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta} + \frac{\partial X_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial Z_P} & \frac{\partial Y_P}{\partial \psi} + \frac{\partial Y_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta} + \frac{\partial Y_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial Z_P} & \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

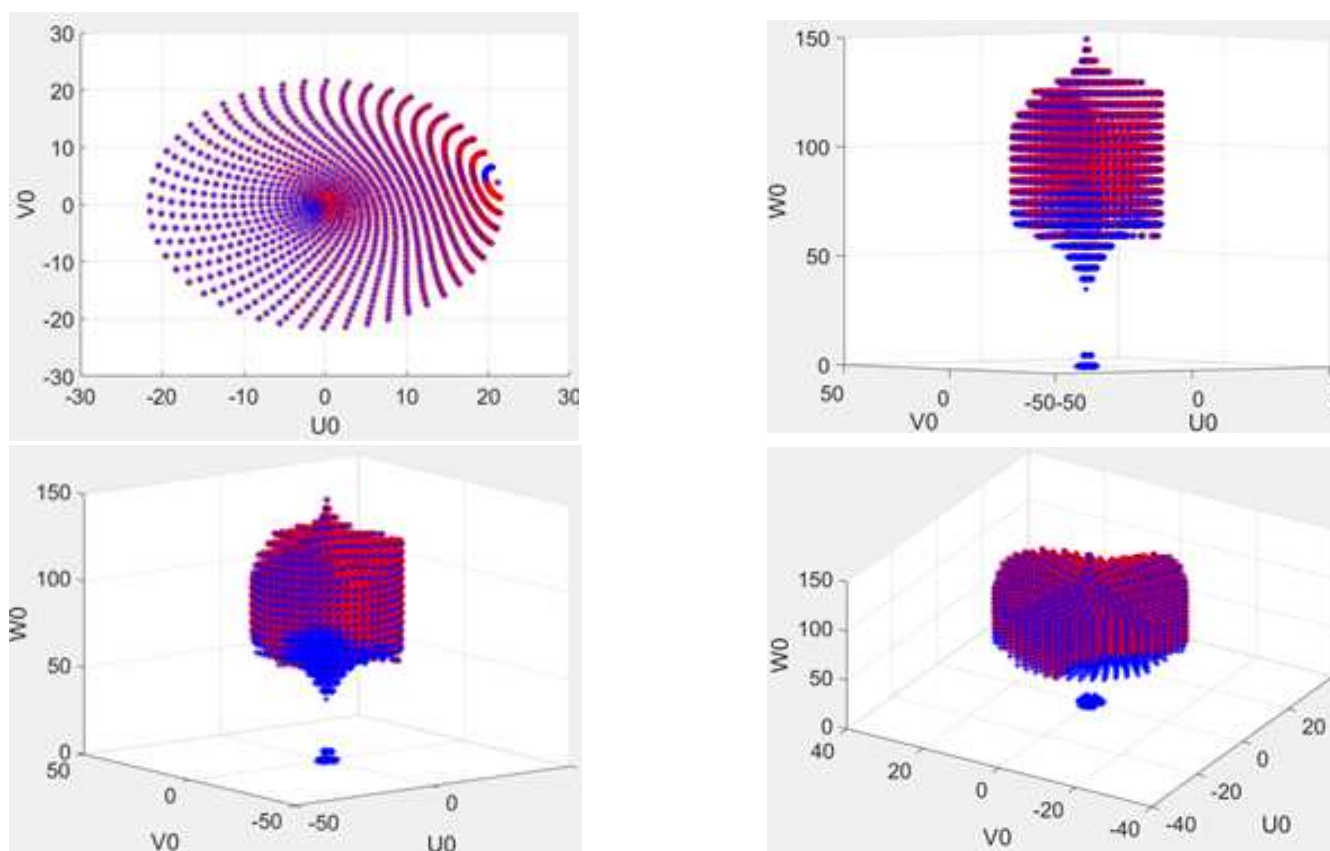
(28)-теңдеуден (35) ескеру арқылы мынаны аламыз

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_q^{-1} \cdot \mathbf{J}_x \cdot \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_r \quad (37)$$

(28)-теңдікте \mathbf{J}_q матрицасының өлшемі 6×3 , сол себепті ол матрицаның кері матрицасын анықтау үшін оны 3×3 өлшемге келтіреміз, яғни үш айналмалы жетектегіш түйіндерді қозғалтқан жағдайда үш ілгерлемелі жетектегіш түйіндерді бекітіп қоямыз және керісінше үш ілгерлемелі жетектегіш түйіндерді қозғалтқан жағдайда үш айналмалы жетектегіш түйіндерді бекітіп қоямыз.

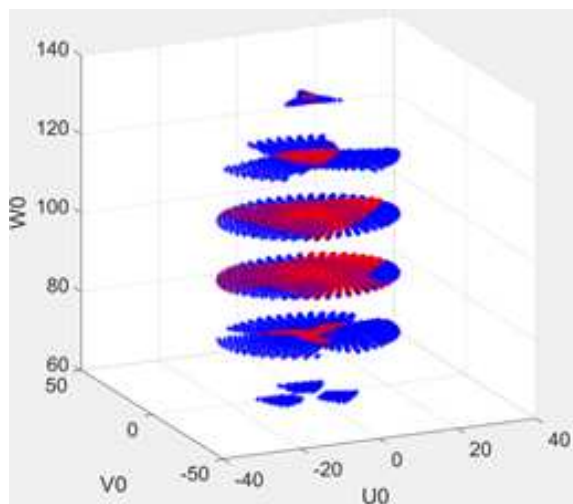
5 Сандық мысалдар

Тұрақты параметрлердің келесі мәндерінде: $a_i = 15$, $b_i = 8$, $c_i = 5$, $f_i = 60$, $g_i = 70$, $h = 43$ ПМ жұмыс аймағы анықталды. 3-суретте ілгерлемелі кинематикалық жұптарды бекітіп қойған жағдайда $s_1 = s_2 = s_3 = 50$ және Z_P 0 мен 170 аралығында 5 қадамымен, ал ψ және θ екі цикл бойынша $-\pi/2$ мен $\pi/2$ аралығында $\pi/50$ қадамы бойынша өзгерте отырып параллель манипулятордың кері кинематикалық есебі [21] шешілді, егер берілген нүктеде нақты $\theta_{2,i}$ шешімдері бар болса бағдарлама кеңістікке нүкте қояды. Суретте қызыл "o" және көк "*" бойынша ПМ жұмыс аймағының екі бағдары көрсетілген.



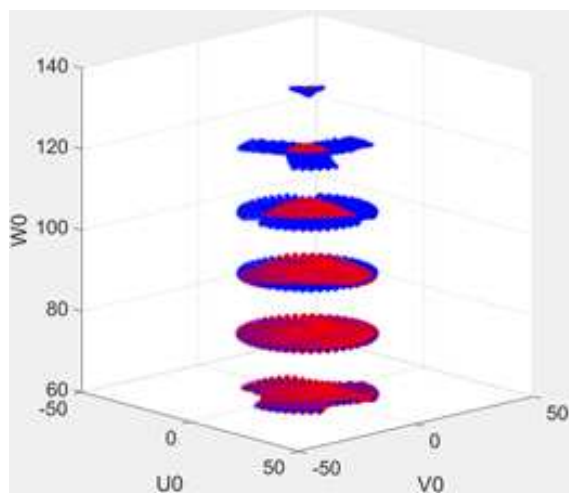
3-сурет - Жұмыс аймағы

4-суретте Z_P 60 мен 135 аралығында 15 қадамымен, ал ψ және θ екі цикл бойынша $-\pi/2$ мен $\pi/2$ аралығында $\pi/50$ қадамы бойынша өзгертілген. 4-суреттен ілгерлемелі кинематикалық жұптардың өзгеруінің вертикал бағыттағы жұмыс аймағының өзгеруіне әсер ететіндігін байқауға болады, яғни ілгерлемелі кинематикалық жұптардың ара қашықтығы жақындаған жағдайда параллель манипулятордың жоғарғы жақтағы жұмыс аймағы кеңейеді, ал ара қашықтықтар алыстаған жағдайда төменгі жақтағы жұмыс аймағы кеңейетіндігін көре аламыз.



$$s_1 = s_2 = s_3 = 40$$

4-сурет - ілгерлемелі кинематикалық жұптардың жұмыс аймағына әсері



$$s_1 = s_2 = s_3 = 60$$

Манипуляторды белгілі бір қалыпқа алып келеміз (кесте 2) және белсенді кинематикалық жұптарды белгілі бір жылдамдықпен қозғалтқан жағдайда (кесте 3) қозғалмалы платформаның лездік жылдамдықтарын анықтаймыз (кесте 4).

2-кесте – $\theta_{3,i}$ мәндері ($\theta_{2,1} = \theta_{2,2} = \theta_{2,3} = 0,7853, s_1 = s_2 = s_3 = 60$)

	$\theta_{3,1}$	$\theta_{3,2}$	$\theta_{3,3}$		$\theta_{3,1}$	$\theta_{3,2}$	$\theta_{3,3}$
1	1,8061	2,3347	1,8387	7	1,8387	1,8061	2,3347
2	1,8061	2,3347	1,8387	8	1,8387	1,8061	2,3347
3	1,8061	2,3347	1,8387	9	1,8387	1,8061	2,3347
4	1,8200	1,8200	1,8387	10	2,3347	1,8387	1,8061
5	1,8200	1,8200	1,8387	11	2,3347	1,8387	1,8061
6	1,8200	1,8200	1,8387	12	2,3347	1,8387	1,8061

3-кесте – Кіріс параметрлері

	\dot{s}_1	$\dot{\theta}_{2,1}$	\dot{s}_2	$\dot{\theta}_{2,2}$	\dot{s}_3	$\dot{\theta}_{2,3}$
1	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
2	0	0,2	0	0,2	0	0,2
3	-1	0	-1	0	-1	0
4	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
5	0	0,2	0	-1	0	0,2
6	-1	0	-1	0	-1	0
7	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
8	0	0,2	0	0,2	0	0,2
9	-1	0	-1	0	-1	0
10	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
11	0	0,2	0	0,2	0	0,2
12	-1	0	-1	0	-1	0

4-кесте – Шығыс параметрлері

	$\vartheta_{P_{U_0}}$	$\vartheta_{P_{V_0}}$	$\vartheta_{P_{W_0}}$	$\omega_{P_{U_0}}$	$\omega_{P_{V_0}}$	$\omega_{P_{W_0}}$
1	2,3158	-2,1329	19,3295	-0,2341	-0,1473	-0,0159
2	2,0717	-1,9081	18,1863	-0,2094	-0,1317	-0,0142
3	0,2441	-0,2248	1,1432	-0,0246	-0,0155	-0,0016
4	0	0	24,4475	0	0	0
5	0	0	22,7647	0	0	0
6	0	0	1,6828	0	0	0
7	0,6892	3,0720	19,3295	0,2446	-0,1290	-0,0159
8	0,6166	2,7481	19,3295	0,2446	-0,1290	-0,0159
9	0,0726	0,3238	1,1432	0,0257	-0,0136	-0,0016
10	-3,0051	-0,9391	19,3295	-0,0105	0,2572	-0,015
11	-2,6883	-0,8400	18,1863	-0,0094	0,2472	-0,0142
12	-0,3168	-0,0990	1,1432	-0,0011	0,0291	-0,0016

6 Қорытынды

Жұмыста трипод түрдегі 3-PRRS ПМ жұмыс аймағын анықтау кезінде қозғалмалы платформаның центрі кеңістіктегі белгілі бір нүктеге тек қана екі бағдарда бара алатындығы белгілі болды. Белгілі бір вертикал жазықтықтағы параллель манипулятордың жұмыс аймағы шеңбер болатындығы анықталды және сол шеңбердің ішіндегі манипулятордың центрінің қозғалу траекториясы көрсетілді. Ілгерлемелі кинематикалық жұптардың қозғалысы вертикал бағыттағы жұмыс аймағының ұлғаюына әсер ететіндігі белгілі болды. Манипулятордың жылдамдығының тура және кері кинематикалық есептері шешілді және салыстырылды, сингулярлық конфигурациядан алыс аймақтарда шешімдердің абсолюттік алшақтығы 5% асқан жоқ.

References

- [1] K.S. Fu, R.C. Gonzales, C.S.G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence* (Mc Graw - Hill Book Company, 1987).
- [2] T.Yoshikawa, *Foundation of Robotics: Analysis and Control* (MIT Press, 1990).
- [3] Lung-Wen Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators* (John Wiley & Sons, Inc., New York/Singapore/Toronto, 1999).
- [4] Jorge Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms, Fourth Edition* (Springer, 2014).
- [5] *Mekhanika promyshlennyh robotov. V trekh knigah / Pod redakciej K.V. Frolova, E.I. Vorob'eva [Mechanics of industrial robots. In three books / Edited by K. V. Frolov, E. I. Vorobyov]* (M.: "Higher School 1988) [in Russian].
- [6] K.C. Gupta, *Mechanics and Control of Robots* (Springer - Verlag, New York, 1997).
- [7] M.W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control* (John Wiley & Sons, Inc., 2006).
- [8] Jean - Pierre Merlet, *Parallel Robots* (Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2004).
- [9] Marco Ceccarelli, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems* (Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2004).

-
- [10] *Parallel Robots: Theory and Applications. Series Editors: Merlet J.P., Briot Sébastien, Martinet P.* (Springer, 2018).
- [11] D. Stewart, "A Platform with 6 Degrees of Freedom", *Proceedings Institution of Mechanical Engineers, London* **180**(1965), 371-386.
- [12] Li Yangmin, Xu Qingsong, "Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* **23**(2007), 395-408.
- [13] C.M. Gosselin, J. Angeles, "The optimum kinematic design of a spherical three - degree - of freedom parallel manipulator", *Journal of Mech Transm Autom Des* **111**:2(1989), 202-207.
- [14] C. Gosselin, E. St-Pierre, and M. Gagni, "On the development of the Agile Eye", *IEEE Robotics & Automation Magazine* **3**(1996), 29-37.
- [15] Almas Shintemirov, Aibek Niyetkaliev and Matteo Rubagotti, "Numerical Optimal Control of a Spherical Parallel Manipulator Based on Unique Kinematic colutions", *Journal of LATEX Class Files* **13**:9(2015), February 2015.
- [16] R. Clavel, *Device for displacing and positioning an element in space* (WIPO Patent, W087/03528).
- [17] L.W. Tsai, F. Tahmasebi, "Synthesis and Analysis of a New Class of Six - Degrees - of - Freedom Parallel Manipulators", *Journal of Robotics Systems* **10**:5(1993), 561 - 580.
- [18] R.I. Alizade, N.R. Tagiyev, J. Duffy, "A Forward and Reverse Displacement Analysis of a 6 - DoF In-Parallel Manipulator", *Mechanism and Machine Theory* **29**:1(1994), 115-124.
- [19] C.L. Collins, G.L. Long, "The Singularity Analysis of an In - Parallel Hand Controller for Force - Reflected Teleopation", *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **11**:5(1995), 661 - 669.
- [20] C. Cleary, M. Uebel, *Jacobian Formulation for a Novel 6 - DoF Parallel Manipulator* (IEEE International Conference on Robotics and Automation, **3**, 1994), 2377 - 2382.
- [21] Zh. Baigunchekov, M.A. Laribi, A. Mustafa, R. Kaiyrov, B .Amanov, A. Kassinov, "Geometry and Inverse Kinematics of 3-PRRS Type Parallel Manipulator", *Advances in Intelligent Systems and Computing* **980**(2020), 12-18.
- [22] Zh. Baigunchekov, R.A. Kaiyrov, "Direct kinematics of a 3-PRRS type parallel manipulator", *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research* **9**:7(2020), 967-972.
- [23] Zh. Baigunchekov, M.A. Laribi, M. Izmambetov, Zh. Zhumasheva, R. Kaiyrov, "The First Type of Singularity of a 3-PRRS Parallel Manipulator", *Mechanisms and Machine Science* **84**(2020), 356-363.
- [24] Zh. Baigunchekov, R. Kaiyrov, *Workspace of a 3- PRRS type parallel manipulator* (EasyChair Preprint, №2271).

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Информатика

Информатика

Computer
Science

IRSTI 28.23.39

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.06>**Zh.E. Sartabanova^{1,*}** , **V.T. Dimitrov²** , **S.M. Sarsimbaeva¹** ¹К.Жубанов Актөбе Регионал Университеті, Актөбе, Қазақстан²София Университеті СТ.Климент Охридски, София, Болгария*e-mail: sartabanova88@gmail.com

APPLYING THE KNOWLEDGE BASE OF CWE WEAKNESSES IN SOFTWARE DESIGN

The article deals with the issues of organizing software weaknesses by the software architect at the stage of its design using the developed ontological knowledge base of CWE weaknesses. The main goal of this research is to analyze the software defect system based on CWE and develop an ontology model (knowledge base) of this system for software architects. The use of artificial intelligence tools, in particular the development of knowledge bases based on weaknesses, will provide new opportunities for searching and researching software weaknesses. This model being developed will be useful for application by software developers, researchers in the field of software design and cybersecurity, as well as teachers of educational institutions that conduct courses in software development technology and information security. For developers, this model can serve as an assistant and reference when designing software, since weaknesses are organized by a well-known security tactic, helping the designer to embed security during the design process instead of detecting weaknesses after the software has been created. Researchers will be interested in studying and applying software weaknesses in their work. Teachers can use this model as a reference when studying and discussing security vulnerabilities in software design or architecture, as well as the types of errors that can be made during software development. The functions of the software architect are analyzed, and an example of the built ontological knowledge base of CWE weaknesses is given.

Key words: CWE, software weaknesses, ontology, knowledge bases, software architect, Protege, Semantic Web, SPARQL.

Ж.Е.Сартабанова^{1,*}, В.Т. Димитров², С.М.Сарсимбаева¹¹Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан²Әулие Климент Охрид атындағы София университеті, София қ., Болгария*e-mail: sartabanova88@gmail.com

Программалалық жасақтаманы жобалауда CWE әлсіздіктері туралы білім базасын қолдану

Берілген мақалада программалық жасақтама сәулетшісінің CWE әлсіз жақтарын білудің дамыған онтологиялық базасын қолдана отырып, оны жобалау кезеңінде программалық жасақтаманың әлсіздігін ұйымдастыру мәселелері қарастырылады. Бұл зерттеудің негізгі мақсаты - CWE негізіндегі программалық жасақтама ақауларының жүйесін талдау және программалық жасақтама сәулетшілері үшін осы жүйенің онтология моделін (білім базасын) жасау. Жасанды интеллект құралдарын қолдану, атап айтқанда, әлсіздіктерге негізделген білім базасын дамыту программалық жасақтаманың әлсіздіктерін іздеуге және зерттеуге жаңа мүмкіндіктер береді. Бұл әзірленген модель программалық жасақтаманы әзірлеушілердің, программалық жасақтама мен киберқауіпсіздік саласындағы зерттеушілердің, сондай-ақ программалық жасақтаманы әзірлеу технологиясы мен ақпараттық қауіпсіздік курстарын жүргізетін оқу орындарының оқытушыла

рына пайдалы болады. Бұл модель әзірлеушілерге программалық жасақтаманы жобалауда көмекші және анықтамалық бола алады, өйткені әлсіздіктер белгілі қауіпсіздік тактикасымен ұйымдастырылған, дизайнерге программалық жасақтама жасалғаннан кейін әлсіз жерлерді табудың орнына жобалау процесінде қауіпсіздікті енгізуге көмектеседі. Зерттеушілерге өз жұмыстарында программалық жасақтаманың әлсіздігін зерттеу және қолдану мәселелері қызықты болады. Оқытушылар бұл модельді программалық жасақтама дизайнының немесе архитектурасының әлсіз тұстарындағы қауіпсіздікті, сондай-ақ программалық жасақтаманы әзірлеу кезінде жасалуы мүмкін қателіктердің түрлерін зерттеу және талқылау кезінде анықтамалық материал ретінде қолдана алады. Программалық жасақтама сәулетшісінің функциялары талданады, CWE әлсіз жақтарын білудің онтологиялық базасының мысалы келтірілген.

Түйін сөздер: CWE, программалық жасақтаманың әлсіздігі, онтология, білім базасы, программалық жасақтама сәулетшісі, Protege, Semantic Web, SPARQL.

Ж.Е.Сартабанова^{1,*}, В.Т. Димитров², С.М.Сарсимбаева¹

¹Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г. Актюбе, Казахстан

²Софийский университет имени Святого Климента Охридского, г. София, Болгария

*e-mail: sartabanova88@gmail.com

Применение базы знаний слабостей CWE в проектировании программного обеспечения

В статье рассматриваются вопросы организации слабостей программного обеспечения архитектором программного обеспечения на этапе его проектирования с применением разработанной онтологической базы знаний слабостей CWE. Основной целью данного исследования является анализ системы дефектов программного обеспечения на основе CWE и разработка модели онтологии (базы знаний) этой системы для архитекторов программного обеспечения. Применение средств искусственного интеллекта, в частности разработку базу знания на основе слабостей даст новые возможности поиска и исследования слабостей программного обеспечения. Данная разрабатываемая модель будет полезна в применении разработчиками программного обеспечения, исследователям в области проектирования программного обеспечения и кибербезопасности, а также преподавателям учебных заведений, которые ведут курсы технологии разработки программного обеспечения и по информационной безопасности. Разработчикам данная модель может служить помощником и справочником при проектировании программного обеспечения, поскольку слабые места организованы известной тактикой безопасности, помогая проектировщику во встраивании безопасности в течение процесса проектирования вместо того, чтобы обнаружить слабые места после того, как программное обеспечение было создано. Исследователям будет интересны вопросы изучения и применения слабостей программного обеспечения в своих работах. Преподаватели могут использовать данную модель в качестве справочного материала при изучении и обсуждении безопасности по слабым местам дизайна или архитектуры программного обеспечения, а также типов ошибок, которые могут быть сделаны во время разработки программного обеспечения. Проанализированы функции архитектора программного обеспечения, приведен пример построенной онтологической базы знаний слабостей CWE.

Ключевые слова: CWE, слабости программного обеспечения, онтология, базы знаний, архитектор программного обеспечения, Protege, Semantic Web, SPARQL.

1 Introduction

Each organization makes sure that the software purchased and the software products developed are protected at all levels. To protect all their software products, companies adhere to the rules and standards of information security, as well as international recommendations, at all stages of development. To solve these problems, the developer community and MITRE Corporation created an international list of CWE software weaknesses. However, this information is not structured and there are contradictions in structuring these weaknesses by concepts, which leads to problems in the work of system users. These problems make it difficult to protect resources from cyber-attacks.

The analysis of publications [1–4] shows that one of the promising approaches to improving the efficiency of both search and analysis of information is an approach based on the construction of ontologies of the subject area. The authors propose an approach to implementing the organization of software weaknesses using ontology.

2 Architectural concept of CWE

A software architect is a person, whose main activity is to manage the process of creating, designing, developing and maintaining software. The main responsibility of the software architect according to international requirements is to develop or select the most appropriate architecture for the system (or systems), such that it meets the needs of the business, meets the requirements of stakeholders and achieves the desired results under specified restrictions. The functions of the architect are shown in Figure 1.

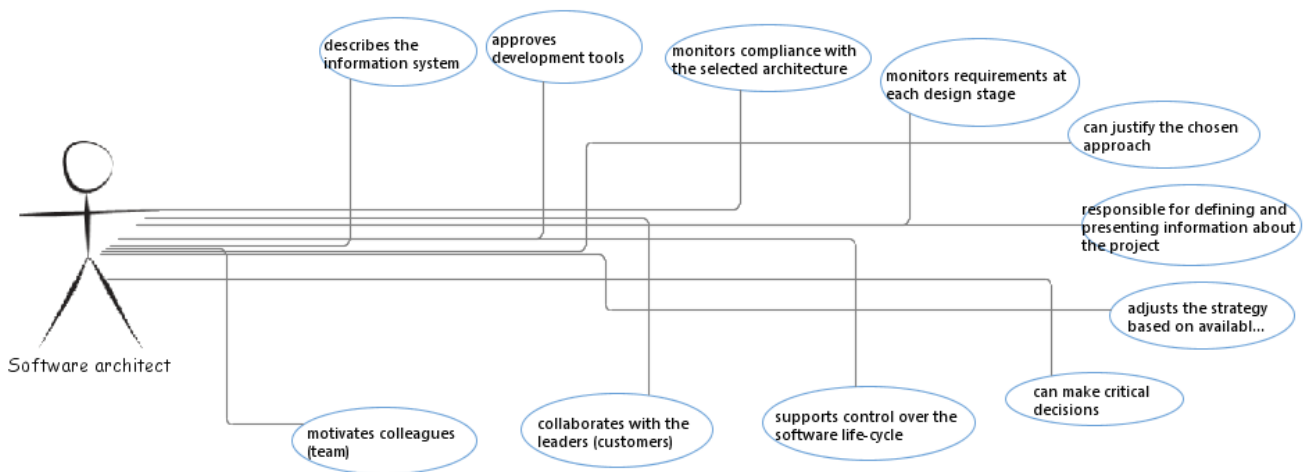


Figure 1 – Software Architect Functions [5]

In accordance with the Professional Standard in the Republic of Kazakhstan, the software architect has the following responsibilities: evaluating and analyzing systems, developing system solutions, developing IT strategies, concepts and architecture of information systems, introducing innovations in business processes, advising on the selection and implementation of optimal systems, from the point of view of the IT strategy of the enterprise, information technologies and using investments in information systems with maximum benefit. Its main goal is to develop a software architecture. The work functions of the software architect include [6]:

1. Creating Software Architecture Variants;
2. Assessment of software requirements and selection of software architecture option;
3. Documentation of software architecture and implementation of software tools;
4. Assessment of the possibility of creating a project architecture and identification of key scenarios;
5. Manage methods, interactions, and software upgrades;
6. Control over selection of software architecture option, implementation and maintenance of software tools.

3 The proposed ontology

An ontology is a system of objects, their properties, and relations between them for a certain area of knowledge. Special languages are being developed to work with ontologies, the most modern of which is the W3C consortium's OWL language. Information in the ontology is stored in OWL format, in the form of triplets. OWL is an information (knowledge) representation language that can be used to describe ontologies both in the semantic web and in various applied information systems. [7,8]

A Query Language for RDF (RDQL) and Protocol and RDF Query Language (SPARQL) are currently available for executing queries to RDF stores. SPARQL is one of the recommended semantic web technologies for publishing data to the Internet [9].

The knowledge base development process was divided into the following stages. - Defining classes in the ontology;

- The organization of classes in a certain hierarchy;
- Property definition;
- The content of the instances of the class "CWEEntries»;
- The content of the instances of the class "CVEEntries»;
- The content of the instances of the class "CAPECEnties»;
- Checking the consistency of the knowledge base.

The architectural concept is represented as a graph. This concept includes 12 categories, each of which consists of classes, variants, bases, and composites. The category structure is shown in Figure 2.

Any ontology contains a header and a body. Figure 3 shows the title of the ontology (knowledge base), added an annotation, you can add comments, and configure the import of the ontology. The ontology body contains descriptions of classes, properties, and individuals.

The "owl:Class" class is introduced in the OWL language. Classes are organized in a hierarchy using the "rdfs:subClassOf" property. Two complementary classes are important: "owl:Thing" a superclass of any OWL class; "owl:Nothing" a subclass of any OWL class. An instance of any OWL class includes an extension of the "owl:Thing" class. The extension of the "owl:Nothing" class is an empty set. Class descriptions are the building blocks for defining classes using axioms. To define classes and form various axioms, there are a number of constructs: "rdf:ID" defining a named class; "rdfs:subClassOf" is extensional one class is entirely included in the other extensional; "owl:equivalentClass" is extensionally two classes coincide; "owl:disjointWith" extensionally two classes do not intersect.

Classes are the main component of the OWL ontology. Classes can be named, disjoint, and hierarchical. When creating classes, the Protege editor initially already contains the "Thing" class - which is a class that represents a set containing all the objects in the subject area.

In the created knowledge base, the Thing class contains the following classes: CWEEntries - the main class under study, CAPECEnties, and CVEEntries. CWEEntries contains Software weaknesses, CAPECEnties-attacks related to the corresponding weaknesses, and cveentries-vulnerabilities.

An ontological graph is a bipartite graph whose vertices are concepts of the domain, and whose arcs are relations between them. An ontological graph is an information model of a domain that has the form of an oriented graph, whose vertices are classes, and whose arcs are relations or connections. Figure 4 shows the ontological graph obtained as a result of constructing the domain ontology in the Protege 5.5.0 editor [10].

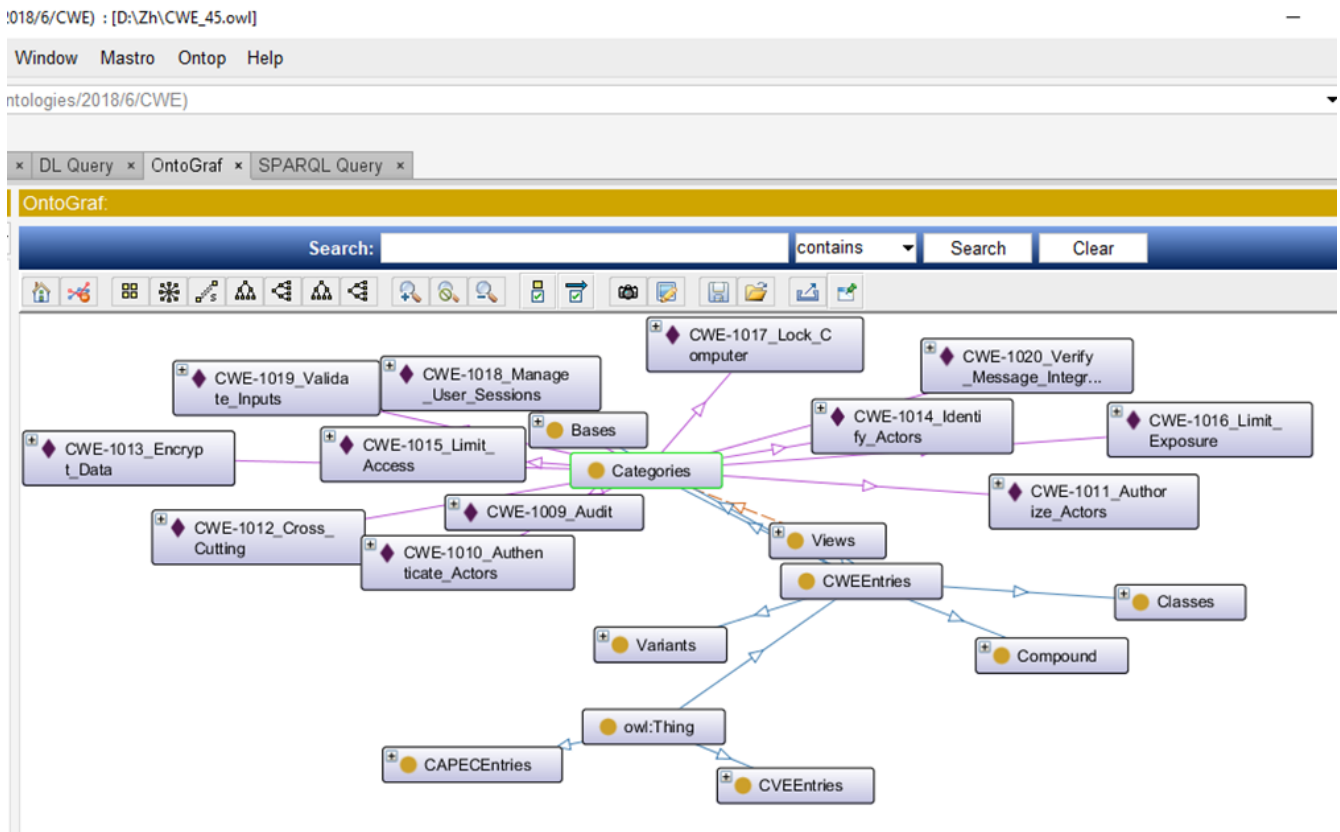


Figure 2 – The composition of the categories (the ontological graph)

The image shows the Protege environment displaying the ontology header and metrics for the CWE ontology. The ontology IRI is <http://www.semanticweb.org/Zh/ontologies/2018/6/CWE>. The ontology version IRI is <http://www.semanticweb.org/Zh/ontologies/2018/6/CWE/1.0.0>. The metrics table is as follows:

Metrics	
Axiom	8296
Logical axiom count	5578
Declaration axioms count	1206
Class count	9
Object property count	7
Data property count	40
Individual count	1146
Annotation Property count	1
Class axioms	
SubClassOf	6

The interface also shows the ontology header with the IRI and version IRI, and a search bar.

Figure 3 – Title of the ontology created by the knowledge base

The knowledge base you create consists of weaknesses, vulnerabilities, and attacks [11]. Since the knowledge base is implemented from the point of view of the architectural concept, the main class is `CWEEntries`. This class consists of the main view class, which includes 12 subclasses (category). The `Categories` class contains CWE records that contain a set of other records that share a common characteristic. [12]

Figure 5 shows the category content modeled in the Protege environment.

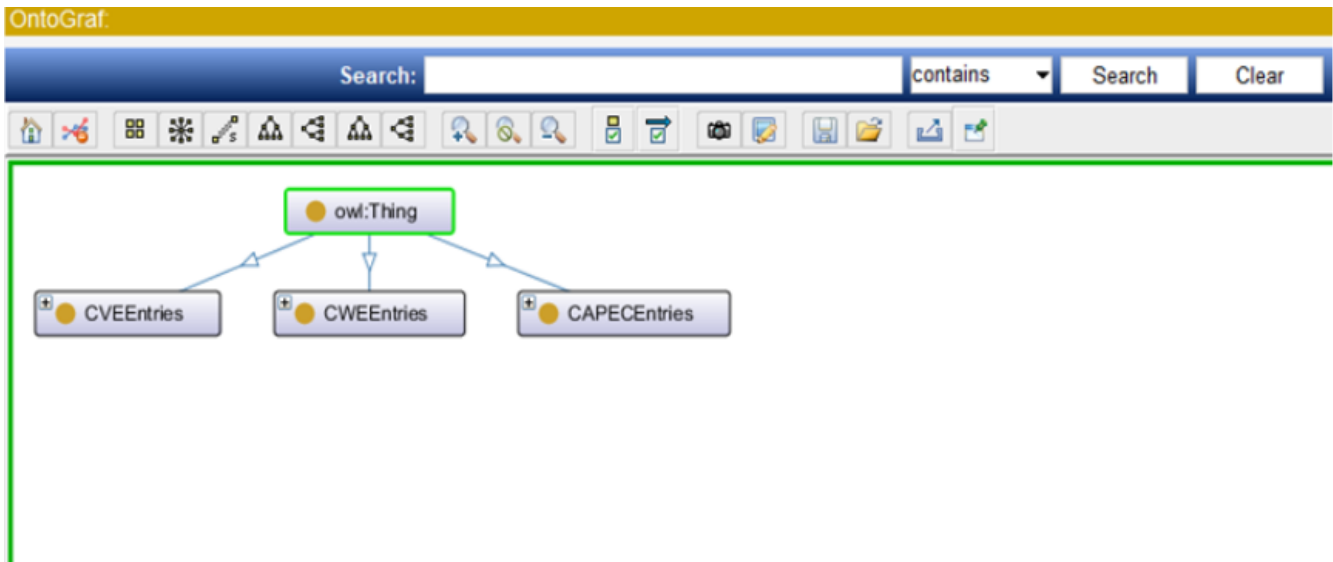


Figure 4 – The ontological graph

The image is a screenshot of the Protege OWL editor. The title bar shows the URL "CWE (http://www.semanticweb.org/Zh/ontologies/2018/6/CWE) : [D:\Zh\CWE_44.owl]". The interface is divided into several panes. On the left, there is a "Class hierarchy" pane showing a tree structure starting with "owl:Thing" and branching into "CAPECEnties", "CVEEntries", "CWEEntries", "Bases", "Categories", "Classes", "Compound", "Variants", and "Views". Below this is a "Direct instances" pane for the selected class "CWE-1010_Authenticate_Actors", listing various instances like "CWE-1009_Audit", "CWE-1011_Authorize_Actors", etc. The main right-hand pane is titled "Annotations: CWE-1010_Authenticate_Actors" and shows an "rdfs:comment" annotation with the text: "Weaknesses in this category are related to the design and architecture of authentication components of the system. Frequently these deal with verifying the entity is indeed who it claims to be. The weaknesses in this category could lead to a degradation of the quality of authentication if they are not addressed when designing or implementing a secure architecture." Below the annotations, there are panes for "Description: CWE-1010_A" and "Property assertions: CWE-1010_Authenticate_Actors", which shows an object property assertion "views_member" linking to "CWE-1008_Architectural_Concepts" and a data property assertion "ID" with the value "1010" of type "xsd:positiveInteger".

Figure 5 – The structure category

Each category includes classes, bases, variants, and, if there are composites.

The category has the following format: description - brief description-specified in the annotation), category ID - specified as a data property (data properties - ID), object property ? views_member. This property associates each category with the corresponding classes, bases, variants, and composites (that is, those that belong to a particular category).

Properties (rdf: Property) in OWL are relationships that bind classes or individuals. All

CWEEntries have two main objects:

- 1) object properties - properties of objects (owl:ObjectProperty) are relationships between two classes or individuals;
- 2) data properties - data type properties (owl:DatatypeProperty) - this property defines the relationship between the individual and the data value (numerical constraints).

The main properties of object properties include: references (designed to indicate the vulnerabilities available for a certain weakness), categories_member (this property is necessary for the relationship of each bases, variants, classes, compound with the corresponding categories), related_attack_patterns (this property indicates the relationship of weaknesses with possible attacks).

Properties of data properties include: id, modes_of_introduction, common_consequences, likelihood_of_exploit, demonstrative_examples, applicable_platforms, weakness_ordinalities, detection_methods. [13, 14]

4 Application of the knowledge base

There are four types of data queries: default query, literal query, class instance query, class object property query. Below are various types of queries written in SPARQL.

Query 1 - a general standard query, It defines the structure of the knowledge base and shows the list of main objects.

Inquiry 1. Generic Standard Query:

```
PREFIX rdf: <http://www.w3.org/1999/02/22-rdf-syntax-ns#>
PREFIX owl: <http://www.w3.org/2002/07/owl#>
PREFIX rdfs: <http://www.w3.org/2000/01/rdf-schema#>
PREFIX xsd: <http://www.w3.org/2001/XMLSchema#>
SELECT ?subject ?object
WHERE { ?subject rdfs:subClassOf ?object }
```

As a result of this query, a list of the main classes that are subordinate to the CWEEntries class in our ontology is displayed.

Query 2 - a query based on class object property data, It identifies the knowledge base elements associated with that property and shows the relationships between weaknesses through a specific object property.

Inquiry 2. Objects associated with a property of type categories_includes:

```
PREFIX db: <http://www.semanticweb.org/Zh/ontologies/2018/6/CWE#>
PREFIX rdf: <http://www.w3.org/1999/02/22-rdf-syntax-ns#>
PREFIX owl: <http://www.w3.org/2002/07/owl#>
PREFIX rdfs: <http://www.w3.org/2000/01/rdf-schema#>
PREFIX xsd: <http://www.w3.org/2001/XMLSchema#>
SELECT ?x ?property ?y
WHERE { ?property rdfs:subPropertyOf* db:views_includes.
?property rdfs:domain ?x .
?property rdfs:range ?y .
}
```

The result of the second query is to display the relationship between categories and objects that are subject to categories using the categories_includes property.

Query 3 - Demonstrates the query based on the data type property. Defines the likelihood_of_exploit property values for all categories and displays the list of categories and the corresponding value for these categories of the likelihood_of_exploit property. Inquiry 3. likelihood_of_exploit property values for categories:

PREFIX db: <http://www.semanticweb.org/Zh/ontologies/2018/6/CWE#>

PREFIX rdf: <http://www.w3.org/1999/02/22-rdf-syntax-ns#>

PREFIX owl: <http://www.w3.org/2002/07/owl#>

PREFIX rdfs: <http://www.w3.org/2000/01/rdf-schema#>

PREFIX xsd: <http://www.w3.org/2001/XMLSchema#>

```
SELECT ?t ?y WHERE
{
  // ?x db:categories_member ?t.
  ?x db:likelihood_of_exploit ?y
}
```

As a result of the third query, a list of values of the likelihood_of_exploit property for categories objects is displayed.

5 Conclusion

CWE projects are hierarchical classifications and are used primarily in this capacity. They provide a way to formally describe information security phenomena for use as a common language. The main focus is on common use, so MITRE attracts specialists from both the scientific community and industry to develop it. These projects serve as an important tool for constructive interaction in the field of information security.

The authors have designed an ontological model of these weaknesses from the point of view of the architectural concept. The article considers the possibilities of using the ontology of software weaknesses.

The developed software is integrated with the Protege ontology editor, which is used for ontology design and maintenance. As a result, a system has been created that provides an effective filling of the knowledge base with knowledge, has an ergonomic interface for expanding the existing model, combines the ability to convert new changes in the SID standards to the OWL language and the ability to visualize the schemes of structural models of paths, knowledge of which is extracted from the used database.

Queries for selection by condition, in the case of an ontological database, are made in SPARQL. It is a language for querying data represented in the RDF model, and it is also a Protocol for transmitting requests and responses.

References

- [1] Bhandari P., Singh M., *Formal Specification of the Framework for NSSA* (2nd International Conference on Intelligent Computing, Communication & Convergence. Procedia Computer Science **92**, 2016), 23-29. DOI: [10.1016/j.procs.2016.07.318](https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.07.318).
- [2] Sanjay Kumar Malik, Rizvi Sam., *An ontology framework for semantic web illustrating ontology merging* (7th International Conference on Next Generation Web Services Practices, 2011), 227-232. DOI: [10.1109/NWeSP.2011.6088182](https://doi.org/10.1109/NWeSP.2011.6088182).
- [3] Khoroshevsky V.F. "Ontology Driven Software Engineering: Models, Methods", *Implementations Ontology of designing* **9**:4(2019), 429-448 [in Russian]. DOI:[10.18287/2223-9537-2019-9-4-429-448](https://doi.org/10.18287/2223-9537-2019-9-4-429-448).
- [4] H. Arman, A. Hodgson, N. Gindy, "An ontology-based knowledge management system to support technology Intelligence", *International Journal of Industrial and Systems Engineering* **5**:3(2010), 377-389.

- [5] "Software Architecture" , <https://softwarearchitectures.com>
- [6] "The national chamber of entrepreneurs of the Republic of Kazakhstan Atameken" , <https://atameken.kz>.
- [7] "OWL 2 Web Ontology Language" , <https://www.w3.org/TR/owl2-overview/>
- [8] Hitzler P, Krutzsch V, Rudolph S. *Foundations of Semantic Web Technologies* (Chapman & Hal l. CRC, 2009).
- [9] "SPARQL Query Language for RDF" , <https://www.w3.org/TR/rdf-sparql-query/>
- [10] "A free, open-source ontology editor and framework for building intelligent systems" , <http://protege.stanford.edu/>
- [11] Sartabanova Zh., Dimitrov V. *Overview of the CWE software weaknesses system* (Proceedings of the international scientific conference "Problems of applied mathematics and computer science" , 2017), 309-311.
- [12] "CWE (2020). Common Weakness Enumeration - A Community-Developed List of Common Software & Hardware Weakness Types" , <http://cwe.mitre.org/>
- [13] Sartabanova Zh., Dimitrov V. *Modelling of CWEs on the CWE-287 example* (CEUR Workshop Proceedings, **2464**, 2019), 90-94.
- [14] "Recommendation ITU-T X.1525" , <https://www.itu.int/rec/T-REC-X.1525-201504-I>


4-бөлім

Раздел 4

Section 4

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

МРНТИ 27.25.15

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.07>А.Т. Рахымова¹ , М.Б. Габбасов^{2,*}, К.М. Шапен¹¹Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан²Компания системных исследований "Фактор", г. Нур-Султан, Казахстан

*e-mail: mars0@mail.ru

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ЧИСЕЛ

Впервые теория четырехмерных чисел была введена У.Р. Гамильтоном в 1843 г, которая называется теорией кватернионов. В данной теории умножение является некоммутативной операцией, вследствие чего не удалось построить полноценный математический анализ функциональных пространств. В 2003 году была опубликована новая теория функций четырех переменных казахскими математиками Б. Маукеевым и М.М. Абенным, где вводится коммутативное умножение, которая позволяет решать трехмерные модели механики аналитическим методом. Более полное изложение новой теории М.М. Абенным опубликовал в 2019 году в виде монографии. В ходе развития данной теории М.М. Абенным и М.Б. Габбасовым были найдены все четырехмерные пространства с коммутативным умножением, которым присвоены обозначения $M_2 - M_7$, и появилась необходимость исследования данных пространств. Данная работа изучает один из этих пространств, а именно пространство четырехмерных чисел M_5 . Целью исследования данной работы является изучение свойств четырехмерных чисел пространства M_5 и обоснование его значимости. В работе получены новые результаты об алгебре пространства M_5 , введены различные нормы и метрики, рассмотрены свойства числовых последовательностей.

Ключевые слова: четырехмерное число, спектр, собственное значение, симплектический модуль, спектральная норма.

А.Т. Рахымова¹, М.Б. Габбасов^{2,*}, К.М. Шапен¹¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан²"Фактор" жүйелік зерттеулер компаниясы, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

*e-mail: mars0@mail.ru

Төрт өлшемді сандардың бір кеңістігі туралы

Төрт өлшемді сандар теориясын алғаш рет В. Р. Гамильтон 1843 жылы енгізді, оны кватерниондар теориясы деп атады. Бұл теорияда енгізілен көбейту ережесі коммутативті емес, сондықтан функционалды кеңістіктердің толыққанды математикалық талдауы іске асырылмады. 2003 жылы төрт өлшемді сандар функциясының жаңа теориясын математиктер Б. Маукеев пен М.М. Әбенюв ашты, олар коммутативті болатын көбейту ережесін енгізді, бұл теория механиканың үш өлшемді модельдерін аналитикалық әдіспен шешуге мүмкіндік береді. Жаңа теорияның толық мазмұнын М.М. Әбенюв 2019 жылы өзінің монографиясында басып шығарды. Бұл теорияны зерттеу барысында М.М. Әбенюв және М.Б. Габбасов $M_2 - M_7$ белгілеуімен ерекшеленетін, көбейту ережесі коммутативті болатын барлық төрт өлшемді кеңістіктерді анықтады, осы орайда табылған кеңістіктерді зерттеу қажеттігі туындады. Бұл жұмыста осы кеңістіктердің бірі, атап айтқанда M_5 төрт өлшемді сандар кеңістігі зерттелген.

Бұл жұмыстың мақсаты M_5 кеңістігінің төрт өлшемді сандарының қасиеттерін зерттеу және оның маңыздылығын негіздеу болып табылады. Зерттеліп отырған жұмыста M_5 кеңістігінің алгебрасы жайында жаңа нәтижелер алынды, әртүрлі нормалар мен метрикалар енгізілді, сандық тізбектердің қасиеттері қарастырылды.

Түйін сөздер: төрт өлшемді сан, спектр, меншікті мәндер, симплексті модуль, спектралды норма.

A.T. Rakhymova¹, M.B. Gabbasov^{2,*}, K.M. Shapen¹

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

²System research company "Factor", Nur-Sultan, Kazakhstan

*e-mail: mars0@mail.ru

On one space of four-dimensional numbers

The theory of four-dimensional numbers was first introduced by W.R. Hamilton in 1843, which is called the theory of quaternions. In this theory multiplication is a non-commutative operation, as a result of which it was not possible to construct a full-fledged mathematical analysis of functional spaces. In 2003, a new theory of functions of four-dimensional variables was published by Kazakh mathematicians B. Maukeev and M.M. Abenov, where commutative multiplication is introduced, which allows solving three-dimensional models of mechanics by the analytical method. A more complete presentation of the new theory was published in 2019 by M.M. Abenov in a monograph. While developing this theory, M.M. Abenov and M.B. Gabbasov found all four-dimensional spaces with commutative multiplication, which were assigned the designations M2 - M7, and it became necessary to study these spaces. This paper studies one of these spaces, namely the space of four-dimensional numbers M5. The purpose of this paper is to study the properties of four-dimensional numbers of the space M5 and substantiate its significance. In this study, new results are obtained on an algebra of the space M5, various norms and metrics are introduced, and the properties of number sequences are considered.

Key words: four-dimensional number, spectrum, eigenvalue, symplectic module, spectral norm.

1 Введение

Впервые пространство четырехмерных чисел описал У.Р.Гамильтон [1], который назвал это пространство пространством кватернионов. Он ввел операции сложения, вычитания, умножения и деления между четырехмерными числами (кватернионами) и построил некоммутативную алгебру четырехмерных чисел [2–12]. Согласно теореме Фробениуса [13, 14], поле кватернионов является единственной ассоциативной, но некоммутативной алгеброй без делителей нуля. В 2003 году казахстанские математики Маукеев Б. и Абенев М.М. опубликовали монографию [15], в которой определили новое пространство четырехмерных чисел с ассоциативной и коммутативной алгеброй с делителями нуля. Данная теория оказалась продуктивной и в 2019 году Абенев М.М. опубликовал монографию [16], в которой построены соответствующие алгебра и математический анализ на основе четырехмерных чисел, которую автор назвал «четырёхмерной математикой».

Четырёхмерная математика позволяет рассмотреть пространство четырехмерных чисел как естественное расширение пространства одномерных и двумерных (комплексных) чисел. Как следствие, все базовые операции, работающие в теории функций действительного и комплексного переменных [17–24], сохраняются и в новом пространстве .

В дальнейшем Абенев М.М., совместно с Габбасовым М.Б., описал все анизотропные четырехмерные пространства, которые являются ассоциативными и коммутативными с делителями нуля [25]. Таких пространств оказалось шесть и им были присвоены обозначения M2, M3, M4, M5, M6, M7. Все эти пространства также можно рассматривать как расширение действительного и комплексного пространств. В работе [16] подробно описана четырехмерная математика над пространством M3. В данной работе мы исследуем один из этих пространств имеющий отличный индекс пространства, как M5.

Основным отличием пространства M5 от первоначального пространства M3 является то, что в записи $X = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3 + x_4 J_4$, базисные элементы $J_1, J_4 \in Re$, а $J_2, J_3 \in Im$ в том смысле, что $J_1 \cdot J_1 = J_4 \cdot J_4 = J_1$, $J_2 \cdot J_2 = J_3 \cdot J_3 = -J_1$ [10]. Это имеет определенные преимущества в физическом смысле, где J_1, J_2, J_3 можно рассмотреть как трехмерная координата

(x, y, z) в пространстве, что объясняет $J_1 \in Re$, $J_2, J_3 \in Im$, а J_4 как временной показатель (t) который фиксирует передвижения тела по времени.

Замена принадлежностей пространств J_3 и J_4 и другое определение операции умножения приводят к изменению вида основной матрицы четырехмерного числа, что в свою очередь приводит к изменению вида спектра и собственных значений, а также спектральной метрики.

2 Материал и методы

2.1 Алгебраические операции

Рассмотрим множество четырехмерных чисел $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_i \in R$, $i = 1, 2, 3, 4$, которое обозначим через M_5 .

Два числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ считаются равными, если $x_i = y_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

При этом, операции сложения и вычитания введем как покоординатное сложение и вычитание, которые являются ассоциативными и коммутативными. Операцию умножения определяем так, чтобы она была ассоциативной и коммутативной.

Определение 1 Произведением чисел $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ назовем число $Z = X \cdot Y = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, где

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 \\ z_2 &= x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 - x_3y_4 \\ z_3 &= x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 - x_2y_4 \\ z_4 &= x_4y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_1y_4 \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема 1 Введенная операция умножения удовлетворяет следующим условиям:

1. $X \cdot Y = Y \cdot X$ (коммутативность умножения);
2. $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ (ассоциативность умножения);
3. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$ (сочетательность умножения относительно сложения),

для любых $X, Y, Z \in R^4$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Число $(x_1, 0, 0, 0)$ будем называть действительным числом, а число $(x_1, x_2, 0, 0)$ – комплексным числом.

Из соотношений (1) следует, что при умножении действительного числа a на четырехмерное число происходит покоординатное умножение на a , то есть $(a, 0, 0, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1, ax_2, ax_3, ax_4)$.

Следующие четыре числа называются базисными числами: $J_1 = (1, 0, 0, 0)$, $J_2 = (0, 1, 0, 0)$, $J_3 = (0, 0, 1, 0)$, $J_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Тогда любое четырехмерное число $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ можно представить в виде разложения по базисным числам $X = x_1 \cdot J_1 + x_2 \cdot J_2 + x_3 \cdot J_3 + x_4 \cdot J_4$.

Определение 2 Симплектическим модулем четырехмерного числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в пространстве M_5 называется действительное число:

$$|X| = \sqrt[4]{[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2] \cdot [(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2]}. \quad (2)$$

Тогда модуль комплексного числа $x = (x_1, x_2, 0, 0)$ равен

$$|x| = \sqrt{|x_1^2 + x_2^2|}.$$

Определение 3 Число $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ назовем сопряженным числом к четырехмерному числу $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, если:

$$x_1^* = x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + 2x_2x_3x_4,$$

$$x_2^* = x_2 (-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) - 2x_1x_3x_4,$$

$$x_3^* = x_3 (-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) - 2x_1x_2x_4,$$

$$x_4^* = x_4 (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2x_1x_2x_3.$$

Соответственно, сопряженные числа к базисным числам имеют вид:

$$J_1^* = J_1, J_2^* = -J_2, J_3^* = -J_3, J_4^* = J_4.$$

Сопряженное число к комплексному числу $x = (x_1, x_2, 0, 0)$ имеет вид $|x|^2 (x_1, -x_2, 0, 0)$.

Лемма 1 Пусть $X \in M_5$, тогда $X \cdot X^* = |X|^4 J_1$.

Доказывается непосредственной проверкой.

Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – четырехмерное число, модуль которого отличен от нуля. Тогда умножая обе части равенства $X \cdot X^* = |X|^4 J_1$ на число $\frac{1}{|X|^4}$ получим $X \cdot \frac{X^*}{|X|^4} = J_1$. Число

$$X^{-1} = \frac{1}{|X|^4} \cdot X^* = \left(\frac{x_1^*}{|x|^4}, \frac{x_2^*}{|x|^4}, \frac{x_3^*}{|x|^4}, \frac{x_4^*}{|x|^4} \right) \quad (3)$$

назовем обратным числом к X .

Тогда операцию деления четырехмерных чисел определим как $\frac{Y}{X} = Y \cdot X^{-1} = \frac{1}{|X|^4} X^* \cdot Y$, если $|X| \neq 0$.

Теорема 2 Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, а $X^{-1} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ – обратное число к X . Тогда элементы обратного числа выражаются следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \frac{x_1 + x_4}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2} \right), \\ y_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_2 + x_3}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \frac{x_2 - x_3}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2} \right), \\ y_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_2 + x_3}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} - \frac{x_2 - x_3}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2} \right), \\ y_4 = \frac{1}{2} \left(-\frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \frac{x_1 + x_4}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2} \right). \end{cases}$$

Доказательство В силу формулы (3) и определения 3, находим элементы обратного числа $X^{-1} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{|X|^4} \cdot X^* = \frac{x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + 2x_2x_3x_4}{[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2] \cdot [(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2]} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_1(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2) + x_4(-4x_1x_4 + 4x_2x_3)}{[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2] \cdot [(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2]} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_1((x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2)}{[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2] \cdot [(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2]} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{x_4((x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_4)^2 - (x_2 - x_3)^2)}{[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2] \cdot [(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2]} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \frac{x_1 + x_4}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2} \right) \end{aligned}$$

Остальные элементы находятся аналогичным образом.

Определение 4 *Четырехмерное число называется невырожденным, если $|X| \neq 0$, и вырожденным, если $|X| = 0$.*

Опишем вырожденные числа. Из уравнения $|X| = 0$ получим, что существуют два типа вырожденных чисел в рассматриваемом пространстве, а именно, числа вида $(c_1, c_2, -c_2, c_1)$ и $(c_1, c_2, c_2, -c_1)$ при произвольных действительных c_1 и c_2 .

Числа вида $(c_1, c_2, -c_2, c_1)$ назовем вырожденными числами первого типа, а числа вида $(c_1, c_2, c_2, -c_1)$ – вырожденными числами второго типа.

Очевидно, единственным вырожденным числом, относящимся и к первому, и ко второму типу является число $0 = (0, 0, 0, 0)$. Обозначим множество всех вырожденных чисел первого типа через O_I , а множество всех вырожденных чисел второго типа через O_{II} .

Теорема 3 *Вырожденные числа обладают следующими свойствами:*

1. Если $X, Y \in O_I$, то $X + Y \in O_I$, $X - Y \in O_I$, $X \cdot Y \in O_I$.
2. Если $X, Y \in O_{II}$, то $X + Y \in O_{II}$, $X - Y \in O_{II}$, $X \cdot Y \in O_{II}$.
3. Если $X \in O_I, Y \in O_{II}$, то $X \cdot Y = 0 = (0, 0, 0, 0)$.
4. Если $X \in O_I, Y \notin O_I \cup O_{II}$, то $X \cdot Y \in O_I$.
5. Если $X \in O_{II}, Y \notin O_I \cup O_{II}$, то $X \cdot Y \in O_{II}$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Переходим к определению спектра четырехмерного числа. Сопоставим каждому четырехмерному числу $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ некоторую матрицу $F(x)$ следующего вида:

$$F(X) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Отображение $F : X \rightarrow F(X)$ является взаимно-однозначным. Действительно, двум разным числам X и Y соответствуют разные матрицы и для любой матрицы указанного вида можно найти соответствующее четырехмерное число.

Теорема 4 *Отображение $F : X \rightarrow F(X)$ для произвольных четырехмерных чисел X, Y обладает следующими свойствами:*

1. $F(X \pm Y) = F(X) \pm F(Y)$;
2. $F(cX) = cF(X)$ для любого $c \in R$;
3. $F(XY) = F(X)F(Y)$;
4. $F(X^{-1}) = F^{-1}(X)$;
5. $\det(F(X)) = |X|^4$;
6. $\det(F(X) \pm F(Y)) = |X \pm Y|^4$;
7. $\det(F(\alpha X)) = |\alpha X|^4$;
8. $\det(F(X)F(Y)) = |XY|^4$;
9. $\det(F^{-1}(X)) = |X^{-1}|^4$, где X – невырожденное число.

Доказательство Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3).

$$F(X)F(Y) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & -y_2 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{pmatrix} = B,$$

где B – результирующая матрица. Вычислим элементы матрицы B :

$$b_{11} = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 = z_1; \quad b_{12} = x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3 = z_2;$$

$$b_{13} = -x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2 = -z_3; \quad b_{14} = -x_1y_4 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1 = -z_4;$$

$$b_{21} = x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 - x_3y_4 = z_2; \quad b_{22} = -x_2y_2 + x_1y_1 + x_4y_4 - x_3y_3 = z_1;$$

$$b_{23} = -x_2y_3 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_3y_2 = -z_4; \quad b_{24} = x_2y_4 - x_1y_3 + x_4y_2 - x_3y_1 = -z_3;$$

$$b_{31} = x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 - x_2y_4 = z_3; \quad b_{32} = x_3y_2 + x_4y_1 + x_1y_4 + x_2y_3 = z_4;$$

$$b_{33} = -x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_1 - x_2y_2 = z_1; \quad b_{34} = -x_3y_4 - x_4y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 = z_2;$$

$$b_{41} = x_4y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_1y_4 = z_4; \quad b_{42} = -x_4y_2 + x_3y_1 - x_2y_4 + x_1y_3 = z_3;$$

$$b_{43} = -x_4y_3 - x_3y_4 + x_2y_1 + x_1y_2 = z_2; \quad b_{44} = x_4y_4 - x_3y_3 - x_2y_2 + x_1y_1 = z_1,$$

где $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = X \cdot Y$.

Докажем свойство 4. По формуле (3) $X^{-1} = \frac{1}{|X|^4} X^*$, следовательно,

$$(x^{-1})_1 = \frac{1}{|x|^4} x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + 2x_2 x_3 x_4,$$

$$(x^{-1})_2 = \frac{1}{|x|^4} x_2 (-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) - 2x_1 x_3 x_4,$$

$$(x^{-1})_3 = \frac{1}{|x|^4} x_3 (-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) - 2x_1 x_2 x_4,$$

$$(x^{-1})_4 = \frac{1}{|x|^4} x_4 (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2x_1 x_2 x_3,$$

соответственно матрица

$$F(X^{-1}) = \begin{pmatrix} (x^{-1})_1 & -(x^{-1})_2 & -(x^{-1})_3 & (x^{-1})_4 \\ (x^{-1})_2 & (x^{-1})_1 & -(x^{-1})_4 & -(x^{-1})_3 \\ (x^{-1})_3 & -(x^{-1})_4 & (x^{-1})_1 & -(x^{-1})_2 \\ (x^{-1})_4 & (x^{-1})_3 & (x^{-1})_2 & (x^{-1})_1 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$F(X) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Умножая эти матрицы друг на друга получим, что $F(X^{-1}) \cdot F(X) = E$, где E – единичная матрица, что доказывает требуемое.

Докажем свойство 5. По определению детерминанта

$$\begin{aligned} \det F(X) = x_1 \begin{vmatrix} x_1 & -x_4 & -x_3 \\ -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} - \\ - x_3 \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 \\ x_3 & -x_4 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисляя определители в последнем равенстве убеждаемся, что

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_4 & -x_3 \\ -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^*, \quad \begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = -x_2^*,$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = -x_3^*, \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 \\ x_3 & -x_4 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{vmatrix} = x_4^*.$$

Тогда $\det F(X) = x_1 x_1^* - x_2 x_2^* - x_3 x_3^* + x_4 x_4^* = (x \cdot x^*)_1 = |X|^4$.

Докажем свойство 6. Используя свойства 1) и 5) имеем

$$\det(F(X) \pm F(Y)) = \det(F(X \pm Y)) = |X \pm Y|^4.$$

Доказательства свойств 7, 8, 9 выполняется аналогично.

Таким образом, между пространством четырехмерных чисел и пространством (4×4) -матриц вида (4) существует биекция, которая сохраняет арифметические операции, то есть существующая биекция является гомоморфизмом.

Определение 5 *Спектром четырехмерного числа X называется совокупность характеристических чисел соответствующей матрицы $F(X)$.*

Составим характеристическое уравнение для определения спектра четырехмерного числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - \mu & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 - \mu & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 - \mu & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} & \mu^4 - 4x_1\mu^3 + 2(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)\mu^2 + \\ & + (-4x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 4x_1 + 4x_1x_4^2 + 8x_2x_3x_4)\mu + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - \\ & - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_1^2x_4^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4^2 - 8x_1x_2x_3x_4 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mu^4 - 4x_1\mu^3 + 2(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)\mu^2 + (-4x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 4x_1x_3^2 + 4x_1x_4^2 + 8x_2x_3x_4)\mu + \\ & + [(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2][(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2] = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение (5) находим четыре характеристических числа четырехмерного числа x :

$$\begin{cases} \mu_1 = x_1 - x_4 + (x_2 + x_3)i, \\ \mu_2 = x_1 - x_4 - (x_2 + x_3)i, \\ \mu_3 = x_1 + x_4 + (x_2 - x_3)i, \\ \mu_4 = x_1 + x_4 - (x_2 - x_3)i. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, спектр четырехмерного числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ состоит из четырех парно комплексно-сопряженных чисел вида (6). Обозначим спектр числа x через $\Lambda(X)$ и рассмотрим отображение $S : X \rightarrow \Lambda(X)$.

Теорема 5 *Отображение S является взаимно-однозначным и отображением на, то есть биекцией.*

Доказательство Пусть $X \neq Y$, покажем, что тогда $\Lambda(X) \neq \Lambda(Y)$. Допустим противное, тогда это означает, что $\mu_i(x) = \mu_i(y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 + (x_2 + x_3)i &= y_1 - y_4 + (y_2 + y_3)i, \\ x_1 - x_4 - (x_2 + x_3)i &= y_1 - y_4 - (y_2 + y_3)i, \\ x_1 + x_4 + (x_2 - x_3)i &= y_1 + y_4 + (y_2 - y_3)i, \\ x_1 + x_4 - (x_2 - x_3)i &= y_1 + y_4 - (y_2 - y_3)i. \end{aligned}$$

Перенеся правые части в левую часть и приведя подобные члены получим

$$\begin{aligned}(x_1 - y_1) - (x_4 - y_4) + ((x_2 - y_2) + (x_3 - y_3))i &= 0, \\(x_1 - y_1) - (x_4 - y_4) - ((x_2 - y_2) + (x_3 - y_3))i &= 0, \\(x_1 - y_1) + (x_4 - y_4) + ((x_2 - y_2) - (x_3 - y_3))i &= 0, \\(x_1 - y_1) + (x_4 - y_4) - ((x_2 - y_2) - (x_3 - y_3))i &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_2 - y_2 = 0, \quad x_3 - y_3 = 0, \quad x_4 - y_4 = 0$$

или $X - Y = 0$. Мы получили противоречие с условием $X \neq Y$.

Обратно, покажем, что любому спектру, состоящему из чисел вида (6) может соответствовать одно и только одно четырехмерное число. Действительно, пусть

$$\mu_1 = a + bi, \quad \mu_2 = a - bi, \quad \mu_3 = c + di, \quad \mu_4 = c - di$$

есть спектр некоторого четырехмерного числа. Тогда из формул (6) следует, что

$$x_1 = \frac{a+c}{2}, \quad x_2 = \frac{c-a}{2}, \quad x_3 = \frac{b+d}{2}, \quad x_4 = \frac{d-c}{2}.$$

Следствие 1 Единственным числом, имеющим нулевой спектр является число $0 = (0, 0, 0, 0)$.

Замечание 1 Спектрами базисных чисел являются $\Lambda(J_1) = (1, 1, 1, 1)$, $\Lambda(J_2) = (i, -i, i, -i)$, $\Lambda(J_3) = (i, -i, -i, i)$, $\Lambda(J_4) = (-1, -1, 1, 1)$.

Теорема 6 Для любого четырехмерного числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ справедливо равенство

$$|X|^4 = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4.$$

Доказательство. Из соотношений (6) следует, что

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2, \quad \mu_3 \cdot \mu_4 = (x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2.$$

Следовательно, из равенства (2) следует $\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 = |X|^4$.

Следствие 2 $|J_1| = 1$, $|J_2| = 1$, $|J_3| = 1$, $|J_4| = 1$.

Теорема 7 Справедливы следующие соотношения:

1. $\mu_i(X \pm Y) = \mu_i(X) \pm \mu_i(Y)$ для любых $X \in R^4$, $Y \in R^4$, $i = 1, 2, 3, 4$;
2. $\mu_i(X \cdot Y) = \mu_i(X) \cdot \mu_i(Y)$ для любых $X \in R^4$, $Y \in R^4$, $i = 1, 2, 3, 4$;
3. $\mu_i(b \cdot X) = b \cdot \mu_i(X)$, для любых $X \in R^4$, $b \in R^1$, $i = 1, 2, 3, 4$;
4. $\mu_i(X^{-1}) = (\mu_i(X))^{-1}$ для любого невырожденного $X \in R^4$, $i = 1, 2, 3, 4$,
5. $\mu_i(X^n) = \mu_i^n(X)$, для любых $X \in R^4$, $i = 1, 2, 3, 4$, $n \in N$;

где $\mu_i(X)$ – i -ый компонент спектра четырехмерного числа X .

Доказательство. Справедливость соотношения 1) очевидна.

Докажем соотношение 2). Согласно (1) и (6)

$$\begin{aligned}\mu_1(X \cdot Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) + \\ & (x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_3y_4 - x_4y_2 - x_4y_3) \cdot i, \\ \mu_2(X \cdot Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) + \\ & (-x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_4 - x_3y_1 + x_3y_4 + x_4y_2 + x_4y_3) \cdot i, \\ \mu_3(X \cdot Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2) + \\ & (x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_3y_4 + x_4y_2 - x_4y_3) \cdot i, \\ \mu_4(X \cdot Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2) + \\ & (-x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_3y_4 - x_4y_2 + x_4y_3) \cdot i.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\mu_1(X) &= (x_1 - x_4) + (x_2 + x_3) \cdot i, & \mu_1(Y) &= (y_1 - y_4) + (y_2 + y_3) \cdot i, \\ \mu_2(X) &= (x_1 - x_4) - (x_2 + x_3) \cdot i, & \mu_2(Y) &= (y_1 - y_4) - (y_2 + y_3) \cdot i, \\ \mu_3(X) &= (x_1 + x_4) + (x_2 - x_3) \cdot i, & \mu_3(Y) &= (y_1 + y_4) + (y_2 - y_3) \cdot i, \\ \mu_4(X) &= (x_1 + x_4) - (x_2 - x_3) \cdot i, & \mu_4(Y) &= (y_1 + y_4) - (y_2 - y_3) \cdot i.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1(X) \cdot \mu_1(Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) + \\ & + (x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_3y_4 - x_4y_2 - x_4y_3) \cdot i = \mu_1(x \cdot y), \\ \mu_2(X) \cdot \mu_2(Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) + \\ & + (-x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_4 - x_3y_1 + x_3y_4 + x_4y_2 + x_4y_3) \cdot i = \mu_2(x \cdot y), \\ \mu_3(X) \cdot \mu_3(Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2) + \\ & + (x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_3y_4 + x_4y_2 - x_4y_3) \cdot i = \mu_3(x \cdot y), \\ \mu_4(X) \cdot \mu_4(Y) &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2) + \\ & + (-x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_3y_4 - x_4y_2 + x_4y_3) \cdot i = \mu_4(x \cdot y).\end{aligned}$$

Соотношение 3) следует из соотношения 2).

Докажем соотношение 4). Из соотношения 2) следует, что $\mu_i(X \cdot X^{-1}) = \mu_i(X) \cdot \mu_i(X^{-1})$. С другой стороны $X \cdot X^{-1} = J_1$. Из соотношений (6) следует, что $\mu_i(J_1) = 1$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, $\mu_i(X^{-1}) = \frac{1}{\mu_i(X)}$.

Соотношение 5) также следует из соотношения 2).

Определив спектр четырехмерного числа находим его спектральную норму.

2.2 Определение нормы в четырехмерном пространстве М5

Определение 6 Четырехмерное пространство называется нормированным, если в нем задана некоторая норма, которая удовлетворяет следующим условиям [13]:

- 1) $\|X\| \geq 0$, $\|X\| = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$,
- 2) $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$,
- 3) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

Лемма 2 $\|X\|_C = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \sqrt{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2} \right)$ является нормой четырехмерного пространства М5.

Доказательство. В качестве доказательства проверяем выполнение условий определения 6. Первые два условия очевидны, докажем неравенство треугольника.

Для удобства рассмотрим два отдельных неравенства:

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \geq 0, \quad (C_1 D_2 - C_2 D_1)^2 \geq 0,$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ – произвольные вещественные числа. Раскрываем скобки и после алгебраических преобразований получаем

$$2A_1 A_2 B_1 B_2 \leq A_1^2 B_2^2 + A_2^2 B_1^2, \quad 2C_1 C_2 D_1 D_2 \leq C_1^2 D_2^2 + C_2^2 D_1^2.$$

Добавим к обеим частям первого неравенства $(A_1 A_2)^2 + (B_1 B_2)^2$, и второго неравенства $(C_1 C_2)^2 + (D_1 D_2)^2$, и извлекая корень напишем

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 \leq \sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)},$$

$$C_1 C_2 + D_1 D_2 \leq \sqrt{(C_1^2 + D_1^2)(C_2^2 + D_2^2)}.$$

Умножив на 2 и добавляя к обеим частям первого неравенства $A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2$ и второго неравенства $C_1^2 + C_2^2 + D_1^2 + D_2^2$, соответственно и повторно извлекая корень получим

$$\sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2} \leq \sqrt{A_1^2 + B_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2},$$

$$\sqrt{(C_1 + C_2)^2 + (D_1 + D_2)^2} \leq \sqrt{C_1^2 + D_1^2} + \sqrt{C_2^2 + D_2^2},$$

откуда следует

$$\frac{1}{2} \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(C_1 + C_2)^2 + (D_1 + D_2)^2} \leq$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2} + \frac{1}{2} \sqrt{C_1^2 + D_1^2} + \frac{1}{2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2} + \frac{1}{2} \sqrt{C_2^2 + D_2^2}$$

Введем следующие замены переменных:

$$A_1 = x_1 - x_4, A_2 = y_1 - y_4, B_1 = x_2 + x_3, B_2 = y_2 + y_3$$

$$C_1 = x_1 + x_4, C_2 = y_1 + y_4, D_1 = x_2 - x_3, D_2 = y_2 - y_3$$

Подставляя их в выражения получим

$$\|X + Y\|_C \leq \|X\|_C + \|Y\|_C$$

Лемма доказана.

Определение 7 *Спектральной нормой элемента $X \in R^4$ пространства $M5$ называется неотрицательное число:*

$$\|X\|_C = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \sqrt{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2} \right) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 |\mu_k^x| \quad (7)$$

Описание спектральной нормы и ее свойств более подробно приведен в работе [16].

Лемма 3 $\|X\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ является нормой четырехмерного пространства $M5$.

Доказательство. В качестве доказательства проверим выполнение условий определения 6. Рассмотрим следующее неравенство

$$\begin{aligned} & (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_4 - x_4y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_2y_4 - x_4y_2)^2 + \\ & (x_3y_4 - x_4y_3)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки перепишем следующим образом

$$\begin{aligned} & 2x_1y_1x_2y_2 + 2x_1y_1x_3y_3 + 2x_1y_1x_4y_4 + 2x_2y_2x_3y_3 + 2x_2y_2x_4y_4 + 2x_3y_3x_4y_4 \leq \\ & \leq (x_1y_2)^2 + (x_1y_3)^2 + (x_1y_4)^2 + (x_2y_1)^2 + (x_2y_3)^2 + (x_2y_4)^2 + \\ & \quad + (x_3y_1)^2 + (x_3y_2)^2 + (x_3y_4)^2 + (x_4y_1)^2 + (x_4y_2)^2 + (x_4y_3)^2. \end{aligned}$$

Добавляя $(x_1y_1)^2$, $(x_2y_2)^2$, $(x_3y_3)^2$, $(x_4y_4)^2$ к обеим частям неравенства получаем

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$$

Взяв корень и умножив на 2 получаем

$$2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 \leq 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}$$

или

$$\begin{aligned} & (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2 + (x_4 + y_4)^2 \leq \\ & \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} + \\ & \quad + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \end{aligned}$$

что эквивалентно

$$\|X + Y\|_E \leq \|X\|_E + \|Y\|_E.$$

Лемма доказана.

Определение 8 *Евклидовой нормой элемента $X \in R^4$ пространства $M5$ называется неотрицательное число:*

$$\|X\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^4 |\mu_k^x|^2} \quad (8)$$

Теорема 8 Между спектральной (7) и евклидовой (8) нормами справедливы следующие неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|X\|_E \leq \|X\|_C \leq \|X\|_E.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие неравенства $0 \leq \sqrt{A^2 - B^2} \leq A$, где $0 \leq |B| \leq A$. Добавляя ко всем частям неравенств A получим $A \leq A + \sqrt{A^2 - B^2} \leq 2A$, или $2A \leq A + B + 2\sqrt{A^2 - B^2} + A - B \leq 4A$. И после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{A} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{A+B} + \sqrt{A-B} \right) \leq \sqrt{A} \quad (9)$$

Обозначим $A = \sum_{i=1}^4 x_i^2$, $B = 2(x_1x_4 - x_2x_3)$, где $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, и (9) перепишем следующим образом

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2 + 2(x_1x_4 - x_2x_3)} + \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 2(x_1x_4 - x_2x_3)} \right) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2},$$

что равносильно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|X\|_E \leq \|X\|_C \leq \|X\|_E$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема утверждает, что нормы $\|X\|_E$ и $\|X\|_C$ эквивалентны. Таким образом, четырехмерное пространство R^4 является нормированным пространством.

Обозначим через N_0 подмножество четырехмерных чисел, удовлетворяющих условию

$$x_1x_4 = x_2x_3$$

Теорема 9 (свойства норм) Множество элементов N_0 замкнуто относительно умножения и справедливы следующие равенства:

1. для любых $X, Y \in N_0$ $\|X\|_E = \|X\|_C$, $\|X \cdot Y\|_C = \|X\|_C \cdot \|Y\|_C$, $\|X \cdot Y\|_E = \|X\|_E \cdot \|Y\|_E$;
2. для любых $X, Y \in O_I$ $\|X\|_E = \sqrt{2}\|X\|_C$, $\|X \cdot Y\|_C = 2 \cdot \|X\|_C \cdot \|Y\|_C$, $\|X \cdot Y\|_E = \sqrt{2} \cdot \|X\|_E \cdot \|Y\|_E$;
3. для любых $X, Y \in O_{II}$ $\|X\|_E = \sqrt{2}\|X\|_C$, $\|X \cdot Y\|_C = 2 \cdot \|X\|_C \cdot \|Y\|_C$, $\|X \cdot Y\|_E = \sqrt{2} \cdot \|X\|_E \cdot \|Y\|_E$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in N_0$ и $Z = X \cdot Y$. Тогда из определения 1 умножения получим

$$z_1z_4 - z_2z_3 = (x_1x_4 - x_2x_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) + (y_1y_4 - y_2y_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

то есть $Z \in N_0$. Замкнутость N_0 относительно умножения доказана.

Докажем первое утверждение. Равенство $\|X\|_E = \|X\|_C$ при $X \in N_0$ следует из соотношения

$$\|X\|_C = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\|X\|_E^2 - 2(x_1x_4 - x_2x_3)} + \sqrt{\|X\|_E^2 + 2(x_1x_4 - x_2x_3)} \right).$$

Далее

$$\begin{aligned} \|X\|_C &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{[(x_1 - x_4)(y_1 - y_4) - (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)]^2 + [(x_2 + x_3)(y_1 - y_4) + (x_1 - x_4)(y_2 + y_3)]^2} + \right. \\ &\left. + \sqrt{[(x_1 + x_4)(y_1 + y_4) - (x_2 - x_3)(y_2 - y_3)]^2 + [(x_2 - x_3)(y_1 + y_4) + (x_1 + x_4)(y_2 - y_3)]^2} \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приведя подобные члены получим

$$\begin{aligned} \|X\|_C &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2] [(y_1 - y_4)^2 + (y_2 + y_3)^2]} + \right. \\ &\left. \sqrt{[(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2] [(y_1 + y_4)^2 + (y_2 - y_3)^2]} \right) = \|X\|_E \|Y\|_E = \|X\|_C \|Y\|_C, \end{aligned}$$

так как $X, Y \in N_0$. Третье равенство следует из первых двух.

Докажем второе утверждение. Пусть $X = (x_1, x_2, -x_2, x_1) \in O_I$. Тогда

$$\|X\|_C = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \|X\|_E = \sqrt{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Если $Y = (y_1, y_2, -y_2, y_1) \in O_I$, то

$$X \cdot Y = (2x_1y_1 - 2x_2y_2, 2x_2y_1 + 2x_1y_2, -2x_2y_1 - 2x_1y_2, 2x_1y_1 - 2x_2y_2).$$

Следовательно,

$$\|XY\|_C = \frac{1}{2} \sqrt{16(x_1y_1 - x_2y_2)^2 + 16(x_2y_1 + x_1y_2)^2} = 2\|X\|_C \|Y\|_C.$$

Третье равенство следует из первых двух. Теорема доказана.

Таким образом, на вырожденных числах спектральная норма достигает своего относительного минимума, на множестве N_0 она достигает своего относительного максимума и совпадает с евклидовой нормой.

2.3 Числовая последовательность и ее предел

Определение 9 Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое четырехмерное число $A^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, a_4^{(n)})$. Совокупность элементов $A^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, называется последовательностью четырехмерных чисел, или просто последовательностью. Каждый элемент $A^{(n)}$ называется элементом этой последовательности, а число n – его номером.

Числовую последовательность с элементами $A^{(n)}$ обозначим $\{A^{(n)}\}$ [?].

Определение 10 Последовательность четырехмерных чисел $\{A^{(n)}\}$ является сходящейся, если существует такое четырехмерное число A , что для любого $\epsilon > 0$ найдется такой номер n_ϵ , что для всех $n \geq n_\epsilon$ выполняется неравенство $\|A^{(n)} - A\|_\Lambda < \epsilon$. При этом четырехмерное число A называется пределом последовательности четырехмерных чисел $\{A^{(n)}\}$.

Четырехмерные последовательности, не являющиеся сходящимися, называются расходящимися.

Теорема 10 Последовательность четырехмерных чисел $\{A^{(n)}\}$ сходится тогда и только тогда, когда каждая компонента сходится как одномерная последовательность.

Доказательство.

1. Пусть последовательность четырехмерных чисел $\{A^{(n)}\}$ сходится к числу A , то по определению 10 получаем $\|A^{(n)} - A\|_C < \epsilon$, для всех $n > n_\epsilon$. Раскрывая $A^{(n)}$ и A на компоненты, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\left(a_1^{(n)} - a_4^{(n)} - a_1 + a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} + a_3^{(n)} - a_2 - a_3\right)^2} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\left(a_1^{(n)} + a_4^{(n)} - a_1 - a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} - a_3^{(n)} - a_2 + a_3\right)^2} < \epsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(a_1^{(n)} - a_4^{(n)} - a_1 + a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} + a_3^{(n)} - a_2 - a_3\right)^2} < 2\epsilon, \\ \sqrt{\left(a_1^{(n)} + a_4^{(n)} - a_1 - a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} - a_3^{(n)} - a_2 + a_3\right)^2} < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Выполним несложные алгебраические операции

$$\begin{aligned} \left(a_1^{(n)} - a_4^{(n)} - a_1 + a_4\right)^2 &< 4\epsilon^2, \\ \left(a_2^{(n)} + a_3^{(n)} - a_2 - a_3\right)^2 &< 4\epsilon^2, \\ \left(a_1^{(n)} + a_4^{(n)} - a_1 - a_4\right)^2 &< 4\epsilon^2, \\ \left(a_2^{(n)} - a_3^{(n)} - a_2 + a_3\right)^2 &< 4\epsilon^2, \\ \left| \left(a_1^{(n)} - a_1\right) - \left(a_4^{(n)} - a_4\right) \right| &< 2\epsilon, \\ \left| \left(a_2^{(n)} - a_2\right) - \left(a_3^{(n)} - a_3\right) \right| &< 2\epsilon, \\ \left| \left(a_1^{(n)} - a_1\right) + \left(a_4^{(n)} - a_4\right) \right| &< 2\epsilon, \\ \left| \left(a_2^{(n)} - a_2\right) + \left(a_3^{(n)} - a_3\right) \right| &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

После суммирования и вычитания получим

$$\left| a_1^{(n)} - a_1 \right| < 4\epsilon, \quad \left| a_2^{(n)} - a_2 \right| < 4\epsilon, \quad \left| a_3^{(n)} - a_3 \right| < 4\epsilon, \quad \left| a_4^{(n)} - a_4 \right| < 4\epsilon.$$

2. Пусть теперь последовательность четырехмерных чисел $\{A^{(n)}\}$ сходится к числу A покомпонентно как одномерные последовательности, т.е.

$$\left| a_1^{(n)} - a_1 \right| < \epsilon, \quad \left| a_2^{(n)} - a_2 \right| < \epsilon, \quad \left| a_3^{(n)} - a_3 \right| < \epsilon, \quad \left| a_4^{(n)} - a_4 \right| < \epsilon.$$

Проводя предыдущие алгебраические операции в другую сторону, несложно получить оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\left(a_1^{(n)} - a_4^{(n)} - a_1 + a_4 \right)^2 + \left(a_2^{(n)} + a_3^{(n)} - a_2 - a_3 \right)^2} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\left(a_1^{(n)} + a_4^{(n)} - a_1 - a_4 \right)^2 + \left(a_2^{(n)} - a_3^{(n)} - a_2 + a_3 \right)^2} < 2\epsilon. \end{aligned}$$

или $\|A^{(n)} - A\|_C < 2\epsilon$. Теорема доказана.

Таким образом, если расходитя хотя бы одна компонента последовательности четырехмерных чисел, то последовательность является расходящейся.

Пример 1 Пусть $A^{(n)} = \left(\frac{n}{a^n}; \frac{1}{n}; \frac{5n+5}{n}; \frac{1}{n^5} \right)$, эта последовательность сходится, так как сходятся все компоненты $\lim_{x \rightarrow \infty} A^{(n)} = A = (0, 0, 5, 0)$.

Пример 2 Пусть $A^{(n)} = \left(\sin n; \frac{1}{n}; \frac{5n+5}{n^4}; \frac{n^5}{e^n} \right)$, эта последовательность расходящаяся, так как первый элемент последовательности является расходящимся.

3 Заключение

В данной статье приведено описание пространства M_5 четырехмерных чисел, в котором введены операции сложения, вычитания и умножения, а также определены их свойства коммутативности, ассоциативности умножения и сочетательности умножения относительно сложения. Определены нормы и метрика в рассматриваемом пространстве и доказаны свойства норм.

Исследованы последовательности четырехмерных чисел, определены их свойства, а также доказаны критерии сходимости. Результаты проделанной работы показывают, что пространство четырехмерных чисел M_5 является естественным расширением соответствующих пространств вещественных и комплексных чисел.

Список литературы

- [1] William R. Hamilton. Lectures on Quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method. – Dublin University Press, 1853. – 868 pp.
- [2] A. Sudbery, Quaternionic analysis // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1979. – V. 85. – P. 199-225.
- [3] A. Buchman, "A brief history of quaternions and the theory of holomorphic functions of quaternionic variables", https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/HOMSIGMAA/Buchmann.pdf
- [4] Tsit Lam. Hamilton's quaternions // Handbook of Algebra. – 2003. – №3. – P. 429-454. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1570-7954\(03\)80068-2](https://doi.org/10.1016/S1570-7954(03)80068-2)
- [5] D. Eberly, "Quaternion algebra and calculus" <https://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf>
- [6] S.L. Alder. Quaternionic quantum field theory // Commun. Math. Phys. – 1986. – V. 104. – P. 611-656.
- [7] S.L. Adler. Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. – New York: Oxford University Press, 1995.
- [8] A. Baker. Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach // Linear Algebra Appl. – 1999. – V. 286. – P. 303-309.
- [9] A. Brauer. Limits for the characteristic roots of matrices II // Duke Math. J. – 1947 – V. 14. – P. 21-26.
- [10] J.L. Brenner. Matrices of quaternions // Pac. J. Math. – 1959. – V. 1. – P. 329-335.
- [11] A. Cayley. On certain results relating to quaternions // Philos. Mag. – 1845. – V. 26. – P. 141-145.
- [12] L. Chen. Definition of determinant and Cramer solution over the quaternion field // Acta Math. Sinica (N.S.). – 1991. – V. 7. – P. 171-180.
- [13] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.
- [14] A. Skowronski and K. Yamagata. Frobenius Algebras I. Basic Representation Theory. – European mathematical society publishing house, 2012. – 662 с.
- [15] Маукеев Б.И., Абенев М.М. Начальные главы теории функций бикомплексного переменного. – Алматы: ТОО «МТИА», 2003. – 58 с.
- [16] Абенев М.М. Четырехмерная математика: Методы и приложения. Научная монография. – Алматы.: Издательство, 2019. – 176 с.
- [17] L. Hsu. On symmetric, orthogonal, and skew symmetric matrices // Proc. Edinburg Math. Soc., ser. 2. – 1953. – V. 10. – P. 37-44.
- [18] R. Bellman. Notes on matrix theory // Amer. Math. Monthly. – 1953. – V. 60. – P. 173-175.
- [19] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
- [20] Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 280 с.
- [21] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
- [22] Сидоров В.Ю., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.
- [23] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
- [24] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. К структуре ортогональной матрицы // Труды Физ.-мат. Отдела ВУАН. Киев. – 1929. – С. 1-8.
- [25] Абенев М.М., Габбасов М.Б. Анизотропные четырехмерные пространства или новые кватернионы. – Препринт, Нур-Султан. – 2020.

References

- [1] William R. Hamilton, *Lectures on Quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method* (Dublin University Press, 1853, 868 pp.).
- [2] A. Sudbery, "Quaternionic analysis", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85**(1979), 199-225.
- [3] A. Buchman, "A brief history of quaternions and the theory of holomorphic functions of quaternionic variables", https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/HOMSIGMAA/Buchmann.pdf
- [4] Tsit Lam, "Hamilton's quaternions", *Handbook of Algebra* 3(2003), 429-454. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1570-7954\(03\)80068-2](https://doi.org/10.1016/S1570-7954(03)80068-2)
- [5] D. Eberly, "Quaternion algebra and calculus", <https://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf>
- [6] S.L. Alder, "Quaternionic quantum field theory", *Commun. Math. Phys.* **104**(1986), 611-656.
- [7] S.L. Adler, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields* (New York: Oxford University Press, 1995).
- [8] A. Baker, "Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach", *Linear Algebra Appl.* **286**(1999), 303-309.
- [9] A. Brauer, "Limits for the characteristic roots of matrices II", *Duke Math. J.* **14**(1947), 21-26.
- [10] J.L. Brenner, "Matrices of quaternions", *Pac. J. Math.* **1**(1959), 329-335.
- [11] A. Cayley, "On certain results relating to quaternions", *Philos. Mag.* **26**(1845), 141-145.
- [12] L. Chen, "Definition of determinant and Cramer solution over the quaternion field", *Acta Math. Sinica (N.S.)* **7**(1991), 171-180.
- [13] Kantor I.L., Solodovnikov A.S., *Giperkompleksnie chisla [Hyper complex numbers]* (M.: Nauka, 1973, 144 p.) [in Russian].
- [14] A. Skowronski and K. Yamagata, *Frobenius Algebras I. Basic Representation Theory* (European mathematical society publishing house, 2012, 662 pp.)
- [15] Maukeev B.E., Abenov M.M., *Nachal'nie glavy teorii funktsii bikompleksnogo peremennogo [The initial chapters of the theory of functions of a bicomplex variable]* (Almaty: LLP «MTIA», 2003, 58 pp.) [in Russian].
- [16] Abenov M.M., *Chetirehmernaya matematika. Metody i prilozheniya. Nauchnaya monographia [Four-dimensional mathematics: Methods and applications. Scientific monograph]* (Almaty: Publishing House, 2019, 176 pp.)
- [17] L. Hsu, "On symmetric, orthogonal, and skew symmetric matrices", *Proc. Edinburg Math. Soc., ser. 2.* **10**(1953), 37-44.
- [18] R. Bellman, "Notes on matrix theory", *Amer. Math. Monthly* **60**(1953), 173-175.
- [19] Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]* (M.: Nauka, 1965, 716 pp.) [in Russian].
- [20] Bitsadze A.V., *Osnovi teorii analyticheskikh funktsii kompleksnogo peremennogo [Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable]* (M.: Nauka, 1984, 280 pp.) [in Russian].
- [21] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]* (M.: Nauka, 1989, 624 pp.) [in Russian].
- [22] Sidorov V.Yu., Fedoryuk M.I., Shabunin M., *Leksii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Theory of functions of complex variables]* (M.: Nauka, 1982, 488 pp.) [in Russian].
- [23] Gantmakher F.R., *Teoriya matrits [Matrix theory]* (M.: Nauka, 1967, 576 pp.) [in Russian].
- [24] Gantmakher F.R. and Krein M.G., *K strukture ortogonal'noi matritsi [To a structure of orthogonal matrix]* (Trudy Fiz.-Mat. Otdela VUAN, Kiev, 1929, P. 1-8) [in Russian].
- [25] Abenov M.M., Gabbassov M.B., *Anizotropnie chetirehmernie prostranstva ili novie kvaternioni [Anisotropic four-dimensional spaces or new quaternions]* (Preprint, Nur-Sultan, 2020) [in Russian].

A.S. Muratov , A.T. Kalbayeva , S.D. Kurakbayeva* , A.T. Kalbayeva 
M. Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan
*e-mail: sevam@mail.ru

USING THE BOUNDARY ELEMENTS APPROACH TO SOLVE THE PROBLEMS OF LIQUID FILTRATION VIA THE DAM

The work deals with the method and programs to calculate the liquid filtration via the dam, with allowing for the events of their possible damage. On the base of the boundary elements approach the method to calculate the flow of a liquid via the dam in the presence of a watertight fitting member was conducted. Using the numeric test, the free boundary position at the liquid filtration via the dam with the defected upper and lower basins was received and provisional analysis with the outcomes, received in the event of the defect of the upper dam basin only, was conducted. The primary free surface position has been determined arbitrarily. The boundary elements disposition drawing for the soil unit at the stream with the free area via the barrage with the defected upper (at the top) and lower barrage basins has been developed with allowing for reaching the optimal computing time. The boundary elements disposition drawing for the soil unit at the stream with the free area via the barrage with the defected upper (in the middle) and lower dam basins has been developed for the same considerations. The application was created in Delphi 7 visual programming environment. The main calculated outcomes were compared for the potential at the stream with the free area via the barrage with the defected only upper basin made earlier and for the barrage with the defected upper and lower basins. The outcomes show that in the event with the upper dam basin defect there is more wetting of the soil than in the event with the defect of both dam basins. It can be explained by the fact that the liquid stream at the defect lower dam basin will be faster and wetting of the soil will be less. The results of submitted paper can be useful in engineering practice for designing the soil dams.

Key words: liquid filtration, dam, barrage, defected basin, wetting, boundary elements approach.

А.С. Мұратов, А.Т. Калбаева, С.Д. Куракбаева*, А.Т. Калбаева
М.Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан
*e-mail: sevam@mail.ru

Бөгет арқылы сұйықтықтарды сүзу есептерін шешу үшін шекаралық элементтер әдісін қолдану

Жұмыста ықтимал зақымдану жағдайларын ескере отырып, дамба арқылы судың сүзілуін есептеу әдісі мен бағдарламасы қарастырылған. Шекаралық элементтер әдісіне сүйене отырып, су өткізбейтін шекаралық элемент болған кезде бөгет арқылы сұйықтықтың сүзілуін есептеу әдісі ұсынылады. Сандық эксперимент арқылы жоғарғы және төменгі бөфтердің зақымдалуымен дамба арқылы сұйықтықты сүзу кезінде бос шекараның жағдайы алынды және дамбаның тек жоғарғы бөфті зақымданған жағдайда алынған нәтижелермен салыстырмалы талдау жүргізілді. Бос беттің бастапқы орны ерікті түрде анықталды. Оңтайлы есептеу уақытына қол жеткізуді ескере отырып, жоғарғы және төменгі бөфтерді зақымдай отырып, дамба арқылы еркін беті бар сұйықтықты сүзуге арналған шекаралық элементтердің орналасу графиктері салынды. Дәл осындай себептер бойынша бөгеттің ортасында және төменгі бөфінде зақым басталған жағдайда бөгет арқылы еркін беті бар сұйықтықты сүзу үшін шекаралық элементтердің орналасу кестесі жасалды. Delphi 7 визуалды бағдарламалау ортасында бағдарламалық жасақтама жасалды. Алынған нәтижелерден дамбаның тек жоғарғы бөфінің бөгеті зақымданған жағдайда, дамбаның екі бөфінің зақымдануына қарағанда, топырақтың көбірек сулануы байқалады. Бұл дамбаның сынуы мен төменгі бөфті болған кезде су ағыны тезірек жүреді және топырақтың сулануы аз болады. ұсынылған жұмыстың нәтижелері жер бөгеттерін жобалау кезінде инженерлік тәжірибеде пайдалы болуы мүмкін.

Түйін сөздер: сұйықтықты сүзу, дамба, бөгет, қоршау, зақымдалған бассейн, сулау, шекаралық элементтер әдісі.

А.С. Муратов, А.Т. Калбаева, С.Д. Куракбаева*, А.Т. Калбаева
 Южно-Казахстанский университет имени М.Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан
 * e-mail: sevam@mail.ru

Применение метода граничных элементов для решения задач фильтрации жидкостей через дамбу

В работе рассмотрены методика и программа расчета фильтрации воды через дамбу с учетом случаев возможного повреждения. На основе метода граничных элементов предложен метод для расчета фильтрации жидкости через дамбу при наличии водонепроницаемого граничного элемента. Путем численного эксперимента получено положение свободной границы при фильтрации жидкости через дамбу с повреждением верхнего и нижнего бьефов и проведен сравнительный анализ с результатами, полученными в случае повреждения только верхнего бьефа дамбы. Первичное положение свободной поверхности было определено произвольно. Построены графики расположения граничных элементов для фильтрации жидкости со свободной поверхностью через дамбу с повреждением верхнего и нижнего бьефов с учетом достижения оптимального расчетного времени. По тем же соображениям был построен график расположения граничных элементов для фильтрации жидкости со свободной поверхностью через дамбу в случае начала повреждения в центре и нижнего бьефа дамбы. Разработано программное обеспечение в среде визуального программирования Delphi 7. Из полученных результатов видно, что в случае, когда произошло повреждение дамбы только верхнего бьефа дамбы происходит большее смачивание грунта, чем в случае с повреждением обоих бьефов дамбы. Это объясняется тем, что когда происходит облом и нижнего бьефа дамбы поток воды будет идти быстрее и смачиваемость грунта будет меньше. Результаты представленной работы могут быть полезны в инженерной практике при проектировании грунтовых плотин.

Ключевые слова: фильтрация жидкости, дамба, заграждение, поврежденный бассейн, смачивание, метод граничных элементов.

1 Introduction

The liquid filtration via ground barrages plays very significant role in the National economy [1,2]. The data presents that more than half of all casualties caused by destruction of ground barrages occur owing to the liquid filtration.

Thus, when planning and developing the ground barrages it is necessary to conduct filtering calculation, in the course of which the depression bend position in the edifice corpus should be determined; to determine filtering stream gradients and rate of filtering speeds [3,4]; to determine the filtering expenditure via the barrage corpus and its base. Currently there are many suggestions for the filtering calculation techniques via the ground dams [5].

Nevertheless, analysis of situation, when the barrage sequence defects are probable, is of great significance [6,7]. it is more common that the most wash upper and lower dam basins are defected.

The work is aimed at creation of the method and programs to calculate the liquid filtration via the dam, with allowing for the events of their possible damage, and developing the method to calculate the flow of a liquid via the dam in the presence of a watertight fitting member.

2 Problem setting

Let us consider the problem of liquid filtration via the dam with waterproof embedded elements.

The considered medium is smooth and isotropic, then the problem is resulted in the Laplace equation $\Delta u = 0$ regarding the speed potential u with boundary conditions: $q = 0$ on the impermeable boundary (because the bottom is solid ($u_n = 0$)) i.e. on the surface layer of soil and rocks (AF surface in Figure 1); $u = const$ on ABC and EF surfaces of the spongy medium;

$u = x_2$ on DE filtration surface where the liquid goes via the soil and flows downward; $u = x_2$ and $q = 0$ on the free surface (CM and LD). KL is an inset element. Among other things, the exact position of the free area is unknown, and determining it is a part of the process to solve the problem.

The boundary conditions in the problem of liquid filtration via the dam:

$$ABC : u = H_c; \quad q = 0, u = x_2; \quad LD : q = 0, u = x_2;$$

$$DE : u = x_2; \quad EF : u = H_E; \quad AF : q = 0; \quad ML : q = 0, u = x_2.$$

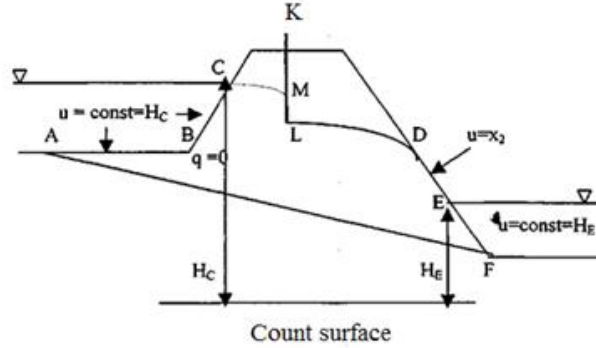


Figure 1 – The boundary conditions in the problem of liquid filtration via the dam

To numerically calculate the problem, the primary free area position is set arbitrarily, and moreover, in all parts of its accepted condition $q = 0$ [8]. Found for each nodular point of the free area value of the potential is correlated with the liquid surface height if the difference between them is more than the maximal admissible error, this difference is added with the algebraic approach to the height of the surface at the respective nodular point and a new iteration is performed. If necessary, the potential values at the internal points are determined after identifying the real free surface position.

3 Mathematical model and results of numerical calculation

The division into boundary elements in the problem of liquid filtration via the dam is shown in Figure 2. Position scheme of boundary elements for the soil unit in liquid filtration via the dam is as follows:

$$j = 1, 6 : q_j = 0; \quad j = 7, 9 : u_j = 0, 1; \quad j = 10, 20 : q_j = 0, \quad u_j = x_2; \quad j = 21, 24 : u_j = 0, 5.$$

The division into boundary elements in the problem of liquid filtration via the dam is shown in Figure 2. The heights' upstream and downstream are 0.5 and 0.1 m respectively, regarding the surface of reference. The boundary conditions are of the following form: $u = 0, 5$ on the surface facing the flow (node 21-24), $q = 0$ on the bottom (impermeable) surfaces (nodes 1-6); $u = 0, 1$ on the surface directed downstream (sites 7-9), and $q = 0$ on the free surface (10-20 nodes). At the primary stage of calculations, the free surface shape was chosen arbitrarily flat and equally arbitrarily identified position of the surface. The ultimate free surface position will be received by iterations. The problem is solved by the boundary elements approach.

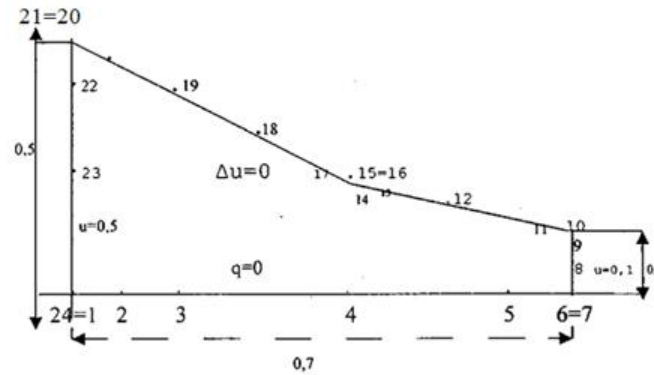


Figure 2 – The scheme of position of boundary elements

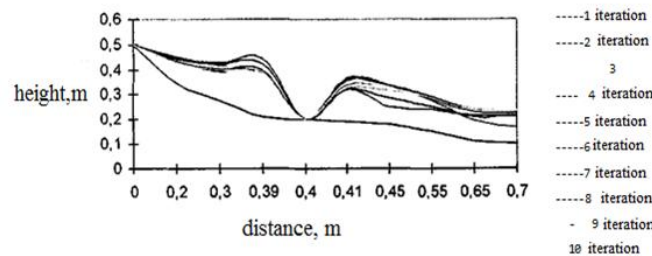


Figure 3 – The preliminary estimated results of the problem of filtration of a liquid via a dam with a waterproof embedded parts

Figure 3 shows the estimated results of the problem of filtration of a liquid via a dam with a waterproof embedded parts. The position of the free area was found after the 11th iteration [7, 8].

During the numerical calculation of the problem, the primary free surface position is determined arbitrarily, and, among other things, in all points of this surface $q = 0$ convention is accepted [9]. The potential value, which was determined for each nodal point of the free surface, is correlated with the liquid surface height [10]. If inequality among them is more than the maximal admissible error, this inequality will be algebraically compiled with the area height in the relevant nodular point and new iteration will be conducted [11–13].

Figure 4 presents the boundary elements division in the issue on the stream with the free area via the unit from spongy material. The upper and lower basins heights form 0,5 and 0,1 accordingly concerning the reference area.

The ultimate free area position was received after the 6th iteration.

Consider in more detail the filtration problem via the edifice with defect in the spongy medium entrance (Figure 5), where ABCCK section is a fragment of the barrage (defected area of the barrage). Respectively the boundary circumstances for the issue of the liquid current via the barrage will be unequal.

Arrangement of the boundary elements for the ground block at the current with the free area via the barrage with the defect in its top point is in Figure 6, with the defect in its middle point is in Figure 7.

Let's regard in details the issue on the filtering via the barrage with the defected upper and

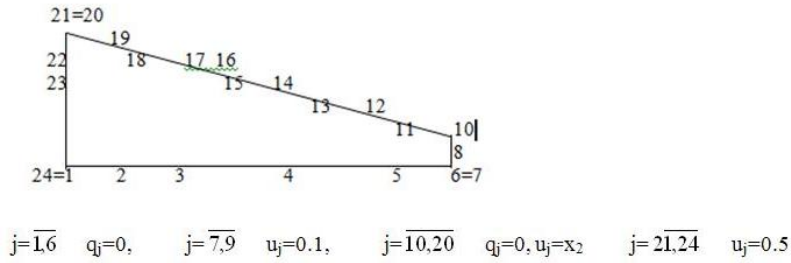
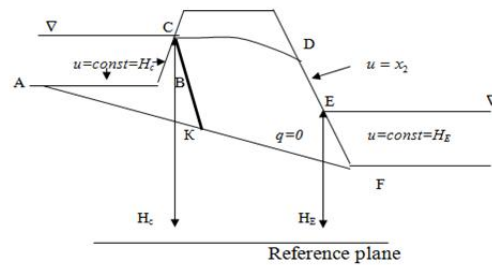


Figure 4 – The boundary elements arrangement drawing for the soil unit



ABC: $u=H_c$, AK: $u=H_c$, CD: $u = x_2, q=0$, DE: $u = x_2$, EF: $u=H_d$, KF: $q=0$

Figure 5 – Boundary conditions in the issue of the liquid current via the barrage with the defect

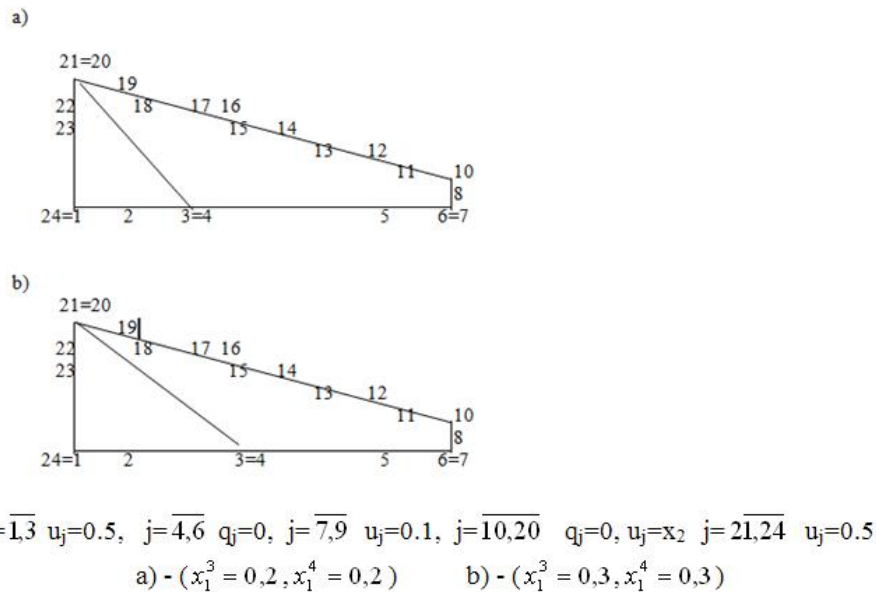


Figure 6 – Arrangement of the boundary elements for the earth block with the damage (beginning of the damage at the top of the dam)

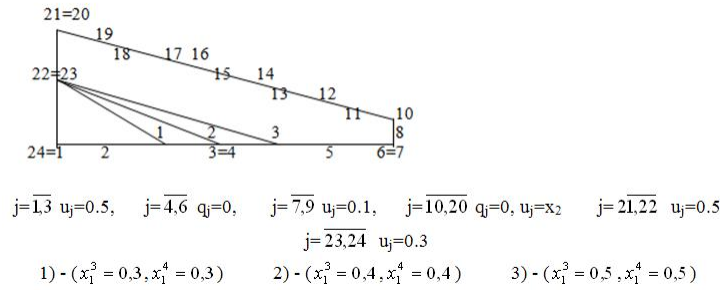


Figure 7 – Arrangement of the boundary elements for the earth block with the damage (beginning of the damage – middle point of the dam)

lower basins of the spongy medium, where ABCK, LEF sections are the upper and lower dam basins' fragments accordingly. Thus, the boundary conditions for the issue on the liquid stream via the barrage will be different (Figure 8).

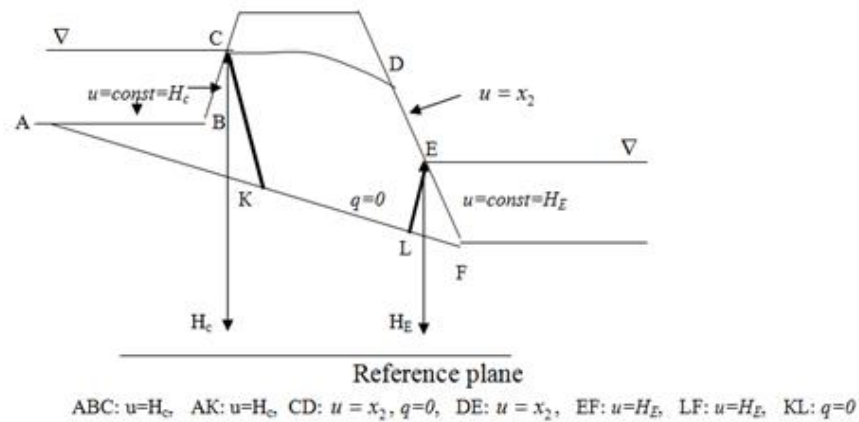


Figure 8 – The boundary conditions in the issue on the liquid stream via the barrage with the defected basins

The boundary elements disposition drawing for the soil unit at the stream with the free area via the barrage with the defected upper (at the top) and lower barrage basins is presented in Figure 9. The boundary elements disposition drawing for the soil unit at the stream with the free area via the barrage with the defected upper (in the middle) and lower dam basins is presented in Figure 10.

The application was created in Delphi 7 visual programming environment. The program comprises all necessary data and resolutions of the issue. Figures 11 and 12 show corresponding betwixt the calculated outcomes for the potential at the stream with the free area via the barrage with the defected only upper basin made earlier and the barrage with the defected upper and lower basins.

Lines nomenclatures for Figures 11 and 12 are as follows:

_____ an event of the undefected dam;

..... an event with the defected upper dam basin ($x_1^3 = 0,3; x_1^4 = 0,3$);

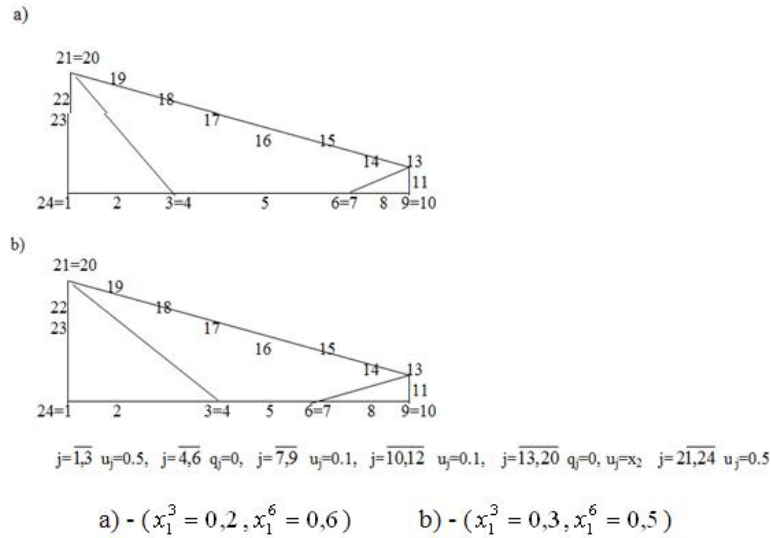


Figure 9 – The boundary elements disposition draw for the soil unit with the defected basins (beginning of the defect at the barrage top)

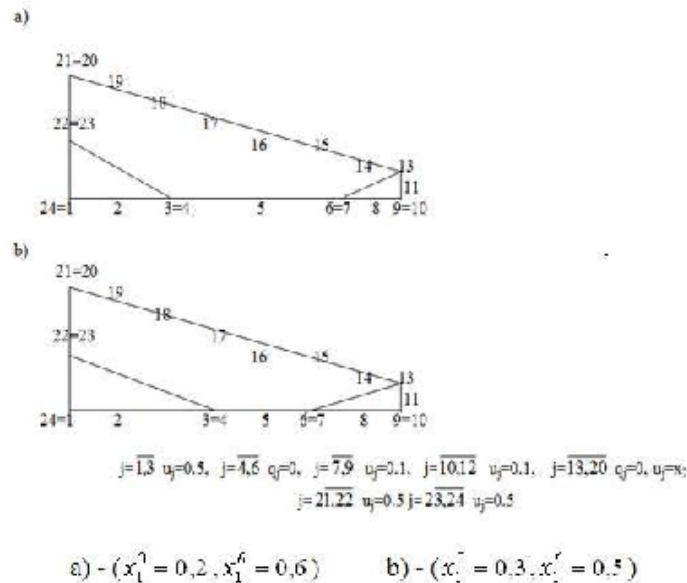


Figure 10 – The boundary elements disposition draw for the soil unit with the defected basins (beginning of the defect in the barrage middle)

- an event with the defected upper dam basin ($x_1^3 = 0, 4; x_1^4 = 0, 4$);
- an event with the defected lower and upper dam basins ($x_1^3 = 0, 2; x_1^6 = 0, 6$);
- · · - · · an event with the defected lower and upper dam basins ($x_1^3 = 0, 3; x_1^6 = 0, 5$).

The outcomes of the modeling and computer test present potential of considerable effect of the barrage washout areas on the wetted barrage capacity and, adequately, on the filtrate consuming even at concerning small defect sizes [14].

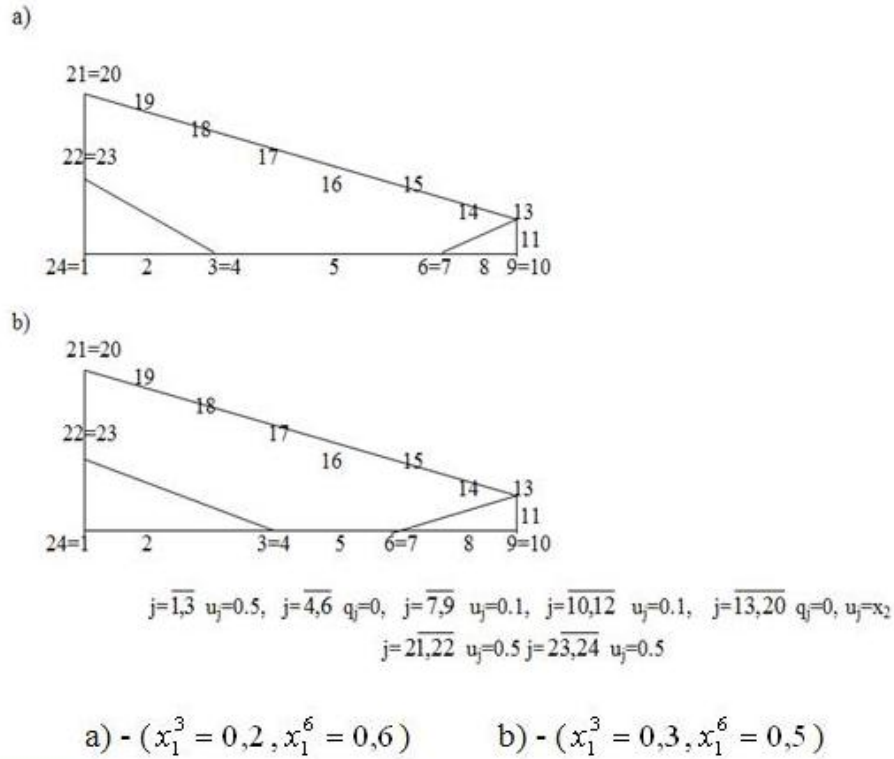


Figure 11 – Corresponding of the calculated outcomes for the potential at the stream with the free area via the barrage with the defect in the upper basin top only and via the barrage with the defect in the upper and lower basins top

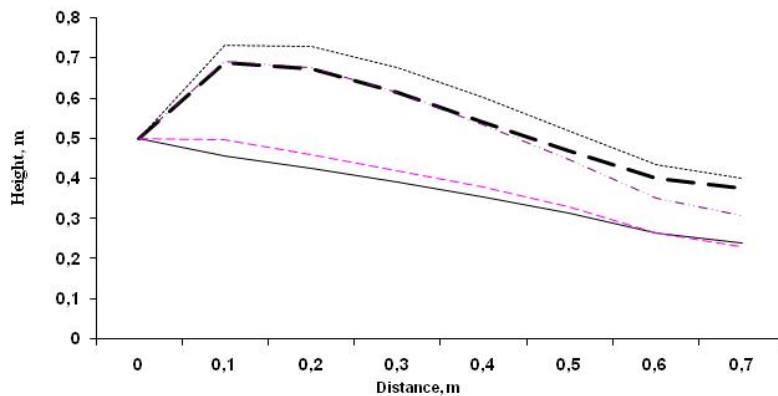


Figure 12 – Corresponding of the calculated outcomes for the potential at the stream with the free area via the barrage with the defect in the upper basin middle only and the barrage with the defect in the upper and lower basins middle

4 Conclusion

Using the numeric test, the free boundary position at the liquid filtration via the dam with the defected upper and lower basins was received and provisional analysis for comparing with the outcomes, received in the event of the defect of the upper dam basin only, was conducted. The outcomes show that in the event with the upper dam basin defect there is more wetting of the soil than in the event with the defect of both dam basins. It can be explained by the fact that the liquid stream at the defect lower dam basin will be faster and wetting of the soil will be less [15].

References

- [1] Polubarinova-Kochina P.Y., *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod [Theory of ground water movement]* (M.: Science, 1977, 667 pp.) [in Russian]
- [2] Shirinskiy A.M., Plyushkin S.A., Brener A.M., "The method of calculation of process of filtration of two-phase fluids in a porous medium", *Theoretical foundations of chemical engineering* **15**(1981), 302.
- [3] Shirinskiy A.M., Plyushkin S. A. and Brener A.M., "The study of filtration of two-phase fluids in a centrifugal field", *Theoretical foundations of chemical engineering* **14**(1980), 474.
- [4] Brebbia C., Telles Zh., Vroubel L., *Metody granichnykh elementov [Boundary elements methods]* (M.: Mir, 1987, 524 pp.) [in Russian].
- [5] Connor J., Brebbia C.A., *Finite elements techniques for fluid flow* (Butterworths, London, 1976).
- [6] Kalbayeva A.T., Kurakbayeva S.D., Kurakbayev A.D. and Brener A.M., "Mathematical model and software for methods of calculating liquid filtration through the soil dams", *Journal "Herald of KazNRTU Almaty* **115:3**(2016), 574-578.
- [7] Kalbayeva A.T., Kurakbayev A.D., Brener A.M., Usenova A.Zh. and Kurakbayeva S.D., "Methods for calculating the water filtration through the dam with the damaged upper and lower pools", *Journal "Herald of KazNRTU Almaty* **119:1**(2017), 91-95.
- [8] Vo Trong Nguen, "Flow through filters in embankment dams" (Thesis of the degree of PhD. University of Wollongong, 2012), 287 pp.
- [9] Yangiev A., Garrapov F. and Adjimuratov D. "Filtration process in earth fill dam body and its chemical effect on piezometers" (E3S Web Conf. **97**, 2019, XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019), P. 1-7).
- [10] Kalbayeva A.T., Berdaliyeva G.A. "Chislennoe issledovanie fil'tracii zhidkosti cherez dambu s vodonepronicaemymi zakladnymi elementami [Numerical investigation of the water filtration through the dam with water-impermeable filling elements]", *Collection of scientific works of aspirants, candidates for a master's degree, trainee-researchers of M. Auezov SKSU. Shymkent* **3**(2002), 8-11 [in Russian].
- [11] Volkov I.M., Kononenko P.F. and Fedichkin I.K., *Gidrotechnicheskie sooruzheniya [Hydrotechnical structures]* (M.: Kolos, 1968, 464 pp.) [in Russian].
- [12] Niedrige V.P., *Gidrotekhnicheskie sooruzheniya. Spravochnik proektirovshchika [Hydrotechnical structures. Designer's reference book]* (Under the General ed.: M.: SI, 1983, 543 pp.) [in Russian].
- [13] Gogoberidze M.I. et al., *Obobshchenie dannykh statisticheskogo analiza avariij i incidentov v aspekte nadezhnosti plotin [Generalization of data from statistical analysis of accidents and incidents in the aspect of dam reliability]* (Reports AN Gruz. SSR, 1977, 86, №3) [in Russian].
- [14] Kalbaeva A.T., Brener A.M., Kurakbaeva S.D., "Primenenie metoda granichnykh elementov dlya opisaniya fil'tracii vody cherez dambu s vodonepronicaemym zakladnym elementom v sluchae ortotropnoj sredy [Application of the boundary element method for describing water filtration through a dam with a waterproof embedded element in the case of an orthotropic environment]", *Science and education of Southern Kazakhstan* **68:3**(2008), 147-151 [in Russian].
- [15] Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Serimbetov M.A., "Primenenie metoda granichnykh elementov dlya resheniya zadach fil'tracii vody cherez dambu [Application of the boundary element method for solving problems of water filtration through a dam]", *Science and education of Southern Kazakhstan* **81:2**(2010), 84-87 [in Russian].

А.С. Жұмали^{1,*} , В.Н. Косов² , Б.А. Сатенова¹ , А. Асылбекулы¹ 

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: ainura.z89@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ДАВЛЕНИЯХ И СОСТАВАХ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

В данной статье рассматривается математическое и компьютерное моделирование влияния давления и состава трехкомпонентной газовой смеси на концентрационную конвекцию на основе решения системы уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности и уравнений для концентрации компонентов трехкомпонентной газовой смеси. Исследуется процесс, когда тяжелый газ и легкий газ находятся в верхней части ограниченной полости формы параллелепипеда, а средний газ находится в нижней части. Численные расчеты были проведены для систем $0.55Ar+0.45He-N_2$, $0.66Ar+0.34He-N_2$, $0.55CO_2+0.45He-N_2$ на равномерной прямоугольной сетке. В виде рисунков была представлена динамика изменения концентраций аргона и диоксида углерода для этих систем при различных значениях давления. Результаты численного исследования получены с помощью 3D численного алгоритма, осуществленного на базе D3Q27 модели метода решеточных уравнений Больцмана (LBM) в аппроксимации Батнагара-Гросса-Крука (BGK). Проведенные расчеты показывают, что в трехкомпонентных газовых смесях при определенных давлениях и составах возможен сложный массоперенос, связанный с возникновением конвективных возмущений. Для проверки численного алгоритма, результаты, полученные в данной статье, были сравнены с результатами, полученными экспериментальным путем, и показали хорошее согласование.

Ключевые слова: Диффузия, концентрационная конвекция, давление, неустойчивость, решеточный метод Больцмана.

А.С. Жұмәлі^{1,*}, В.Н. Косов², Б.А. Сатенова¹, А. Асылбекұлы¹

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: ainura.z89@gmail.com

Үшкомпонентті газ қоспасындағы әр түрлі қысым мен құрамға байланысты концентрациялық конвекцияны моделдеу

Бұл мақалада Навье–Стокс теңдеулер жүйесі, үзіліссіздік теңдеуі және үш компонентті қоспа компоненттерінің концентрацияларын сипаттауға арналған теңдеулерді шешу негізінде үшкомпонентті газ қоспасындағы әр түрлі қысым мен қоспа құрамы өзгерісінің концентрациялық конвекция үрдісіне әсерін математикалық және компьютерлік моделдеу баяндалады. Ауыр газ және жеңіл газ параллелепипед формасындағы шектеулі ортаның жоғарғы жағында, ал орташа тығыздықтағы газ төменгі жағында орналасқан жағдайдағы процесс зерттеледі. Сандық есептеулер $0.55Ar+0.45He-N_2$, $0.66Ar+0.34He-N_2$ және $0.55CO_2+0.45He-N_2$ жүйелері үшін бірқалыпты тікбұрышты торда жүргізілді. Қысымның әр түрлі мәндері берілген кездегі аталмыш жүйелер үшін аргон және көміртек диоксиды концентрацияларының өзгеріс динамикасы суреттер түрінде көрсетіледі. Сандық зерттеу нәтижелері Батнагар-Гросс-Крук (BGK) аппроксимациясы қолданылған Больцман торлы теңдеулері әдісінің (LBM) D3Q27 моделі негізінде құрылған 3D сандық алгоритмі көмегімен алынған. Жүргізілген есептеулер бойынша, үшкомпонентті газ қоспаларында белгілі бір қысым мен құрам үшін конвективті ауытқулармен байланысты күрделі массатаралу болу мүмкіндігі анықталды. Сандық алгоритмді тексеру мақсатында бұл мақаланы жазу барысында алынған нәтижелер эксперименталды жолмен алынған нәтижелермен салыстырылып отырып, жақсы келісім бергенін атап өту керек.

Түйін сөздер: диффузия, концентрациялық конвекция, қысым, орнықсыздық, Больцман торлы әдісі.

A.S. Zhumali^{1,*}, V.N. Kossov², B.A. Satenova¹, A. Assylbekuly¹

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: ainura.z89@gmail.com

Simulation of concentration convection at different pressures and compositions of a three-component gas mixture

This article discusses the mathematical and computer modeling of the influence of pressure and composition of a three-component gas mixture on concentration convection based on the solution of the Navier-Stokes equations system, the continuity equation and equations for the concentration of the mixture components. The process is investigated when heavy gas and light gas are in the upper part of the parallelepiped, and gas with intermediate density in the lower part. Numerical calculations were carried out for the systems $0.55Ar+0.45He-N_2$, $0.66Ar+0.34He-N_2$, $0.55CO_2+0.45He-N_2$ on a uniform rectangular grid. The dynamics of changes in the concentrations of argon and carbon dioxide for these systems at various pressures were presented in the form of figures. The results of the numerical study were obtained using a 3D numerical algorithm implemented on the basis of the D3Q27 model Lattice Boltzmann equations method with Batnagar-Gross-Crook (BGK) approximation. The performed calculations show that complex mass transfer is possible, associated with the occurrence of convective disturbances in three-component gas mixtures at certain pressures and compositions. To test the numerical algorithm, the results obtained in this article were compared with the results obtained experimentally and showed good agreement.

Key words: diffusion, concentration convection, pressure, instability, Lattice Boltzmann method.

1 Введение

Исследование концентрационной гравитационной конвекции в многокомпонентной газовой смеси является актуальной задачей на сегодняшний день. Л.Миллер, Т.Сперлинг и Е.Мэйсон [1] при исследовании термоэффекта в трехкомпонентных газовых смесях в вертикальных диффузионных каналах обнаружили, что изменение температуры вблизи границы раздела газов для ряда систем имело вид нерегулярных колебаний, хотя ожидалось ее монотонное нарастание. Такое поведение газовых смесей при диффузии связано с инверсией плотности вызванной неустойчивостью механического равновесия смеси. Дальнейшее детальное исследование диффузионной неустойчивости с помощью экспериментальных методов в работах [2–6] показало существенное влияние на интенсивность конвективного смешения таких параметров как давление, исходный состав смеси, геометрических характеристик диффузионного канала и угла его наклона.

При определенных ситуациях связанных с увеличением числа компонентов газовой смеси, изменении геометрических характеристик каналов, и т.д. проведение экспериментов становится затруднительным и дорогостоящим. В таких случаях важное значение приобретают численные методы исследования. Существует множество работ по исследованию процесса с применением различных численных методов [7–10]. Все эти работы имеют общий характер - описываются лишь эффекты безразмерных величин, таких как число Прандтля, число Рэлея, число Грасгофа, число Льюиса и т.д., на исследуемый процесс. Однако зависимость этих величин от термодинамических параметров не учитываются. Основное отличие этих работ – выбор методов численной реализации.

Целью данной работы является описание численным путем влияния давления и состава газовой смеси исследуемого объекта на процесс концентрационной конвекции. До настоя-

щего времени авторами работ [11, 12] было проведено 2D численное моделирование влияния указанных выше термодинамических параметров на интенсивность конвективного смешения, вызванного неустойчивостью механического равновесия исследуемой системы. Для описания рассматриваемого физико-химического процесса наиболее точно, в данной работе проводится 3D численное моделирование. Оно осуществляется на базе D3Q27 модели решеточного метода Больцмана (LBM) [13].

Для проверки численного алгоритма, результаты, полученные в данной статье, были сравнены с результатами, полученными экспериментальным путем, и показали хорошее согласование.

2 Постановка задачи

Исследуемый процесс рассматривается в ограниченной области в форме параллелепипеда (Рисунок 1). В верхней части параллелепипеда находятся легкий газ и тяжелый газ, а в нижней части – средний по плотности газ. Числа 1, 2 и 3 в рисунке 1 обозначают легкий, тяжелый и средний газы, соответственно.

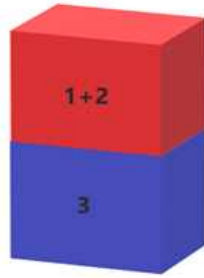


Рисунок 1 – Целевая область

Система возмущенных уравнений в трехмерном пространстве в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) -$$

$$-g [1 + \beta_{C_1} (C_1 - C_1^r) + \beta_{C_2} (C_2 - C_2^r)],$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + u \frac{\partial C_1}{\partial x} + v \frac{\partial C_1}{\partial y} + w \frac{\partial C_1}{\partial z} = D_{11}^* \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} \right) + D_{12}^* \left(\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} + u \frac{\partial C_2}{\partial x} + v \frac{\partial C_2}{\partial y} + w \frac{\partial C_2}{\partial z} = D_{21}^* \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} \right) + D_{22}^* \left(\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} \right),$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1,$$

где u, v, w – компоненты скорости, p – давление, ρ – плотность, T – температура, C_i – концентрация i -го компонента, ν_f – кинематическая вязкость, D_{ij}^* – практические коэффициенты диффузии, t – время, α – коэффициент термодиффузии, C_i^r – значение эталонной концентрации i -го компонента, β_{C_1} – коэффициент объемного расширения для C_1 , β_{C_2} – коэффициент объемного расширения для C_2 . Связь практических коэффициентов диффузии D_{ij}^* с коэффициентами взаимной диффузии D_{ij} [14] определяется соотношениями:

$$D_{11}^* = \frac{D_{13} [C_1 D_{32} + (C_2 + C_3) D_{12}]}{D}, \quad D_{12}^* = -\frac{C_1 D_{23} [D_{12} - D_{13}]}{D},$$

$$D_{22}^* = \frac{D_{23} [C_2 D_{13} + (C_1 + C_2) D_{12}]}{D}, \quad D_{21}^* = -\frac{C_2 D_{13} [D_{12} - D_{23}]}{D}, \quad (1)$$

$$D = C_1 D_{23} + C_2 D_{13} + C_3 D_{12}.$$

Система уравнений имеет следующие начальные и граничные условия:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq W, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = X_3, \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq W, \quad 0 \leq z \leq H/2$$

$$C_1 = X_1, \quad C_2 = X_2, \quad C_3 = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq W, \quad H/2 \leq z \leq H$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq y \leq W, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = L, \quad 0 \leq y \leq W, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = W, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq W$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = H, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq W$$

Система уравнений может быть приведена к безразмерному виду с использованием следующих безразмерных величин:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{W}, \quad z^* = \frac{z}{H},$$

$$u^* = \frac{u}{U_0}, \quad v^* = \frac{v}{U_0}, \quad w^* = \frac{w}{U_0}, \quad U_0 = \frac{\alpha}{H};$$

$$C_i^* = \frac{C_i - C_i^r}{\Delta C_i}, \quad p^* = \frac{pL^2}{\rho\alpha^2},$$

$$Le_{ij} = \frac{\alpha}{D_{ij}^*}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu_f}{\alpha}, \quad (2)$$

$$Gr_{C_1} = \frac{g\beta_{C_1}\Delta C_1 H^3}{\nu_f^2}, \quad Gr_{C_2} = \frac{g\beta_{C_2}\Delta C_2 H^3}{\nu_f^2}, \quad (3)$$

$$N = \frac{Gr_{C_2}}{Gr_{C_1}}, \quad t^* = \frac{\alpha t}{H^2}.$$

где u^* , v^* , w^* – безразмерные компоненты скорости, U_0 – характерная скорость, p^* – безразмерное давление, C_i^* – безразмерная концентрация i -го компонента, $\Delta C_i = C_i^{\max} - C_i^{\min}$, C_i^{\max} – максимальное значение концентрации i -го компонента, C_i^{\min} – минимальное значение концентрации i -го компонента, t^* – безразмерное время, Pr – число Прандтля, Le – число Льюиса, Gr – число Грасгофа.

Уравнения принимают следующий безразмерный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0, \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right), \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right), \\ \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - Gr_{C_1} \text{Pr} (C_1^* + N C_2^*), \\ \frac{\partial C_1^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C_1^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_1^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial C_1^*}{\partial z^*} &= \\ &= \frac{1}{Le_{11}} \left(\frac{\partial^2 C_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{1}{Le_{12}} \left(\frac{\partial^2 C_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_2^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 C_2^*}{\partial z^{*2}} \right), \\ \frac{\partial C_2^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C_2^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_2^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial C_2^*}{\partial z^*} &= \\ &= \frac{1}{Le_{21}} \left(\frac{\partial^2 C_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{1}{Le_{22}} \left(\frac{\partial^2 C_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_2^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 C_2^*}{\partial z^{*2}} \right), \\ \sum_{i=1}^3 (C_i^* \Delta C_i + C_i^r) &= 1. \end{aligned}$$

Диффузионные члены $\frac{1}{Le_{12}} \left(\frac{\partial^2 C_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_2^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 C_2^*}{\partial z^{*2}} \right)$ и $\frac{1}{Le_{21}} \left(\frac{\partial^2 C_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial z^{*2}} \right)$ в правой части уравнений концентрации компонентов будут рассматриваться в качестве источников. Обозначим их через q_1 и q_2 соответственно.

Безразмерные начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0 \quad &\text{при } t^* = 0, \quad 0 \leq x^* \leq 1/2, \quad 0 \leq y^* \leq 1/6, \quad 0 \leq z^* \leq 1 \\ C_1^* = 0, \quad C_1^* = 0, \quad C_1^* = 1, \quad &\text{при } t^* = 0, \quad 0 \leq x^* \leq 1/2, \quad 0 \leq y^* \leq 1/6, \quad 0 \leq z^* \leq 1/2 \\ C_1^* = 1, \quad C_2^* = 1, \quad C_3^* = 0, \quad &\text{при } t^* = 0, \quad 0 \leq x^* \leq 1/2, \quad 0 \leq y^* \leq 1/6, \quad 1/2 \leq z^* \leq 1 \\ u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0, \quad &\frac{\partial C_i^*}{\partial x^*} = 0, \quad \text{при } x^* = 0, \quad 0 \leq y^* \leq 1/6, \quad 0 \leq z^* \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0, \quad \frac{\partial C_i^*}{\partial x^*} = 0, \quad \text{при } x^* = 1/2, \quad 0 \leq y^* \leq 1/6, \quad 0 \leq z^* \leq 1 \\
 u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0, \quad \frac{\partial C_i^*}{\partial y^*} = 0, \quad \text{при } y^* = 0, \quad 0 \leq x^* \leq 1/2, \quad 0 \leq z^* \leq 1 \\
 u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0, \quad \frac{\partial C_i^*}{\partial y^*} = 0, \quad \text{при } y^* = 1/6, \quad 0 \leq x^* \leq 1/2, \quad 0 \leq z^* \leq 1 \\
 u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0, \quad \frac{\partial C_i^*}{\partial z^*} = 0, \quad \text{при } z^* = 0, \quad 0 \leq x^* \leq 1/2, \quad 0 \leq y^* \leq 1/6 \\
 u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0, \quad \frac{\partial C_i^*}{\partial z^*} = 0, \quad \text{при } z^* = 1, \quad 0 \leq x^* \leq 1/2, \quad 0 \leq y^* \leq 1/6
 \end{aligned}$$

3 Численный метод

Численное решение в данной работе строится на D3Q27 модели решеточного метода Больцмана [13]. Решеточное уравнение Больцмана в аппроксимации Батнагара-Гросса-Крука (BGK) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f_i(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\vec{x}, t) &= \Delta t \left[-\frac{f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_f} + F_i \right] \\
 h_{i,\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - h_{i,\alpha}(\vec{x}, t) &= \Delta t \left[-\frac{h_{i,\alpha}(\vec{x}, t) - h_{i,\alpha}^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_{h,\alpha}} + Q_{i,\alpha} \right]
 \end{aligned}$$

где $f_i, h_{i,\alpha}$ – функции распределения скорости и концентрации компонентов, \vec{e}_i – дискретная решеточная скорость, $\tau_f, \tau_{h,\alpha}$ – время релаксации, F_i – компонент внешней силы, $Q_{i,\alpha}$ отвечает за источник $q_\alpha, \Delta t$ – решеточный шаг по времени, $f_i^{eq}, h_{i,\alpha}^{eq}$ – равновесная функция распределения скорости и концентрации соответственно.

Равновесные функции определены следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 f_i^{eq} &= \omega_i \rho \left[1 + 3 \frac{\vec{e}_i \vec{u}^{eq}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\vec{e}_i \vec{u}^{eq})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\vec{u}^{eq} \vec{u}^{eq}}{c^2} \right] \\
 h_{i,\alpha}^{eq} &= \omega_i C_\alpha \left[1 + 3 \frac{\vec{e}_i \vec{u}^{eq}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\vec{e}_i \vec{u}^{eq})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\vec{u}^{eq} \vec{u}^{eq}}{c^2} \right]
 \end{aligned}$$

где $c = \Delta x / \Delta t$, Δx и Δt решеточный шаг по пространству и времени, которые равны единице. Далее показаны значения весов по всем направлениям:

$$\omega_i = \begin{cases} 8/27, & i = 0, \\ 2/27, & i = 1 - 6, \\ 1/54, & i = 7 - 18, \\ 1/216, & i = 19 - 26, \end{cases}$$

В модели D3Q27 (Рисунок 2) дискретные скорости вычисляются по следующей формуле:

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0, 0, 0)c, & i = 0, \\ (\pm 1, 0, 0)c, (0, \pm 1, 0)c, (0, 0, \pm 1)c, & i = 1 - 6, \\ (\pm 1, \pm 1, 0)c, (0, \pm 1, \pm 1)c, (\pm 1, 0, \pm 1)c, & i = 7 - 18, \\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1)c, & i = 19 - 26, \end{cases}$$

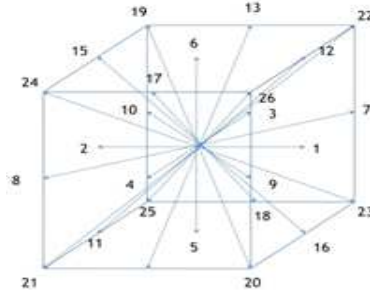


Рисунок 2 – Модель D3Q27

В данной работе для аппроксимации внешней силы $\vec{F} = \rho_r g [\beta_{C_1} (C_1 - C_r) + \beta_{C_2} (C_2 - C_r)]$ в LBM используется схема, предложенная Гуо и др. [15]:

$$F_i = \omega_i \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau_f} \right) \left[\frac{\vec{e}_i - \vec{u}}{c_s^2} + \frac{\vec{e}_i(\vec{e}_i \cdot \vec{u})}{c_s^4} \right] \cdot \vec{F}$$

Для аппроксимации источников q_α в LBM используется схема, предложенная Сета [16]:

$$Q_{i,\alpha} = \omega_i \left(1 - \frac{1}{2\tau_{h,\alpha}} \right) q_\alpha$$

Уравнение эволюции делится на два шага, столкновение и распространение:

1. $\tilde{f}_i(\vec{x}, t) = f_i(\vec{x}, t) + \Delta t \left(-\frac{f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_f} + F_i \right),$
 $\tilde{h}_{i,\alpha}(\vec{x}, t) = h_{i,\alpha}(\vec{x}, t) + \Delta t \left(-\frac{h_{i,\alpha}(\vec{x}, t) - h_{i,\alpha}^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_{h,\alpha}} + Q_{i,\alpha} \right),$
2. $\bar{f}_i(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_i(\vec{x}, t),$
 $\bar{h}_{i,\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{h}_{i,\alpha}(\vec{x}, t).$

После второго шага необходимо обновить макропараметры (плотность, скорость, концентрация) по следующим формулам:

$$\rho = \sum_{i=0}^{26} \bar{f}_i, \quad \rho \vec{u} = \sum_{i=0}^{26} \bar{f}_i \vec{e}_i + \frac{\Delta t}{2} \vec{F}, \quad C_\alpha = \sum_{i=0}^{26} \left(\bar{h}_{i,\alpha} + \frac{\Delta t}{2} Q_{i,\alpha} \right).$$

Для замыкания системы уравнений были использованы следующие граничные условия. Условие нулевой скорости для всех стенок:

$$\bar{f}_i(\vec{x}_w, t + \Delta t) = \bar{f}_{-i}(\vec{x}_w, t + \Delta t), \quad \vec{e}_i \cdot \vec{n} > 0,$$

Условие Неймана для концентрации на всех стенках:

$$\bar{h}_{i,\alpha}(\vec{x}_w, t + \Delta t) = \bar{h}_{-i,\alpha}(\vec{x}_w, t + \Delta t), \quad \vec{e}_i \cdot \vec{n} > 0.$$

4 Результаты и обсуждение

Численные расчеты были проведены для систем $0.55Ar+0.45He-N_2$, $0.66Ar+0.34He-N_2$, $0.55CO_2+0.45He-N_2$ на равномерной прямоугольной сетке размером $30 \times 10 \times 60$. Числа перед химическими элементами соответствуют концентрациям компонентов в мольных долях в исследуемых газовых смесях. Давление выбиралось в диапазоне $p \approx 0.5 \div 2.5$ при $T = 298 K$. Шаг по времени принимался равным 0.001 секунд. Вычислительная область имеет форму параллелепипеда, длина, ширина и высота которого равны 0.025 м, 0.003 м и 0.17 м соответственно. Необходимые физические параметры компонентов газовых смесей указаны в Таблице 1.

Таблица 1 – Физические параметры компонентов газовых смесей при $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 298 K$

Компоненты	ρ^0 , (кг/м ³)	η^0 , 10 ⁻⁵ (Па с)	D_{12}^0 , 10 ⁻⁴ (м ² /с)	D_{13}^0 , 10 ⁻⁴ (м ² /с)	D_{23}^0 , 10 ⁻⁴ (м ² /с)	Молярная масса m , 10 ⁻³ (кг/моль)
CO ₂ (2)+ He(1) – N ₂ (3)						
CO ₂	1.9753	1.463				44.009
He	0.18	1.946	0.584	0.713	0.165	4.003
N ₂	1.25	1.766				28.016
Ar(2) + He(1) – N ₂ (3)						
Ar	1.662	2.215				39.944
He	0.18	1.946	0.708	0.7437	0.221	4.003
N ₂	1.125	1.766				28.016

Обозначим через $Kp = \frac{p_0}{p}$ и $Kt = \frac{T}{T_0}$ поправочные коэффициенты по давлению и температуре, соответственно. Здесь, p_0 и T_0 – давление и температура при нормальных условиях ($p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 298 K$), p и T – давление и температура опыта. С помощью поправочных коэффициентов находятся параметры эксперимента. Плотность компонентов к параметрам опыта приводится по формуле:

$$\rho_i = \frac{\rho_i^0}{Kp Kt},$$

где ρ_i^0 – плотность i -го компонента при нормальных условиях. Динамическая сдвиговая вязкость к параметрам опыта приводится по формуле:

$$\eta_i = \eta_i^0 Kt^{\frac{1}{2}},$$

где η_i^0 – динамическая вязкость i -го компонента при нормальных условиях. Формула для нахождения кинематической вязкости:

$$v_f = \sum_i C_i \frac{\eta_i}{\rho_i},$$

где C_i - концентрация i -го компонента. Взаимные коэффициенты диффузии опыта определяются следующими формулами:

$$D_{12} = D_{12}^0 K t^{\frac{3}{2}} K p, D_{13} = D_{13}^0 K t^{\frac{3}{2}} K p, D_{23} = D_{23}^0 K t^{\frac{3}{2}} K p,$$

где D_{ij}^0 - коэффициенты диффузии при нормальных условиях. Практические коэффициенты диффузии D_{ij}^* находятся соотношениями (1). Коэффициенты объемного расширения вычисляются следующим образом:

$$\beta_{C_1} = \frac{m_1 - m_3}{H} (C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3), \beta_{C_2} = \frac{m_2 - m_3}{H} (C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3),$$

где m_i - молярная масса i -го компонента.

С помощью вышеуказанных параметров опыта можно вычислить необходимые безразмерные величины (2), (3). На рисунках 3-5 представлены результаты численного моделирования диффузионного и конвективного смешения для систем $0.55Ar+0.45He-N_2$, $0.66Ar+0.34He-N_2$, $0.55CO_2+0.45He-N_2$. Экспериментальное исследование этих систем описано в работах [3; 5; 6]. На рисунке 3 представлены изоповерхности концентрации аргона для системы $0.55Ar+0.45He-N_2$ при различных значениях давления. В системе наблюдается диффузионный процесс. На рисунке 4 изображена динамика изменения концентрации аргона для системы $0.66Ar+0.34He-N_2$. Сравнение рисунков 3 и 4 показывает, что с увеличением количества компонента с наибольшей молярной массой в исходном составе смеси, интенсивность его переноса становится значительно больше, чем для системы с меньшим исходным содержанием аргона. На рисунке 5 показана динамика изменения концентрации тяжелого газа для тройной системы, где место аргона замещает диоксид углерода. В этом случае заметно, что увеличение давления влияет на стабильность механического равновесия. Это происходит в связи с тем, что молярная масса диоксида углерода больше массы аргона.

Таким образом, проведенные эксперименты показали, что в трехкомпонентных газовых смесях при определенных давлениях и составах возможно возникновение сложного массопереноса, связанного с возникновением конвективных возмущений.

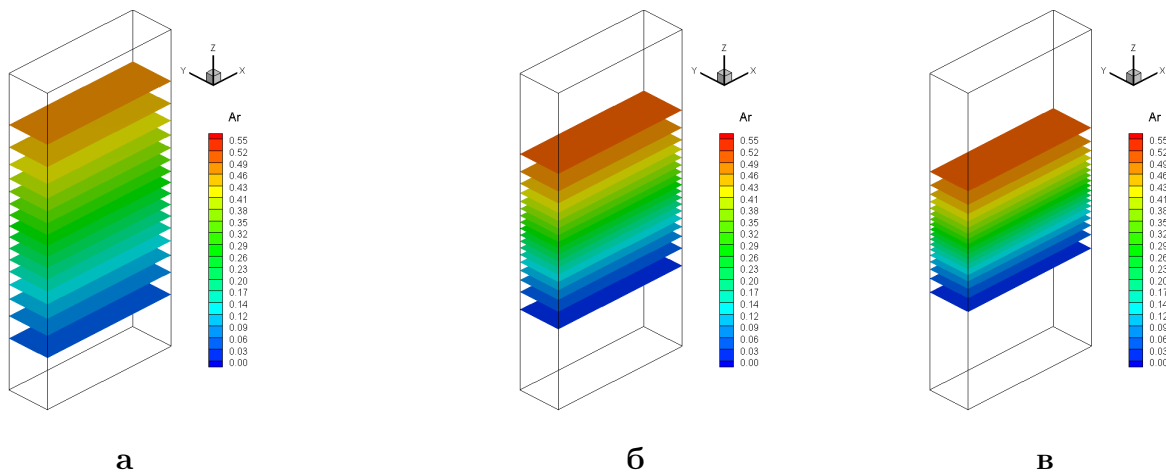


Рисунок 3 – Динамика изменения концентрации в системе $0.55Ar+0.45He-N_2$ при: а) $P=0.5$ МПа; б) $P=1.5$ Мпа; в) $P=2.5$ Мпа.

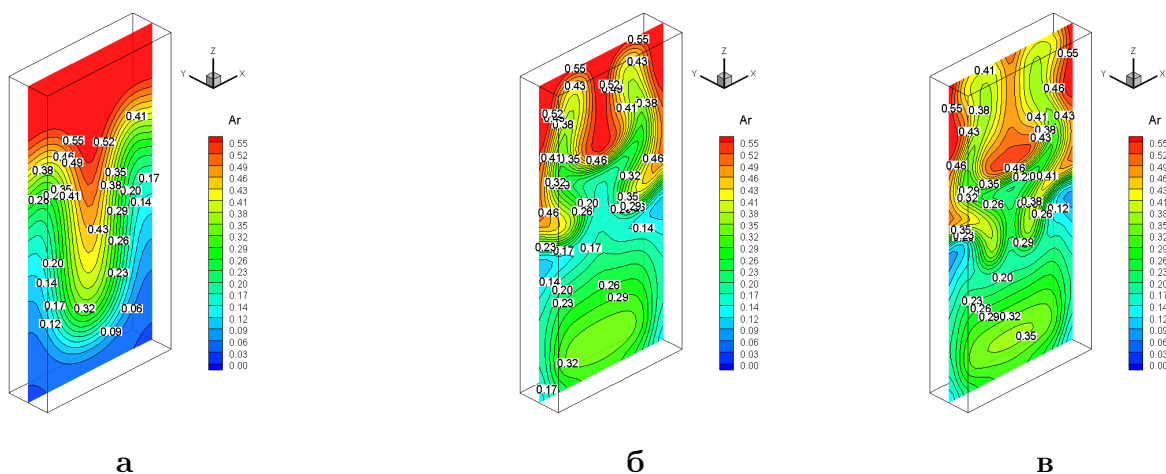


Рисунок 4 – Динамика изменения концентрации в системе $0.66Ar+0.34He-N_2$ при: а) $P=0.5$ МПа; б) $P=1.5$ МПа; в) $P=2.5$ МПа.

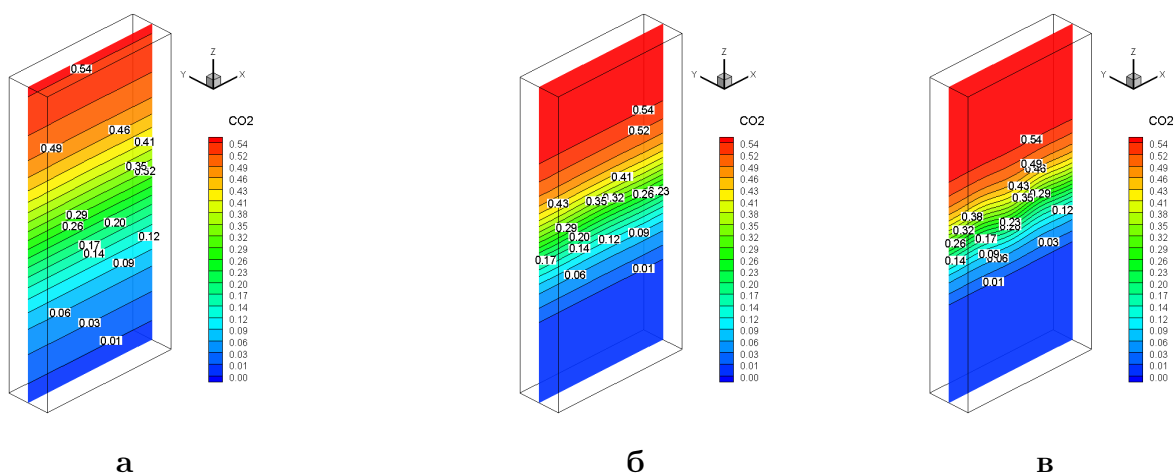


Рисунок 5 – Динамика изменения концентрации в системе $0.55CO_2+0.45He-N_2$ при: а) $P=0.5$ МПа; б) $P=1.5$ МПа; в) $P=2.5$ МПа.

5 Заключение

На основе проведенных исследований были сделаны нижеследующие выводы.

Была разработана математическая модель для моделирования сложного массопереноса в тройных газовых смесях при различных давлениях.

Был разработан 3D численный алгоритм на базе D3Q27 модели решеточного метода Больцмана для моделирования массопереноса компонентов концентрации в ограниченной полости формы параллелепипеда.

На основе численного моделирования трехкомпонентных смесей $0.55Ar+0.45He-N_2$, $0.66Ar+0.34He-N_2$, $0.55CO_2+0.45He-N_2$, исследованы влияние давления и исходного состава компонентов на устойчивость диффузионного процесса.

Таким образом, поставленные задачи выполнены полностью.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проекта Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант № AP08053154).

Список литературы

- [1] Miller L., Spurling T.H., Mason E.A. Instabilities in ternary diffusion // *Phys. Fluids*. – 1967. – №8(10). – P. 1809-1811.
- [2] Жаврин Ю.И., Косов Н.Д., Белов С.М., Семидоцкая Н.И. О применении метода эффективных коэффициентов к описанию диффузии в многокомпонентных газовых смесях при повышенных давлениях // *Тепломассоперенос в жидкостях и газах: сб. науч. тр.* – Алма-Ата, 1982. – С. 3-12.
- [3] Белов С.М., Жаврин Ю.И., Косов Н.Д. Диффузионная неустойчивость газовой смеси гелий-аргон-азот при различных давлениях и концентрациях / Алма-Ата: КазГУ, 1985. – 13 с. – Деп. в КазНИИНТИ 14.10.85. - № 1073.
- [4] Жаврин Ю.И., Косов В.Н. Влияние длины канала на устойчивость диффузионного процесса в многокомпонентных газовых смесях // *Вест. АН КазССР*. – 1991. - № 10. – С. 63-65.
- [5] Косов В.Н., Кульжанов Д.У., Жаврин Ю.И., Красиков С.А., Федоренко О.В. Особенности разделения углеводородных газовых смесей при конвективной диффузии. - Алматы: MV-Принт, 2014. – 144 с.
- [6] Asembaeva M.K., Kosov V.N., Krasikov S.A., Fedorenko O.V. Effect of the Channel Inclination Angle on Convective Mixing Caused by Instability of Mechanical Equilibrium of Ternary Gas Mixture at Isothermal Diffusion // *Technical Physics Letters*. – 2019. - №11(45). - P. 1071–1074.
- [7] Kassem Ghorayeb, Abdelkader Mojtabi. Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity // *Physics of Fluids, American Institute of Physics*. – 1997. - № 9 (8). - P. 2339 - 2348.
- [8] Qinlong Ren, Cho Lik Chan. Numerical study of double-diffusive convection in a vertical cavity with Soret and Dufour effects by lattice Boltzmann method on GPU // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2016. - Vol. 93. – P. 538–553.
- [9] Pascale Garaud. Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2018. – Vol. 50. – P. 275-298.
- [10] Hongtao Xu, Zhuqing Luo, Qin Lou, Shuanyang Zhang, Jun Wang. Lattice Boltzmann simulations of the double-diffusive natural convection and oscillation characteristics in an enclosure with Soret and Dufour effects // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2019. – Vol. 136. – P. 159–171.
- [11] Косов В.Н., Жакебаев Д.Б., Федоренко О.В. Численный анализ конвективных движений, возникающих при изотермической диффузии в вертикальных каналах в трехкомпонентных газовых смесях // *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan - physico-mathematical series*. - 2017. – Vol. 5. – P. 134-142.
- [12] Косов В.Н., Федоренко О.В., Жакебаев Д.Б., Кизбаев А.П. Особенности возникновения структурированных формирований на границе смены режимов «диффузия – концентрационная конвекция» при изотермическом смешении бинарной смеси в равной степени разбавленной третьим компонентом // *Теплофизика и аэромеханика*. – 2019. – P. 31-40.
- [13] T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, E.M. Viggien. *The Lattice Boltzmann Method*. – Switzerland: Springer International Publishing, 2017. - 61–293 p.
- [14] Bird B.R., Stewart W.E., Lightfoot E.V. *Transport phenomenon*. – New York: John Wiley and Sons, Inc., 2002. – 914 p.
- [15] Guo Z., Zheng C., Shi B. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method // *Phys. Rev. E*. - 2002. - № 65. - С. 1–6.
- [16] Seta T. Implicit temperature-correction-based immersed-boundary thermal lattice Boltzmann method for the simulation of natural convection // *Phys. Rev. E*. - 2013. - № 87.

References

- [1] Miller L., Spurling T.H., Mason E.A., "Instabilities in ternary diffusion", *Phys. Fluids*, **10**:8(1967), 1809-1811.
- [2] Zhavrin Y.I., Kossov N.D., Belov S.M., Semidotskaya N.I., "O primeneniі metoda effektivnykh koeffitsiyentov k opisaniyu diffuzii v mnogokomponentnykh gazovykh smesyakh pri povyshennykh davleniyakh [On the application of the effective coefficient method to the description of diffusion in multicomponent gas mixtures at elevated pressures]", *Teplomassoperenos v zhidkostyakh i gazakh: sb. nauch. tr.* (1982), 3-12 [in Russian].
- [3] Belov S.M., Zhavrin YU.I., Kosov N.D., *Diffuzionnaya neustoychivost' gazovoy smesi geliy-argon-azot pri razlichnykh davleniyakh i kontsentratsiyakh* [Diffusion instability of a helium-argon-nitrogen gas mixture at various pressures and concentrations](Dep. in KazNIINTI 10/14/85. - №1073. Alma-Ata: KazGU, 1985), 13 [in Russian].
- [4] Zhavrin YU.I., Kosov V.N., "Vliyaniye dliny kanala na ustoychivost' diffuzionnogo protsessa v mnogokomponentnykh gazovykh smesyakh. [Influence of the channel length on the stability of the diffusion process in multicomponent gas mixtures]", *Vest. AN KazSSR* 10 (1991), 63-65 [in Russian].
- [5] Kosov V.N., Kul'zhanov D.U., Zhavrin YU.I., Krasikov S.A., Fedorenko O.V., *Osobennosti razdeleniya uglevodorodnykh gazovykh smesey pri konvektivnoy diffuzii* [Features of the separation of hydrocarbon gas mixtures during convective diffusion] (Almaty: MV-Print, 2014), 144 [in Russian].
- [6] Asembaeva M.K., Kosov V.N., Krasikov S.A., Fedorenko O.V., "Effect of the Channel Inclination Angle on Convective Mixing Caused by Instability of Mechanical Equilibrium of Ternary Gas Mixture at Isothermal Diffusion", *Technical Physics Letters* **45**:11 (2019), 1071–1074.
- [7] Kassem Ghorayeb, Abdelkader Mojtabi, "Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity", *Phys. Fluids* **9**:8(1997), 2339 - 2348.
- [8] Qinlong Ren, Cho Lik Chan, "Numerical study of double-diffusive convection in a vertical cavity with Soret and Dufour effects by lattice Boltzmann method on GPU", *International Journal of Heat and Mass Transfer* **93**(2016), 538–553.
- [9] Pascale Garaud, "Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number", *Annu. Rev. Fluid Mech.* **50**(2018), 275-298.
- [10] Hongtao Xu, Zhuqing Luo, Qin Lou, Shuanyang Zhang, Jun Wang, "Lattice Boltzmann simulations of the double-diffusive natural convection and oscillation characteristics in an enclosure with Soret and Dufour effects", *International Journal of Thermal Sciences.* **136**(2019), 159-171.
- [11] Kosov V.N., Zhakebayev D.B., Fedorenko O.V., "Chislennyy analiz konvektivnykh dvizheniy, vznikayushchikh pri izotermicheskoy diffuzii v vertikal'nykh kanalakh v trekhkomponentnykh gazovykh smesyakh. [Numerical analysis of convective motions arising from isothermal diffusion in vertical channels in three-component gas mixtures]", *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan - physico-mathematical series* **5**(2017), 134-142 [in Russian].
- [12] Kosov V.N., Fedorenko O.V., Zhakebayev D.B., Kizbayev A.P., "Osobennosti vzniknoveniya strukturirovannykh formirovaniy na granitse smeny rezhimov «diffuziya – kontsentratsionnaya konvektsiya» pri izotermicheskom smeshenii binarnoy smesi v ravnoy stepeni razbavlennoy tret'im komponentom [Features of the emergence of structured formations at the boundary of the change of the "diffusion - concentration convection" modes during isothermal mixing of a binary mixture equally diluted with the third component]", *Teplofizika i aeromekhanika* (2019), 31-40 [in Russian].
- [13] T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, E.M. Viggen, *The Lattice Boltzmann Method* (Switzerland: Springer International Publishing, 2017), 293.
- [14] Bird B.R., Stewart W.E., Lightfoot E.V., *Transport phenomenon* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 2002), 914.
- [15] Guo Z., Zheng C., Shi B., "Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method", *Phys. Rev. E.* **65**(2002), 1-6.
- [16] Seta T., "Implicit temperature-correction-based immersed-boundary thermal lattice Boltzmann method for the simulation of natural convection", *Phys. Rev. E.* **87**(2013).

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал «Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика» (в английской версии «Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science Series») принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 418, тел. 22-11-568. Электронная почта: mechmatvestnik@gmail.com (ответственный секретарь редколлегии, Темешева С.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы (название вуза, центра без сокращений), рабочий или моб. телефон, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ или формат .eps [см. п.7]. В редакцию также представляется отпечаток работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 7 страниц. Структура статьи.

Первая страница:

- 1) Первая строка - номер МРНТИ (IRSTI) (можно взять здесь: <http://grnti.ru/>), выравнивание по левому краю, шрифт - полужирный.
- 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 3) Автор(ы) статьи - Инициалы и фамилия, место работы (аффилиация), город, страна, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие **ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ** пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
- 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

Стандартные разделы статьи: **Введение, Обзор литературы, Материал и методы, Результаты и обсуждение, Заключение, Благодарности (если имеются), Список литературы** (названия разделов не менять)

- 6) **Введение.** Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором аспекте.

7) **Обзор литературы.** В разделе обзор литературы должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

8) **Материал и методы.** Раздел должен состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала – один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

9) **Результаты и обсуждение.** В этом разделе приводятся анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) **Заключение.** Обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) **Благодарности (если имеются).** Например: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант «Наименование темы гранта», 2018-2020 годы).

12) **Список литературы/References.** (оба списка, если статья на русском или казахском. Если статья на английском, то только один список по стилю Чикаго). Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50% на английском языке. В случае наличия в списке литературы работ, представленных на кириллице, необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый – в оригинале, второй – романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) → название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке (год в круглых скобках) → страницы. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossi- iskoj innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4 (2011): 8-30. Список литературы представляется по мере цитирования, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Ссылки на литературу оформляются в квадратных скобках с указанием номера литературы. Стиль оформления "Список литературы" на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления" (требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления "References" романизированного списка литературы (см. выше), а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений согласно Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.

- б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
 - в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
 - г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) `tex`-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов $\LaTeX 2_{\epsilon}$ и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате `.eps`, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов `Maple`, `Mathematica` или с помощью пакета `Latexcad`. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат `.eps` с помощью `Adobe Photoshop` или конвертера `Conversion Artist`. Все рисунки должны быть уже импортированными в `tex`-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от вышеуказанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал „Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика“, который включен в каталог АО „Казпочта“ „ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ“. Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМҰНЫ – СОДЕРЖАНИЕ – CONTENTS

1-бөлім	Раздел 1	Section 1
Математика	Математика	Mathematics
<i>Станжицкий А.Н., Шовкопляс Т.В.</i>		
Условие разрешимости краевой задачи и бифуркация ее решения		3
<i>Ишкин Х.К., Марванов Р.И.</i>		
Несекториальный оператор Штурма–Лиувилля с дискретным спектром		18
<i>Айтжанов С.Е., Бекенаева К.С., Жұмағұл Г.О.</i>		
Разрешимость псевдогиперболического уравнения с нелинейным граничным условием		26
2-бөлім	Раздел 2	Section 2
Механика	Механика	Mechanics
<i>Vaigunchekov Zh.Zh., Kassinov A.N.</i>		
Direct kinematics of a 3-PRPS type parallel manipulator		38
<i>Жапбасбаев У.К., Босинов Д.Ж.</i>		
Неизотермическое движение парафинистой нефти в трубопроводе		47
<i>Кайыров Р.А.</i>		
Жана трипод түрдегі 3-PRRS параллель манипулятордың кинематикалық талдауы		58
3-бөлім	Раздел 3	Section 3
Информатика	Информатика	Computer Science
<i>Sartabanova ZH.E., Dimitrov V.T., Sarsimbaeva S.M.</i>		
Applying the knowledge base of CWE weaknesses in software design		72
4-бөлім	Раздел 4	Section 4
Қолданылмалы математика	Прикладная математика	Applied Mathematics
<i>Рахымова А.Т., Габбасов М.Б., Шапен К.М.</i>		
Об одном пространстве четырехмерных чисел		81
<i>Muratov A.S., Kalbayeva A.T., Kurakbayeva S.D., Kalbayeva A.T.</i>		
Using the boundary elements approach to solve the problems of liquid filtration via the dam		99
<i>Жумали А.С., Косов В.Н., Сатенова Б.А., Асылбекулы А.</i>		
Моделирование концентрационной конвекции при различных давлениях и составах трехкомпонентной газовой смеси		108
К сведению авторов		120